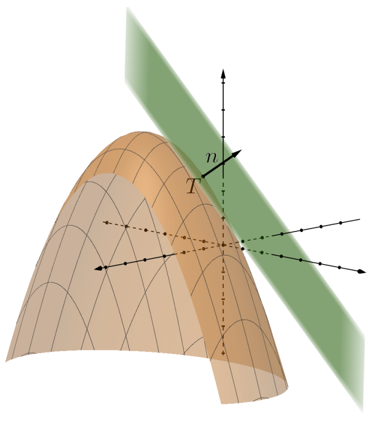
Poglavlje 8

Linearna aproksimacija funkcija više varijabla, tangencijalna ravnina, diferencijal

8.1 Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina je poopćenje pojma tangente koji smo obrađivali kod funkcija jedne varijable. Graf funkcije dviju varijabli naziva se ploha u prostoru. Tangencijalna ravnina u točki plohe $T(x_0, y_0, z_0)$ je ravnina koja plohu dira u toj točki i u nekom smislu je okomita na plohu. Budući da funkciju dvije varijable možemo zadati na dva načina, implicitno i eksplicitno, zapisat ćemo i dvije formule za tangencijalnu ravninu. Tangencijalnu ravninu određuje vektor normale koji označavamo s $\vec{n}$.



Slika 8.1: Primjer tangencijalne ravnine i vektora normale u točki T

EKSPLICITNO ZADANA FUNKCIJA $z = f(x, y)$

Jednadžba ravnine u $T(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0.$$

Vektor normale je $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ -1\right)$.

IMPLICITNO ZADANA FUNKCIJA $F(x, y, z) = 0$

Jednadžba ravnine u $T(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Vektor normale je $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$.

Zadatak 8.1.1. Odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ u točki $T(4, 1, z_0)$.

Rješenje. Najprije izračunamo nepoznatu koordinatu točke T. Točka T je na grafu od f pa je dobijemo uvrštavanjem $z_0 = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 1\sqrt{4} - 1^2 - 4 + 6 \cdot 1 = 3$.
Funkcija je zadana eksplicitno pa su nam potrebne $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u točki $(4, 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 0 - 1 + 0 = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = -\frac{3}{4} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sqrt{x} - 2y - 0 + 6 = \sqrt{x} - 2y + 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) &= 0 \\ -\frac{3}{4}(x - 4) + 6(y - 1) - 1(z - 3) &= 0 \\ -\frac{3}{4}x + 6y - z &= 0 \\ -3x + 24y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Zadatak 8.1.2. Odredite tangencijalnu ravninu u točki $T(x_0, 2, 1)$ za $x_0 > 0$ na graf funkcije $xz^2 + x^2y = 6$.

Rješenje. Najprije izračunamo nepoznatu koordinatu točke T.

$$x_0 \cdot 1^1 + x_0^2 \cdot 2 = 6$$

$$2x_0^2 + x_0 - 6 = 0$$

$$x_0 = -2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

Budući da u zadatku piše da je $x_0 > 0$, biramo $x_0 = \frac{3}{2}$. Dakle, $T(\frac{3}{2}, 2, 1)$.

Primijetimo da je funkcija zadana implicitno. Definiramo $F(x, y, z) = xz^2 + x^2y - 6$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = z^2 + 2xy, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = 7$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = \frac{9}{4}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$
$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}(y - 2) + 3(z - 1) = 0$$
$$7x + \frac{9}{4}y + 3z = 18$$
$$28x + 9y + 12z = 72$$

Zadatak 8.1.3. Na plohi $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 8$ nađite točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom $y = 0$.

Rješenje. Tangencijalnu ravninu određuje njezin vektor normale. Označimo ga s $\vec{n}_T$. Zadana ravnina je $y = 0$ što znači da je $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$, odnosno vektor normale te ravnine je $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Budući da tražimo točke plohe u kojima su postavljene ravnine paralelne sa zadanom ravninom, vektori normala tih dviju ravnina leže na istom pravcu, tj. kolinearni su (Matematika 1 - uvjet kolinearnosti).

Ploha je zadana implicitno pa definiramo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 8$. Označimo traženu točku s $T(x_0, y_0, z_0)$ te odredimo vektor normale tangencijalne ravnine u toj točki izražen preko koordinata točke T.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 - 2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2y_0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -2z_0$$

Vektor normale ravnine u traženoj točki je $\vec{n_T} = (2x_0 - 2,\ 2y_0,\ -2z_0)$.

Uvjet kolinearnosti je

$$\frac{2x_0 - 2}{0} = \frac{2y_0}{1} = \frac{-2z_0}{0},$$

no zbog puno nula u vektoru normale lakše nam je uvjet kolinearnosti promatrati kao

$$(2x_0 - 2,\ 2y_0,\ -2z_0) = \lambda(0, 1, 0)$$

iz čega onda slijedi da je

$$2x_0 - 2 = 0$$
$$2y_0 = \lambda$$
$$-2z_0 = 0,$$

odnosno $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\lambda}{2}$, $z_0 = 0$.

Točka $T(x_0, y_0, z_0)$ leži na plohi pa zadovoljava njezinu jednadžbu.

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0 = 8$$
$$1 + \frac{\lambda^2}{4} - 0 - 2 = 8$$
$$\lambda^2 = 36$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 6$$
$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow T(1, 3, 0)$$
$$\lambda_2 = -6 \Rightarrow y_0 = -3 \Rightarrow T(1, -3, 0)$$

Zadatak 8.1.4. (Zadatak s kolokvija)

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $x^2 - 4x + z^2 - yz = 5$ koja je paralelna s ravninom $2x - 3z = \pi$.

Rješenje. Vektor normale zadane ravnine je $\vec{n} = (2, 0, -3)$.

Odredimo vektor normale $\vec{n_T}$ tražene ravnine. Neka je $T(x_0, y_0, z_0)$ točka plohe u kojoj tražimo tangencijalnu ravninu. Definiramo funkciju $F(x, y, z) = x^2 - 4x + z^2 - yz - 5$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 - 4,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -z, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -z_0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 - y_0$$

Vektor normale je $\vec{n}_T = (2x_0 - 4,\ -z_0,\ 2z_0 - y_0)$.

Zapisujemo uvjet kolinearnosti

$$\frac{2x_0 - 4}{2} = \frac{-z_0}{0} = \frac{2z_0 - y_0}{-3}.$$

Zapisan na drugi način uvjet kolinearnosti je

$$(2x_0 - 4,\ -z_0,\ 2z_0 - y_0) = \lambda(2, 0, -3),$$

odnosno

$$2x_0 - 4 = 2\lambda$$

$$-z_0 = 0$$

$$2z_0 - y_0 = -3\lambda$$

pa je $z_0 = 0$, $y_0 = 3\lambda$, $x_0 = \lambda + 2$.

Točka $T(\lambda + 2,\ 3\lambda,\ 0)$ leži na plohi pa zadovoljava njezinu jednadžbu.

$$(\lambda + 2)^2 - 4(\lambda + 2) + 0 - 0 = 5$$

$$\lambda^2 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3$$

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow T(5, 9, 0) \Rightarrow \vec{n}_T = (6, 0, -9)$$

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow T(-1, -9, 0) \Rightarrow \vec{n}_T = (-6, 0, 9)$$

Prema tome, imamo dvije takve ravnine.

$$6(x - 5) - 9(z - 0) = 0$$

$$6x - 9z = 30$$

$$-6(x + 1) + 9(z - 0) = 0$$

$$-6x + 9z = 6$$

8.2 Linearna aproksimacija funkcija dviju varijabla

Formula za računanje linearne aproksimacije funkcije dvije varijable vrlo je slična onoj koju smo radili u kolegiju Matematika 1 za funkciju jedne varijable. Prisjetimo se, tamo se približna vrijednost funkcije u točki x računala kao:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zbog postojanja još jedne varijable ovdje imamo "dodatak" prethodno navedenoj formuli. Naime, vrijednost $f(x_0, y_0)$ potrebno je "korigirati" i u smjeru y, tj. formula glasi:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Često označavamo s $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$.

Zadatak 8.2.1. Koristeći linearnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$, približno izračunajte $f(1.95, 2.1)$.

Rješenje.

$$x = 1.95, \quad x_0 = 2 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.05$$
$$y = 2.1, \quad y_0 = 2 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = 0.1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 8y^2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = -60$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 8x^2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = -60$$
$$f(2,2) = -56$$

$$\begin{aligned} f(1.95, 2.1) &\approx f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\Delta y = \\ &= -56 + (-60)\cdot(-0.05) + (-60)\cdot 0.1 = \\ &= -59 \end{aligned}$$

Zadatak 8.2.2. Koristeći linearnu aproksimaciju, približno izračunajte $\sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}}$.

Rješenje. Definiramo funkciju $f(x,y) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{y}} = \left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$x = 5.7, \quad x_0 = 6 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.3$$
$$y = 15.8, \quad y_0 = 16 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = -0.2$$

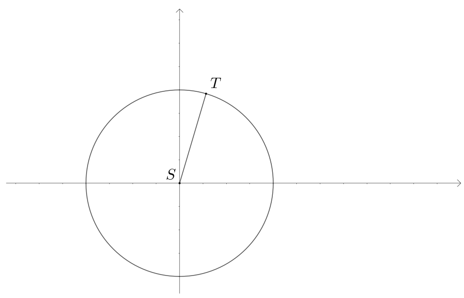
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{y}}\right)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(6,16) = \frac{1}{12}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12\cdot\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{y}}\right)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(6,16) = \frac{1}{384}$$
$$f(6,16) = 2$$

$$\begin{aligned} f(5.7, 15.8) &\approx f(6,16) + \frac{\partial f}{\partial x}(6,16)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(6,16)\Delta y = \\ &= 2 + \frac{1}{12}\cdot(-0.3) + \frac{1}{384}\cdot(-0.2) = \\ &= 2 - \frac{1}{40} - \frac{1}{1920} = \\ &= 2 - \frac{49}{1920} \end{aligned}$$

U sljedećim zadacima također se koristi linearna aproksimacija, ali sami moramo zaključiti pomoću koje funkcije dobivamo traženu aproksimaciju.

Zadatak 8.2.3. Približno izračunajte polumjer kružnice sa središtem u ishodištu koja prolazi točkom $T(6.9, 24.2)$.

Rješenje. Polumjer je jednak udaljenosti središta S i točke T.



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} \\ &= \sqrt{(6.9-0)^2 + (24.2-0)^2} = \\ &= \sqrt{6.9^2 + 24.2^2} \end{aligned}$$

Definiramo funkciju f s $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

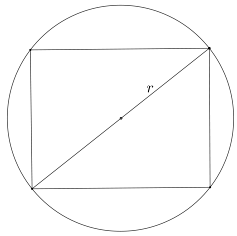
$$x = 6.9, \quad x_0 = 7 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.1$$
$$y = 24.2, \quad y_0 = 24 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = 0.2$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(7,24) = \frac{7}{25} \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(7,24) = \frac{24}{25} \\ &f(7,24) = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6.9^2+24.2^2} &\approx f(7,24) + \frac{\partial f}{\partial x}(7,24)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(7,24)\Delta y = \\ &= 25 + \frac{7}{25}\cdot(-0.1) + \frac{24}{25}\cdot 0.2 = \\ &= 25 + \frac{41}{250} \end{aligned}$$

Zadatak 8.2.4. Približno izračunajte polumjer kružnice opisane pravokutniku sa stranicama $a = 6.2$, $b = 7.8$.

Rješenje. Polumjer je udaljenost od sjecišta dijagonala pravokutnika do jednog od vrhova pa je potrebno procijeniti $r = \sqrt{\left(\frac{6.2}{2}\right)^2 + \left(\frac{7.8}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6.2^2}{4} + \frac{7.8^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6.2^2 + 7.8^2}$.



Funkciju f definiramo kao $f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$x = 6.2, \quad x_0 = 6 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 0.2$$

$$y = 7.8, \quad y_0 = 7 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = -0.2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(6, 8) = \frac{3}{10}\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(6, 8) = \frac{4}{10}\\
&f(6, 8) = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{6.2^2 + 7.8^2} &\approx f(6, 8) + \frac{\partial f}{\partial x}(6, 8)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(6, 8)\Delta y = \\
&= 5 + \frac{3}{10} \cdot 0.2 + \frac{4}{10} \cdot (-0.2) = \\
&= 5 - \frac{1}{50}
\end{aligned}$$

Napomena 8.2.5. Zadaci s linearnom aproksimacijom mogu se zadati i kada je funkcija zadana implicitno. Tada se parcijalne derivacije of f računaju kao što smo to radili u poglavlju 7. Postupak linearne aproksimacije ide identično.

8.3 Diferencijal

Formula za diferencijal funkcije $f(x, y)$, u oznaci $df(x, y)$, je

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

Zadatak 8.3.1. Odredite diferencijal sljedećih funkcija:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$, b) $f(x, y) = x^2 \cos(xy)$.

Rješenje.

a) Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 8y^2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 8x^2y$$

Diferencijal je

$$df(x, y) = \big(2x - 8y^2x\big)\ dx + \big(2y - 8x^2y\big)\ dy.$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x\cos(xy) + x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot y = \\ &= 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot x = -x^3\sin(xy) \end{aligned}$$

Diferencijal je

$$df(x, y) = \big(2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)\big)\ dx - x^3\sin(xy)\, dy.$$