Poglavlje 3

Određeni integral

3.1 Uvodni dio

Određeni integral je integral oblika

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pri čemu je a donja granica, b gornja granica. Interval $[a, b]$ nazivamo integral integracije.

Teorem 3.1.1. Newton-Leibnizova formula
Vrijedi da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gdje je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in [a, b]$.

Teorem 3.1.2. Svojstva određenog integrala

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, za $c \in \langle a,\, b\rangle$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in [a,\, b]$

e) **aditivnost**

f) **homogenost**

Zadatak 3.1.3. Riješite sljedeće određene integrale.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{5}\left(3x^2-1\right)\,dx$, b) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$

Rješenje. a)

$$\int_{-3}^{5}\left(3x^2-1\right)\,dx = 3\int_{-3}^{5}x^2\,dx-\int_{-3}^{5}1\,dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{5}-x\Big|_{-3}^{5} = $$
$$= 3\left(\frac{5^3}{3}-\frac{(-3)^3}{3}\right)-(5-(-3)) = 3\left(\frac{125}{3}+\frac{27}{3}\right)-8 = 144$$

b)

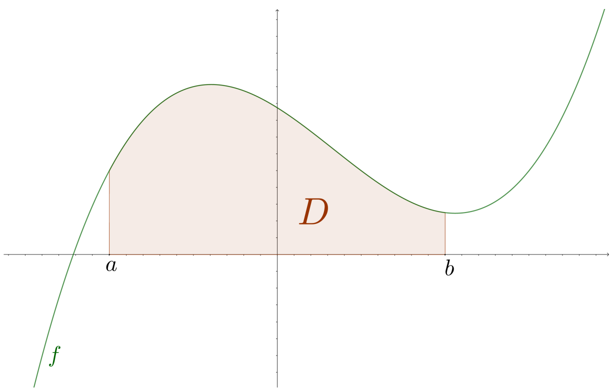
$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{2}x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{1}^{2} = \frac{2^{-1}}{-1}-\frac{1^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos 0) = 2$$

3.2 Određeni integral pozitivne funkcije - geometrijska interpretacija

Određeni integral $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\,dx$ jednak je površini ispod grafa funkcije f, a iznad osi x na intervalu $[a,\,b]$.



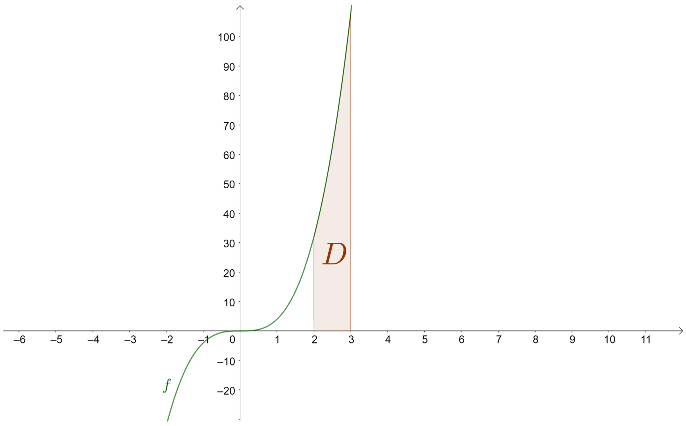
Slika 3.1: Primjer površine ispod grafa pozitivne funkcije f

Zadatak 3.2.1. Izračunajte $\displaystyle\int_{2}^{3}4x^3\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Riješimo najprije zadani integral.

$$\int_2^3 4x^3\,dx = 4\int_2^3 x^3\,dx = 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = 4\cdot\left(\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right) = 65$$

Za geometrijsku interpretaciju skiciramo graf podintegralne funkcije.



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x) = 4x^3$

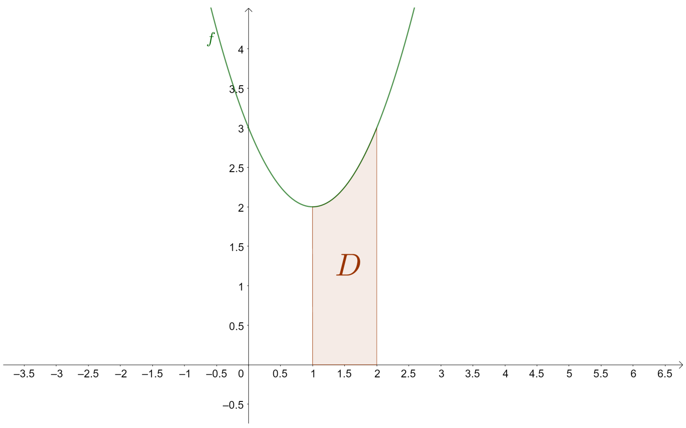
Geometrijska interpretacija je $P(D) = 65$.

Zadatak 3.2.2. Izračunajte $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje.

$$\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 1\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3\cdot x\Big|_1^2 =$$
$$= \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}-2\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)+3\cdot(2-1) = \frac{7}{3}$$

Za geometrijsku interpretaciju analiziramo $f(x) = x^2-2x+3$. Kvadratna funkcija nema realnih nultočaka, konveksna je i tjeme joj je u točki $(1,2)$.



Slika 3.3: Graf funkcije $f(x) = x^2-2x+3$

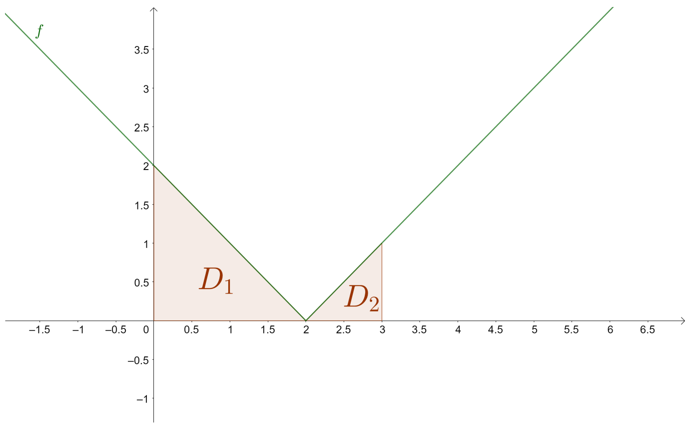
Geometrijska interpretacija je $P(D) = \frac{7}{3}$.

Napomena 3.2.3. Newton-Leibnizovu formulu u prošlom zadatku mogli smo primijeniti i tako da najprije zapišemo primitivne funkcije svih podintegralnih funkcija, a potom primijenimo formulu:

$$\cdots = \left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\cdot 1\right) = \frac{7}{3}.$$

Zadatak 3.2.4. Izračunajte $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Budući da ovdje trebamo odrediti primitivnu funkciju apsolutne vrijednosti, potrebno je najprije promotriti funkciju $f(x) = |x-2|$ na intervalu $[0,\,3]$ te se sukladno ponašanju funkcije "osloboditi" znaka apsolutne vrijednosti.



Slika 3.4: Graf funkcije $f(x) = |x-2|$

Promatramo funkciju na $[0,3]$. Vidimo da za $x \in [0,\,2]$ apsolutna vrijednost mijenja predznak izraza $x-2$ iz negativnog u pozitivni, dok za $x \in [2,\,3]$ predznak izraza $x-2$ ostaje nepromijenjen (pozitivan).

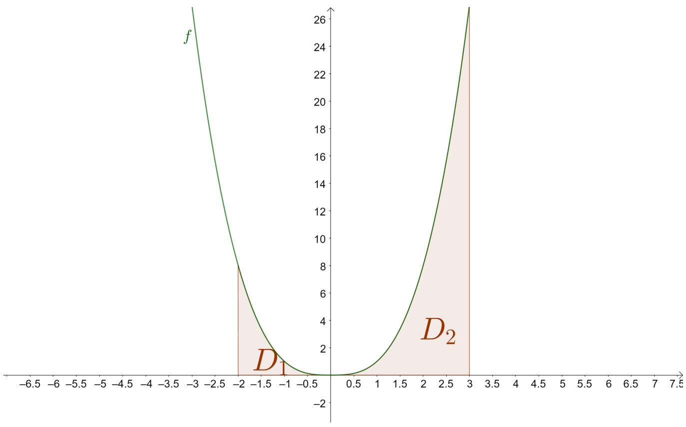
Integral računamo tako da ga rastavimo na dva integrala koristeći svojstvo ulančanosti integrala. Posebno obratite pozornost na granice tako dobivenih integrala.

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 -(x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = \\ &= \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(0 - \frac{0}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija je $P(D_1) + P(D_2) = \frac{5}{2}$.

Zadatak 3.2.5. Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^3 |x|^3\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Najprije skiciramo graf funkcije ispod znaka integrala.



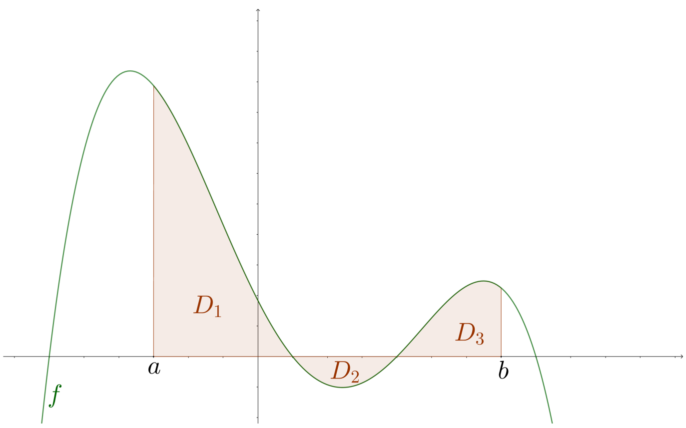
Slika 3.5: Graf funkcije $f(x) = |x|^3$

$$\int_{-2}^{3} |x|^3\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)^3\,dx + \int_{0}^{3} x^3\,dx = -\int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{3} x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{3} = \frac{97}{4}$$

Geometrijska interpretacija je $P(D_1) + P(D_2) = \frac{97}{4}$.

3.3 Integrali ostalih funkcija - geometrijska interpretacija

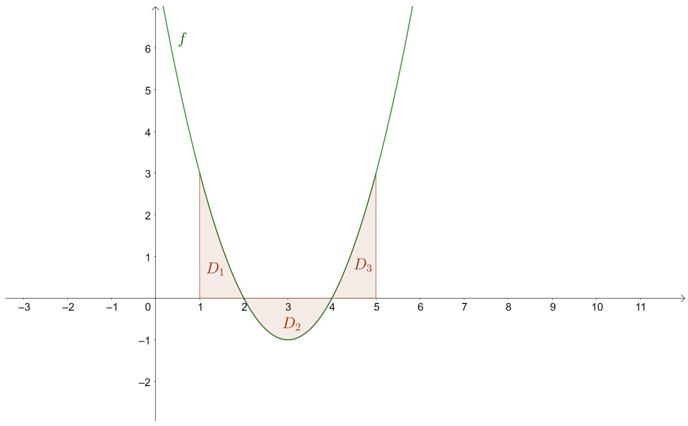
Određeni integral funkcije koja nije pozitivna na cijelom intervalu $[a, b]$ interpretiramo nešto drugačije. Površine likova koje funkcija zatvara s osi x kad je pozitivna dolaze u zbroj s pozitivnim predznakom, a površine koje funkcija zatvara s osi x kad je negativna dolaze s negativnim predznakom.



Slika 3.6: Primjer neke funkcije i površina koje zatvara s osi x

Tada je geometrijska interpretacija: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3).$

Primjer 3.3.1. Neka je zadana funkcija $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Izračunajmo sljedeća 4 integrala: $\int_1^2 f(x)\,dx$, $\int_2^4 f(x)\,dx$, $\int_4^5 f(x)\,dx$ te $\int_1^5 f(x)\,dx$.



Slika 3.7: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(x^2 - 6x + 8\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_2^4 = -\frac{4}{3}$$

(apsolutna vrijednost ovog broja je iznos površine $P(D_2)$)

$$\int_4^5 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Big|_4^5 = \frac{4}{3}$$

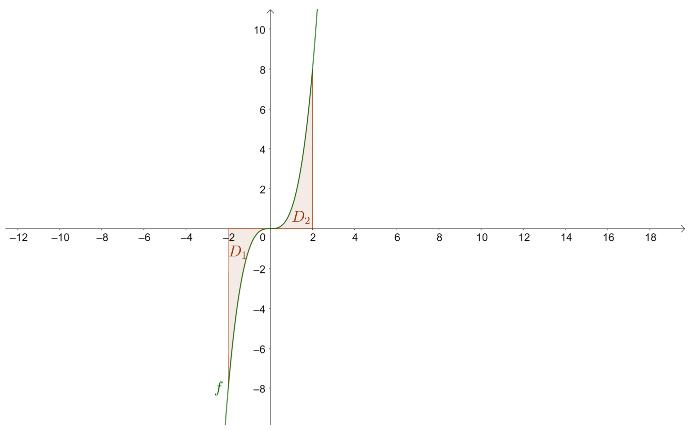
$$\int_1^5 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Big|_1^5 = \frac{4}{3}$$

(po pravilu ulančanosti ovaj se broj dobije kao zbroj prethodna tri integrala)

Geometrijska interpretacija je $\int_1^5 f(x)\,dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3)$.

Zadatak 3.3.2. Izračunajte $\int_{-2}^2 x^3\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultata.

Rješenje. Najprije skiciramo graf podintegralne funkcije.



Slika 3.8: Graf funkcije $f(x) = x^3$

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

Geometrijska interpretacija je $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3\,dx = -P(D_1) + P(D_2)$.

Napomena 3.3.3. Primjećujemo da je iznos površina područja D_1 i D_2 isti. Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna funkcija pa je njezin graf centralno simetričan s obzirom na ishodište. Općenito, ako je podintegralna funkcija neparna te ju integriramo na simetričnom intervalu oblika $[-a, a]$, onda je $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

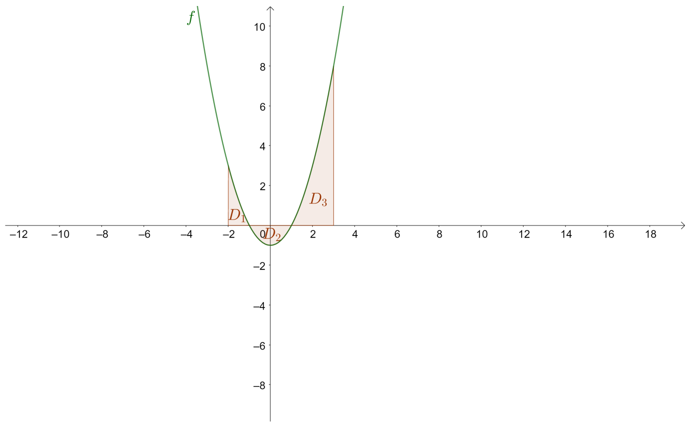
Za parnu funkciju $g(x)$ vrijedi da je $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$.

Zadatak 3.3.4. Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje.

$$\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\,dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right|_{-2}^{3} = \frac{20}{3}$$

Podintegralna funkcija $f(x) = x^2 - 1$ ima dvije nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ i tjeme u $(0, -1)$.

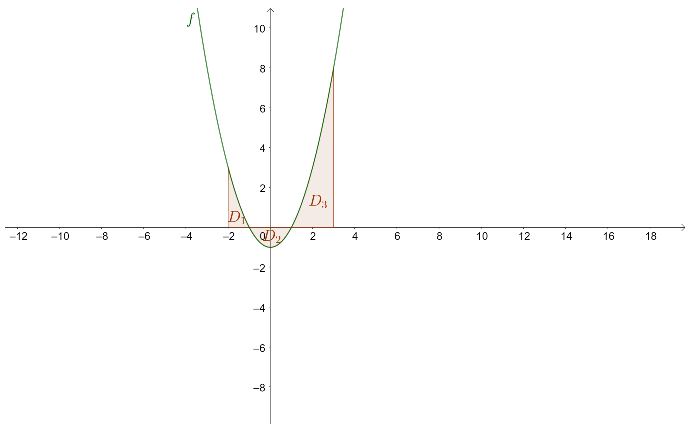


Slika 3.9: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$

Geometrijska interpretacija je $\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\, dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3)$.

Zadatak 3.3.5. Izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$, osi x i pravcima $x = -2$ i $x = 3$.

Rješenje. Skica je ista kao u prošlom zadatku. Ono što se u ovom zadatku traži koliko je $P(D_1) + P(D_2) + P(D_3)$.



Slika 3.10: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$

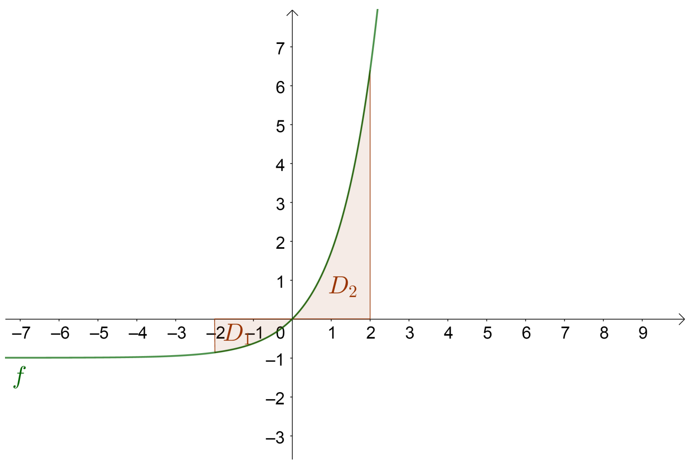
Razlika u odnosu na ono što smo dobili u prethodnom zadatku je u dijelu $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)\, dx$

čiji je iznos negativan broj, a čija apsolutna vrijednost odgovara površini $P(D_2)$.

$$\begin{aligned} P(D_1)+P(D_2)+P(D_3) &= \int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)\,dx - \int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\,dx + \int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)\,dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{3} = \\ &= \left(\frac{(-1)^3}{3}+1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3}+2\right) - \left[\left(\frac{1^3}{3}-1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3}+1\right)\right] + \\ &+ \left(\frac{3^3}{3}-3\right) - \left(\frac{1^3}{3}-1\right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Zadatak 3.3.6. Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = e^x - 1$, osi x te pravcima $x = -2$ i $x = 2$.

Rješenje. Najprije skiciramo graf funkcije $f(x) = e^x - 1$.



Slika 3.11: Graf funkcije $f(x) = e^x - 1$

Tražimo $P(D_1) + P(D_2)$. Budući da je područje D_1 ispod osi x, integral koji njemu odgovara dolazi u zbroj s negativnim predznakom. Zato imamo

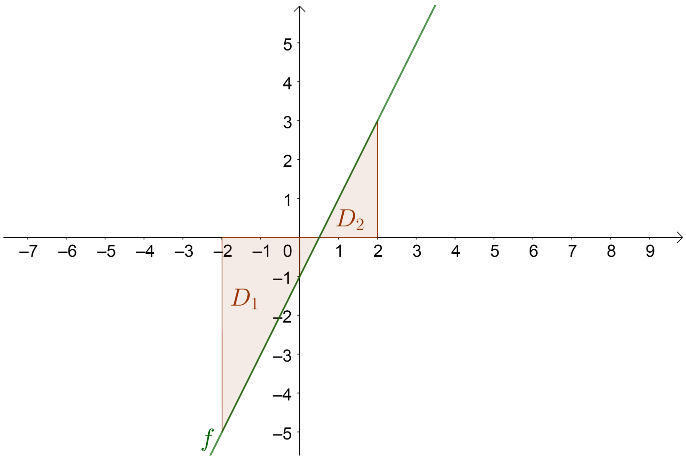
$$\begin{aligned} P(D_1)+P(D_2) &= -\int_{-2}^{0}\left(e^x-1\right)\,dx + \int_{0}^{2}\left(e^2-1\right)\,dx = -\left(e^x-x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(e^x-x\right)\Bigg|_{0}^{2} = \\ &= -\left[(e^0-0)-(e^{-2}-(-2))\right] + (e^2-2) - (e^0-0) = e^{-2}+e^2-2 \end{aligned}$$

Zadatak 3.3.7. Izračunajte sljedeće integrale i interpretirajte rezultat:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-1)\,dx$, b) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\pi}\cos x\,dx$.

Rješenje.

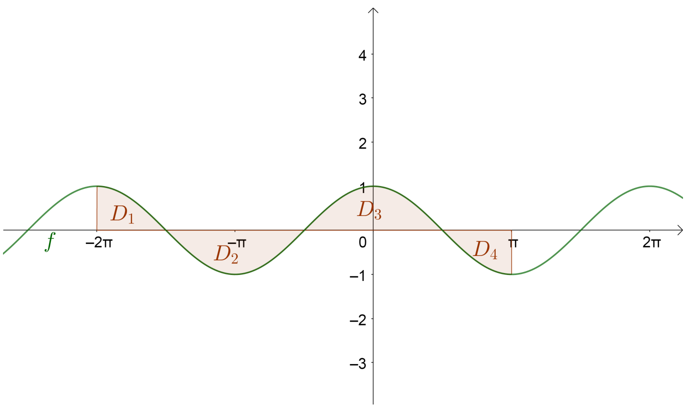
a) Najprije skiciramo graf funkcije $f(x) = 2x - 1$. Radi se o linearnoj funkciji koja je rastuća i čija je nultočka $x = \frac{1}{2}$.



Slika 3.12: Graf funkcije $f(x) = 2x - 1$

$$\int_{-2}^{2} (2x-1)\, dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(2 \cdot \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(2 \cdot \frac{(-2)^2}{2} - (-2)\right) =$$
$$= -4 = -P(D_1) + P(D_2)$$

b) Graf funkcije $f(x) = \cos x$ dan je na sljedećem prikazu.

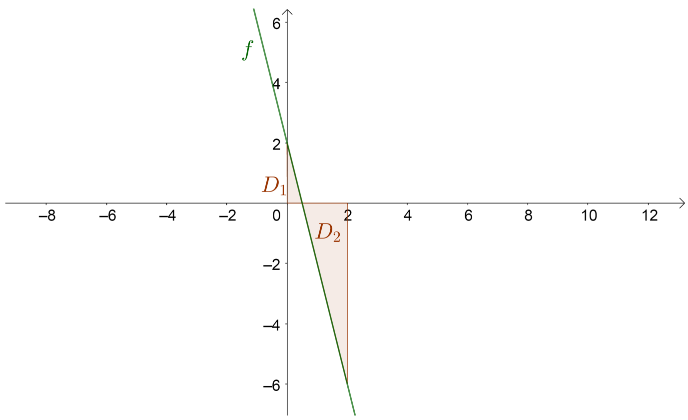


Slika 3.13: Graf funkcije $f(x) = \cos x$

$$\int_{-2\pi}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x \Bigg|_{-2\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-2\pi) = 0 = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3) - P(D_4)$$

Zadatak 3.3.8. Izračunajte površinu područja omeđenog s osi x, pravcima $x = 0$ i $x = 2$ i grafom funkcije $f(x) = 2 - 4x$.

Rješenje. Funkcija f je padajuća linearna funkcija s nultočkom $x = \frac{1}{2}$.

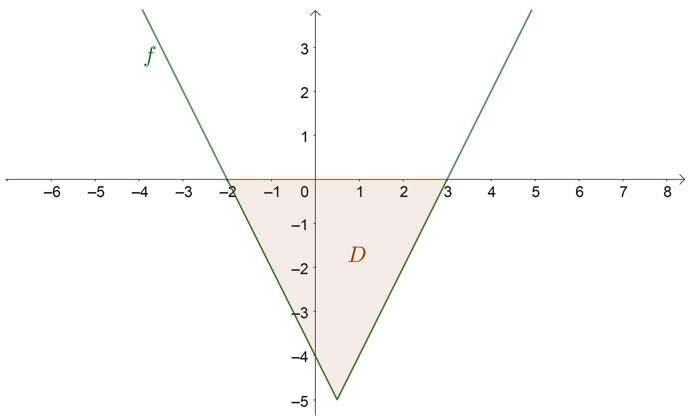


Slika 3.14: Graf funkcije $f(x) = 2 - 4x$

$$P(D_1) + P(D_2) = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-4x)\ dx - \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2-4x)\ dx =$$
$$= \left(2x - 4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \left(2x - 4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = 5$$

Zadatak 3.3.9. Izračunajte površinu područja omeđenog s osi x i grafom funkcije $f(x) = |2x-1| - 5$.

Rješenje. Funkcija f ima nultočke $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$.



Slika 3.15: Graf funkcije $f(x) = |2x-1| - 5$

$$
\begin{aligned}
P(D) &= -\int_{-2}^{3} (|2x-1|-5)\ dx = -\int_{-2}^{3} |2x-1|\,dx + 5\int_{-2}^{3} 1\,dx = \\
&= -\left[\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x-1)\,dx\right] + 5x\,\Big|_{-2}^{3} = \\
&= -\left[\left(-2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{\frac{1}{2}} + \left(2\cdot\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{3}\right] + 25 = \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

Napomena 3.3.10. Površine područja u Zadatku 3.3.8 i 3.3.9 možemo računati i tako da prepoznamo trokute kao sastavne dijelove tih područja. Taj način rješavanja možemo koristiti kao provjeru.

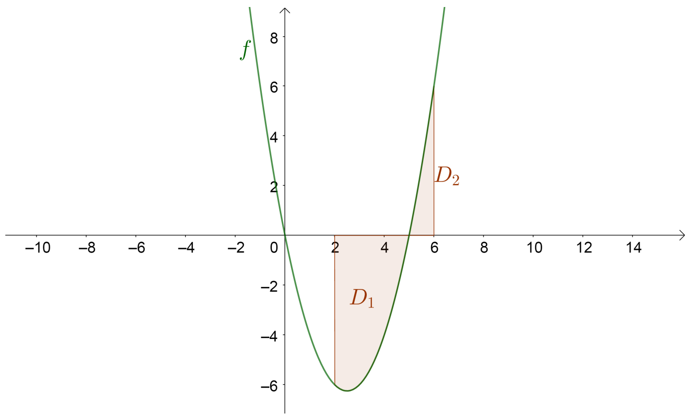
Zadatak 3.3.11. (Zadaci s kolokvija)

a) Geometrijski interpretirajte integral $\displaystyle\int_{2}^{6} x(x-5)\,dx$.

b) Izračunajte $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (|x+2|-1)\ dx$.

Rješenje.

a) Podintegralna funkcija je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 5x$ koja je konveksna i čije su nultočke $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$.



Slika 3.16: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 5x$

Primjetite da se ovdje u tekstu zadatka ne zahtijeva računanje integrala, nego samo geometrijska interpretacija koja je $\displaystyle\int_{2}^{6} x(x-5)\,dx = -P(D_1) + P(D_2)$.

b) Najprije zadani integral razdvojimo na integral apsolutne vrijednosti i integral ostatka. S obzirom na ponašanje izraza ispod znaka apsolutne vrijednosti, po pravilu ulančanosti integrala, razdvojimo prvi integral na dva integrala.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-1} (|x+2|-1)\ dx &= \int_{-4}^{-1} |x+2|\, dx - \int_{-4}^{-1} 1\, dx = \\ &= \int_{-4}^{-2} (-x-2)\, dx + \int_{-2}^{-1} (x+2)\, dx - \int_{-4}^{-1} 1\, dx = \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-4}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - x\Bigg|_{-4}^{-1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ovdje crtež grafa funkcije $f(x) = |x+2|$ nije potreban, no može poslužiti kao pomoć pri određivanju vrijednosti x u kojoj dolazi do promjene predznaka izraza $x+2$.