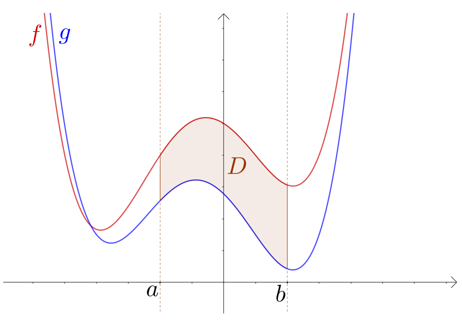
Poglavlje 5

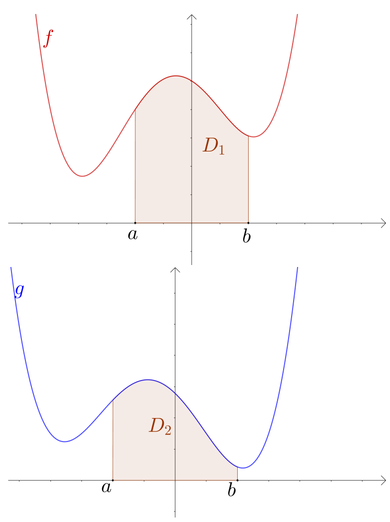
Primjena određenog integrala u geometriji

Određeni integral koristi se u geometriji za računanje površina i volumena. Već smo u Poglavlju 4 vidjeli neke primjere površina prilikom geometrijske interpretacije određenih integrala pozitivne i ostalih funkcija.

5.1 Površina

Zanima nas kako izračunati površinu područja D na slici. Koristeći znanje iz Poglavlja 4 možemo zaključiti da se površina D može dobiti kao razlika dviju površina, onog područja ispod veće (gornje) pozitivne funkcije i ispod manje (donje) pozitivne funkcije. Isto vrijedi i za površine područja koje se ne protežu samo iznad osi x.





$$P(D) = P(D_1) - P(D_2) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Po svojstvu aditivnosti određenog integrala slijedi: $P(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

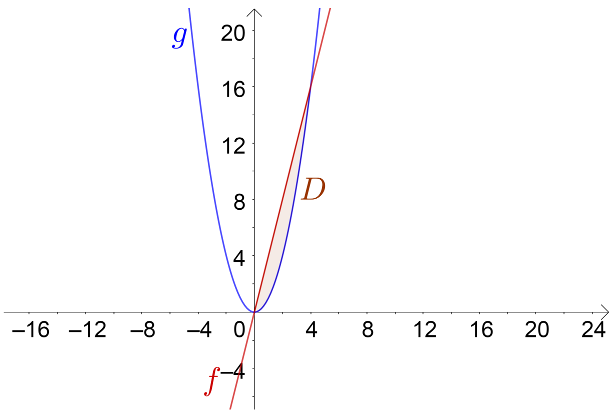
Zadatak 5.1.1. Izračunajte površinu područja omeđenog s:

a) $y = x^2$, $y = 4x$, b) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$, c) $y^2 = x$, $y = x - 2$,

d) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, e) $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Rješenje.

a) Skiciranjem zadane kvadratne i linearne funkcije utvrdimo da je $f(x) = 4x$ gornja funkcija, a $g(x) = x^2$ donja funkcija.



Slika 5.1: Područje D

Zatim tražimo presječne točke navedene linearne i kvadratne funkcije.

$$x^2 = 4x$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Donja granica je manja od dvije presječne točke, a gornja je veća (slijeva nadesno).

$$P(D) = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

b) Funkcija $f(x) = 4 - x^2$ je kvadratna konkavna funkcija s nultočkama u -2 i 2 te tjemenom $(0, 4)$, a funkcija $g(x) = x^2 - 2x$ je kvadratna konveksna funkcija s nultočkama u

0 i 2 te tjemenom $(1, -1)$.

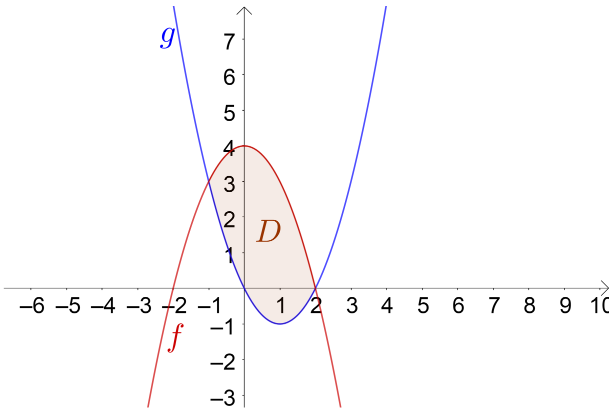
Presječne točke dobijemo rješavanjem sljedeće jednadžbe.

$$4 - x^2 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2$$



Slika 5.2: Područje D

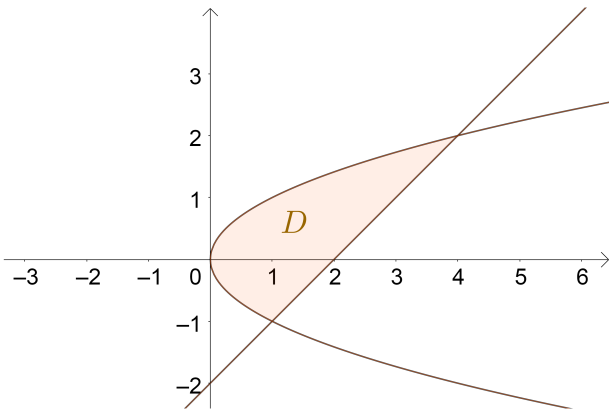
$$P(D) = \int_{-1}^{2} \left((4 - x^2) - (x^2 - 2x)\right)\, dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx =$$

$$= \left(-2\frac{2}{3}x^3 + 2\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 9$$

c) Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

1. način: integracijom po x.

Izrazom $y^2 = x$ dana je parabola izdužena po osi x, a $y = x - 2$ je jednadžba pravca.

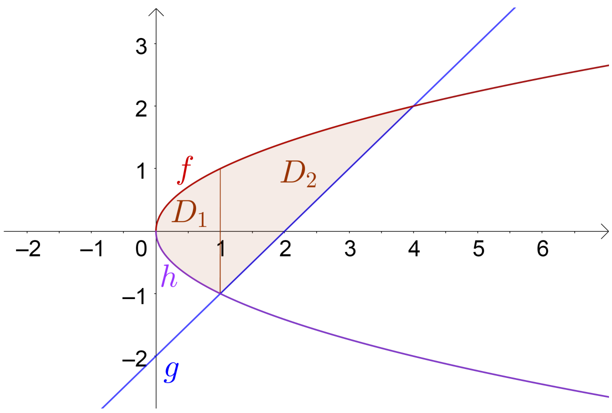


Slika 5.3: Područje D

Presječne točke dobivamo na sljedeći način.

$$y^2 = y + 2$$
$$y^2 - y - 2 = 0$$
$$y_1 = -1,\ y_2 = 2$$
$$x_1 = y_1 + 2 = 1 \qquad x_2 = y_2 + 2 = 4$$

Dobivene presječne točke nisu dovoljne za odrediti granice integracije. Na skici vidimo da je najljevija točka područja $(0,0)$, a najdesnija točka $(4,2)$ pa su granice integracije 0 i 4. U određivanju gornje i donje funkcije koje omeđuju promatrano područje vidimo da je gornja funkcije gornja grana parabole, tj. $f(x) = \sqrt{x}$, a donja funkcija nije na cijelom intervalu integracije ista. Do $x = 1$ donja funkcija je donja grana parabole $h(x) = -\sqrt{x}$, a od $x = 1$ do $x = 4$ donja funkcija je linearna, tj. $g(x) = x - 2$. Zato površinu područja D računamo kao zbroj dviju površina $P(D_1) + P(D_2)$.

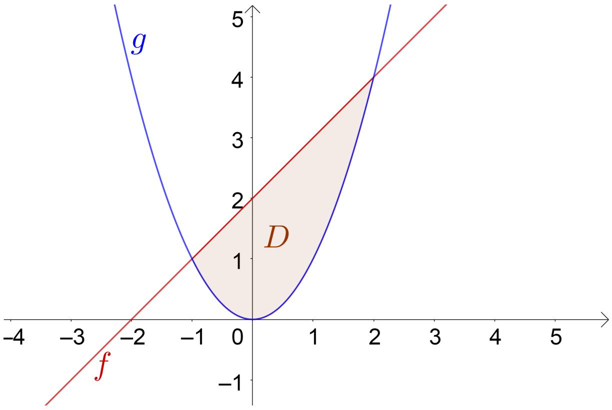


Slika 5.4: Područja D_1 i D_2

$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx =$$
$$= 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}$$

2. način: integracijom po y.

Zarotiramo li prethodnu skicu na način da na mjestu osi y bude os x te ju zrcalimo, dobijemo sljedeću skicu.



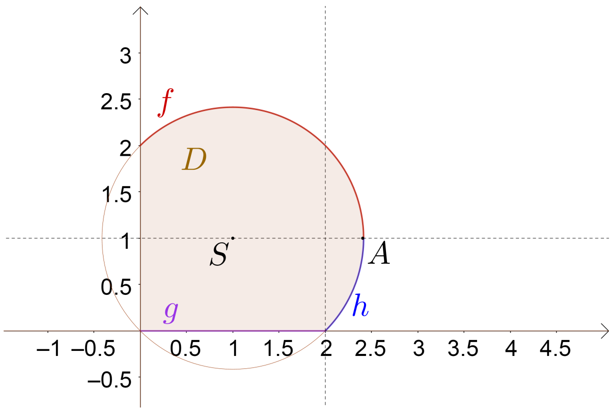
Slika 5.5: Područje D

Sada područje D odozdo omeđuje $g(y) = y^2$, a odozgo $f(y) = y + 2$. Funkcije izražavamo u varijabli y te također i granice koje iznose -1 i 2.

$$P(D) = \int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Zbog izduženosti parabole $y^2 = x$ po osi x drugi način rješavanja je lakši, no pomalo neprirodan. U zadacima u kojima se javlja pitanje površine morat ćemo sami odlučiti koji od dva načina odabrati.

d) Transformiramo li $x^2+y^2 = 2x+2y$, dobivamo jednadžbu kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ čije je središte točka $S(1, 1)$, a radijus $r = \sqrt{2}$. Presječne točke kružnice i osi su $(0, 2)$ i $(2, 0)$.



Slika 5.6: Područje D

Područje D prostire se od osi y do točke A čija x-koordinata odgovara x-koordinati središta uvećanoj za iznos radijusa $(1 + \sqrt{2})$. Na cijelom intervalu $\left[0,\, 1 + \sqrt{2}\right]$ područje D nije odozgo i odozdo ograničeno istom funkcijom. Na intervalu $[0, 2]$ gornja je funkcija gornja polukružnica $f(x) = 1 + \sqrt{2-(x-1)^2}$, a donja je os x ($g(x) = 0$). Na intervalu $\left[2, 1+\sqrt{2}\right]$ gornja funkcija ostaje ista, a donja je donja polukružnica $h(x) = 1 - \sqrt{2-(x-1)^2}$. Prema navedenom, površinu područja D računamo kao:

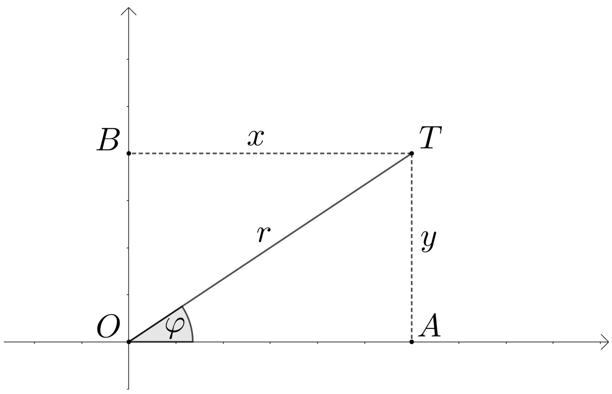
$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \int_0^2 \left(1 + \sqrt{2-(x-1)^2} - 0\right)\, dx + \\ + \int_2^{1+\sqrt{2}} \left(\left(1 + \sqrt{2-(x-1)^2}\right) - \left(1 - \sqrt{2-(x-1)^2}\right)\right)\, dx.$$

Ovaj je račun poprilično teško izvesti do kraja, stoga odustajemo. Problem računanja površina ovakvih područja izvrsna je motivacija za uvođenje novog pristupa. Definiramo polarne koordinate.

Označimo s r udaljenost točke T od ishodišta $O(0,0)$, a s φ kut koji dužina $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta, dobivamo da je

$$x = r\cos\varphi \text{ i } y = r\sin\varphi,$$

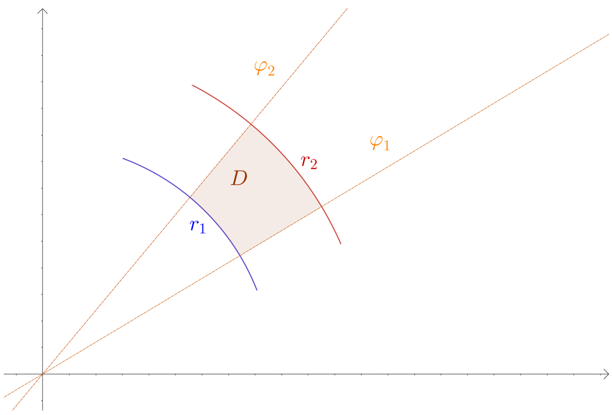
čime smo dobili poveznicu Kartezijevih i polarnih koordinata.



Slika 5.7: Poveznica Kartezijevih i polarnih koordinata

Dodatno, uz osnovni trigonometrijski identitet, vrijedi da je:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

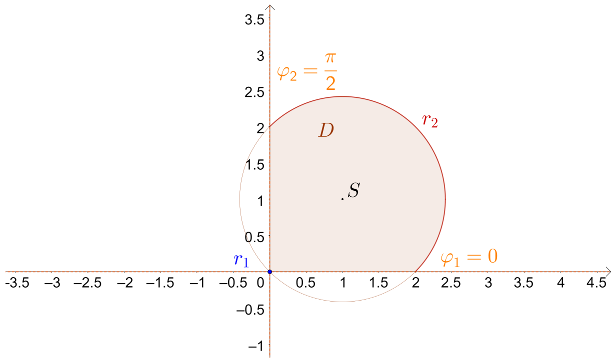


Nadalje, može se dobiti formula za površinu područja omeđenog krivuljama $r_1(\varphi)$ i $r_2(\varphi)$ (radi jednostavnosti ovisnost o φ kasnije nećemo pisati):

$$P(D) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right) d\varphi.$$

Vratimo se sada na zadatak. Potrebno je kružnicu $x^2+y^2=2x+2y$ izraziti u "jeziku" polarnih koordinata.

$$x^2+y^2=2x+2y$$
$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=2r\cos\varphi+2r\sin\varphi$$
$$r^2=2r(\cos\varphi+\sin\varphi)\quad / : r$$
$$r=2\cos\varphi+2\sin\varphi$$
$$r_2=2\cos\varphi+2\sin\varphi$$



Slika 5.8: Područje D

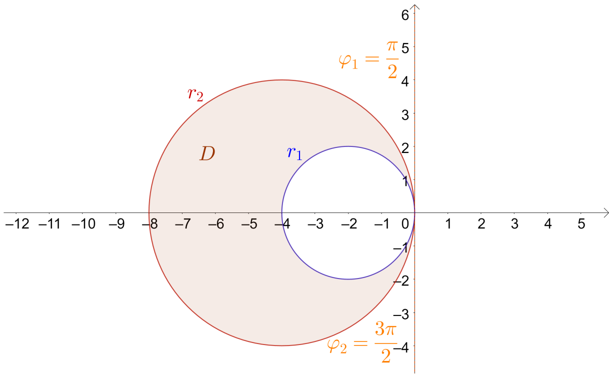
Po formuli je:

$$\begin{aligned}
P(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((2\cos\varphi+2\sin\varphi)^2-0^2\right)\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\varphi+8\cos\varphi\sin\varphi+4\sin^2\varphi\right)\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+8\cos\varphi\sin\varphi)\,d\varphi = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\varphi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) = \\
&= 2\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) = \begin{bmatrix} t=\sin\varphi & \varphi_1=0\Rightarrow t_1=\sin 0=0 \\ dt=\cos\varphi\,d\varphi & \varphi_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t_2=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{bmatrix} = \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2}-0+2\int_0^1 t\,dt\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}+2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) = \pi+2.
\end{aligned}$$

e) Obje zadane krivulje su kružnice. Radi se o kružnici $(x+4)^2+y^2=16$ koja ima središte u $(-4,0)$ i radijusa je $r=4$ te kružnici $(x+2)^2+y^2=4$ sa središtem u $(-2,0)$ radijusa $r=2$.

$$x^2 + y^2 + 8x = 0$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 8r\cos\varphi = 0$$
$$r^2 + 8r\cos\varphi = 0$$
$$r(r + 8\cos\varphi) = 0 \quad / : r$$
$$r = -8\cos\varphi$$
$$r_2 = -8\cos\varphi$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 4r\cos\varphi = 0$$
$$r^2 + 4r\cos\varphi = 0$$
$$r(r + 4\cos\varphi) = 0 \quad / : r$$
$$r = -4\cos\varphi$$
$$r_1 = -4\cos\varphi$$



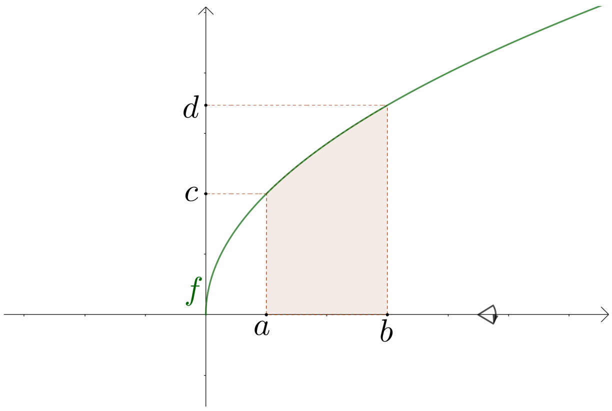
Slika 5.9: Područje D

$$P(D) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left((-8\cos\varphi)^2 - (-4\cos\varphi)^2\right)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (64\cos^2\varphi - 16\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$
$$= 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+\cos(2\varphi))\, d\varphi =$$
$$= 12\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi$$

5.2 Volumen

Osim površina pomoću integrala lagano računamo i volumen rotacijskih tijela. Lik u koordinatnom sustavu možemo rotirati oko osi x, y ili nekog drugog zadanog pravca.

Rotacija oko osi x

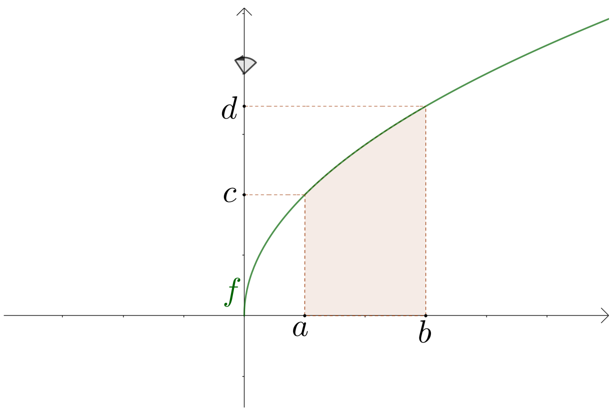


Slika 5.10: Primjer lika koji rotira oko osi x

Funkciju f možemo iskazati u varijabli x ili varijabli y, ovisno kako smo u zadatku procijenili da će nam biti lakše. Sukladno tome, imamo dvije formule:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx, \quad V_x = 2\pi \int_c^d y g(y)\, dy.$$

Rotacija oko osi y



Slika 5.11: Primjer lika koji rotira oko osi y

Funkciju f ponovno možemo iskazati u varijabli x ili y pa imamo dvije formule:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx, \quad V_y = \pi \int_c^d g(y)^2\, dy.$$

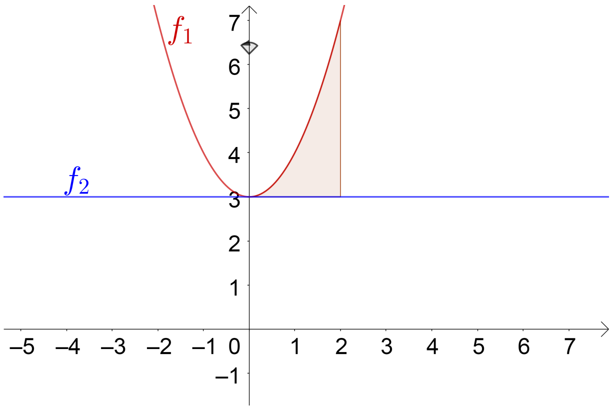
Zadatak 5.2.1. (Zadatak s kolokvija)

Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y lika omeđenog krivuljom $y = x^2 + 3$ te pravcima $y = 3$ i $x = 2$.

Rješenje. Zadatku možemo pristupiti na dva načina.

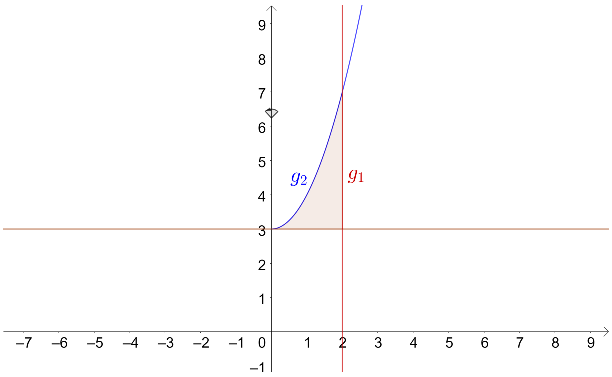
1. način: funkcije izrazimo u varijabli x. Volumen tijela koje dobijemo rotacijom lika

razlika je dvaju volumena, onog određenog s $f_1(x) = x^2 + 3$ i onog određenog s $f_2(x) = 3$ za $x \in [0, 2]$.



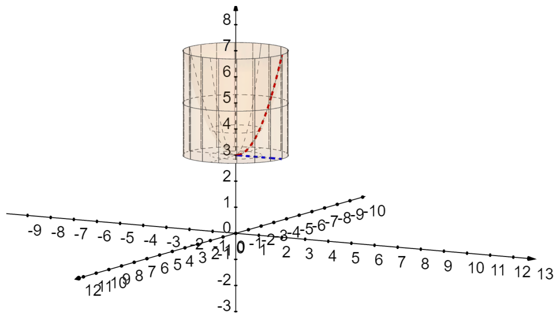
$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(x^2 + 3)\,dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot 3\,dx = 2\pi \int_0^2 (x^3 + 3x)\,dx - 2\pi \int_0^2 3x\,dx =$$
$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 - 2\pi \cdot 3\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^2 = 8\pi$$

2. način: funkcije izrazimo u varijabli y. Volumen rotacijskog tijela je ponovno razlika dvaju volumena, onog određenog s $g_1(y) = 2$ i onog određenog s $g_2(y) = \sqrt{y-3}$ za $y \in [3, 7]$.



$$V_y = \pi \int_3^7 2^2\,dy - \pi \int_3^7 \sqrt{y-3}^2\,dy = 4\pi y \Bigg|_3^7 - \pi \left(\frac{y^2}{2} - 3y \right) \Bigg|_3^7 = 8\pi$$

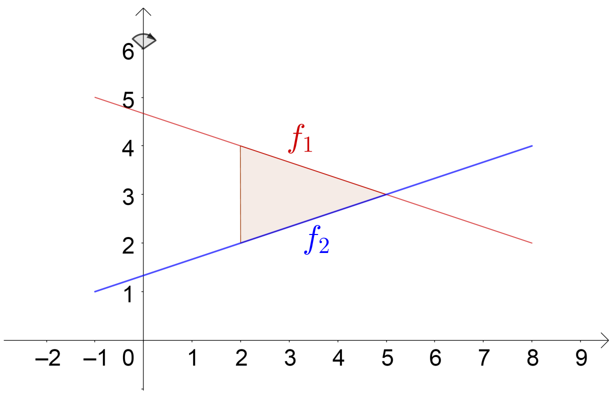
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Zadatak 5.2.2. Pravci $y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ i $x = 2$ zatvaraju lik koji rotira oko osi y. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

Rješenje. 1. način: u varijabli x kao razlika volumena.

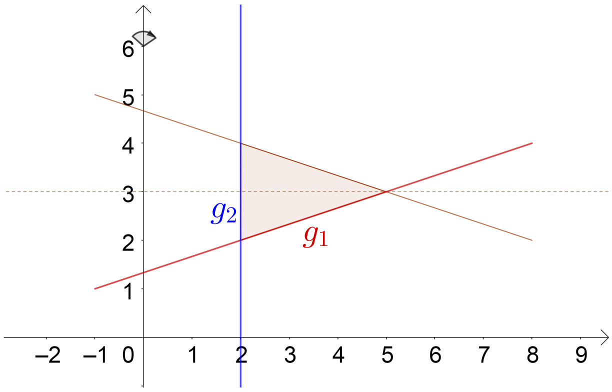
Dobivamo sljedeću skicu pri čemu smo označili: $f_1(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ i $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.



$$V_y = 2\pi \int_2^5 x\left(-\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}\right) dx - 2\pi \int_2^5 x\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{14}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 - 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 = 18\pi$$

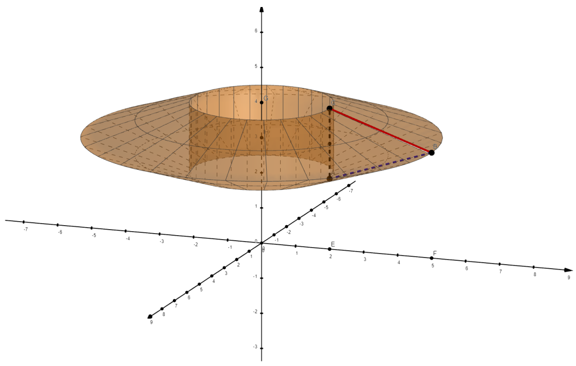
2. način: u varijabli y kao razliku volumena. Dobiveni lik je jednakokračan trokut pa možemo volumen računati kao dvostruki volumen samo jedne polovice rotacijskog tijela pri čemu je $g_1(y) = 3y - 4$, a $g_2(y) = 2$.



$$V_y = 2\left(\pi\int_2^3 (3y-4)^2\,dy - \pi\int_2^3 2^2\,dy\right) = \begin{bmatrix} t=3y-4 & y_1=2\Rightarrow t_1=2\\ dt=3\,dy & y_2=3\Rightarrow t_2=5\end{bmatrix} =$$

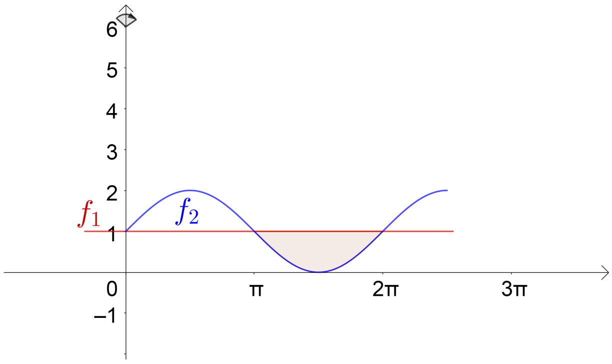
$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,dt - \int_2^3 4\,dy\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^5 - 4y\Bigg|_2^3\right) = 18\pi$$

Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



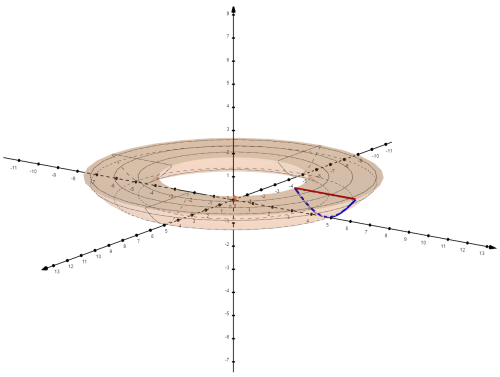
Zadatak 5.2.3. Odredite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi y područja omeđenog s $1+\sin x \le y \le 1$, za $\pi \le x \le 2\pi$.

Rješenje. Traženi volumen dobiva se kao razlika volumena tijela koje se dobije rotacijom lika ispod funkcije $f_1(x) = 1$ i volumena tijela koje se dobije rotacijom lika ispod funkcije $f_2(x) = 1+\sin x$ i to za $x \in [\pi,\, 2\pi]$.



$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot 1 \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x(1+\sin x)\, dx = \\
&= 2\pi \frac{x^2}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} - 2\pi \left(\int_{\pi}^{2\pi} x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right) = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x \, dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = \\
&= 3\pi^3 - 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} + x(-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos x)\, dx \right) = \\
&= 3\pi^3 - 2\pi \left(\frac{3\pi^2}{2} - 3\pi + \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 6\pi^2
\end{aligned}
$$

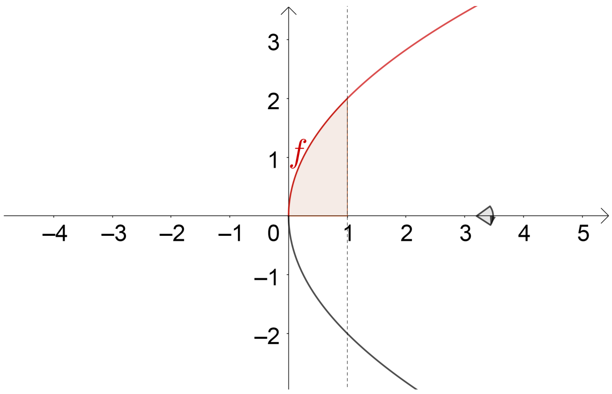
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Kad bismo htjeli riješiti ovaj zadatak u varijabli y, javio bi se inverz funkcije $f(x) = \sin x$ pa zbog kompleksnosti taj način ovdje nećemo razmatrati.

Zadatak 5.2.4. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko osi x područja omeđenog s $y^2 = 4x$ i $x = 1$.

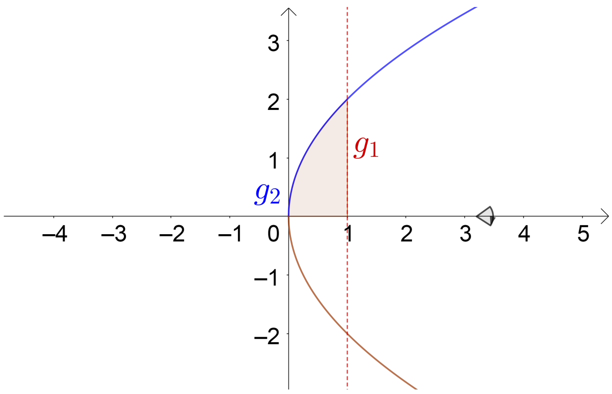
Rješenje. Ovdje je dovoljno rotirati samo osječani dio jer ako rotiramo cijeli lik, imamo nepotrebno poklapanje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.



1. način: u varijabli x izrazimo gornju granu parabole $f(x) = \sqrt{4x}$.

$$V_x = \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x}^2\, dx = 4\pi \int_0^1 x\, dx = 4\pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\pi$$

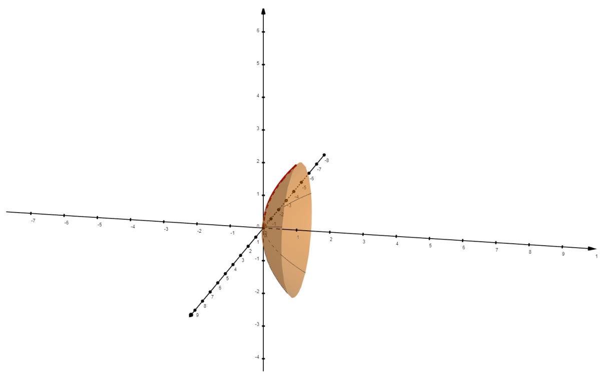
2. način: u varijabli y.



U tom se slučaju radi o razlici dvaju volumena koji se dobiju rotacijom područja određenih krivuljama $g_1(y) = 1$, odnosno $g_2(y) = \frac{y^2}{4}$.

$$V_x = 2\pi \int_0^2 y \cdot 1\, dy - 2\pi \int_0^2 y \cdot \frac{y^2}{4}\, dy = 2\pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\pi}{2}\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = 2\pi$$

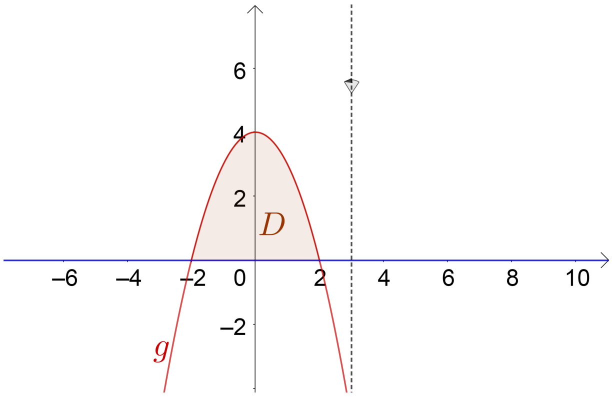
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Zadatak 5.2.5. Dodatni zadatak - rotacija oko zadanog pravca

Lik omeđen s $y = 4 - x^2$ i osi x rotira oko pravca $x = 3$. Odredite volumen rotacijskog tijela.

Rješenje. Zbog rotacije oko pravca $x = 3$ potrebno je napraviti pomak koordinatnog sustava udesno što ostvarujemo oduzimanjem broja 3 u podintegralnoj funkciji.



$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 (-\sqrt{4-y} - 3)^2\, dy - \pi \int_0^4 (\sqrt{4-y} - 3)^2\, dy = \\
&= \pi \left[\int_0^4 (4 - y + 6\sqrt{4-y} + 9)\, dy - \int_0^4 (4 - y - 6\sqrt{4-y} + 9)\, dy \right] = \\
&= \pi \int_0^4 12\sqrt{4-y}\, dy = \begin{bmatrix} t = 4 - y & y_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 4 \\ dt = -dy & y_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 0 \end{bmatrix} = \pi \int_4^0 12\sqrt{t} \cdot (-dt) = \\
&= -12\pi \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^0 = 64\pi
\end{aligned}$$

Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.