Poglavlje 9

Lokalni ekstremi

Kod funkcija jedne varijable kandidate za lokalne ekstreme dobili smo kao nultočke prve derivacije funkcije te smo potom dobivene nultočke uvrštavali u drugu derivaciju funkcije. Uz pomoć određenog kriterija zaključili smo radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu. Kod funkcija dvije varijable postupak je sličan samo su objekti kojima baratamo poopćeni.

Točku/točke koje dobijemo izjednačavanjem prvih parcijalnih derivacija s nulom nazivamo stacionarne ili kritične točke. Nadalje, definiramo Hesseovu matricu u stacionarnoj točki (x_0, y_0) s

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Na seminarima ju kraće označavamo s

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

pri čemu je $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Njezinu determinatu označavamo s $\Delta = AC - B^2$.

Kao dovoljan uvjet za lokalne ekstreme navodimo sljedeći kriterij.

1.) Ako je $\Delta > 0$

   a) i $A > 0$, onda je u točki (x_0, y_0) lokalni minimum.

   b) i $A < 0$, onda je u točki (x_0, y_0) lokalni maksimum.

2.) Ako je $\Delta < 0$, onda je točka (x_0, y_0) sedlasta točka.

3.) Ako je $\Delta = 0$, onda ništa ne možemo reći o točki (x_0, y_0).

Nadalje, nužnim uvjetom nazivamo činjenicu da ako je neka točka (x_0, y_0) lokalni ekstrem, onda je ona nultočka prvih derivacija funkcije f, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Zadatak 9.0.1. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje. Najprije odredimo prve parcijalne derivacije od f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4y - 4x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x - 4y^3.$$

Zatim odredimo stacionarne točke.

$$4y - 4x^3 = 0$$
$$4x - 4y^3 = 0$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je $y = x^3$. Uvrstimo li y u drugu jednadžbu, imamo

$$4x - 4x^9 = 0$$
$$4x(1 - x^8) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{ili} \quad x^8 = 1 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Prema tome, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ i $y_3 = -1$. Stacionarne točke su $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(-1, -1)$.
Za kriterij potrebne su nam druge parcijalne derivacije.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -12y^2$$

Analiziramo jednu po jednu stacionarnu točku.
Za $(0, 0)$ dobivamo $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 \cdot 0^2 = 0$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 4$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -12 \cdot 0^2 = 0$ te $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$ pa je $(0, 0)$ sedlasta točka.
Analognim uvrštavanjem za $(1, 1)$ ispada $A = -12$, $B = 4$, $C = -12$ te $\Delta = 128$. Budući da je $\Delta > 0$ i $A < 0$, u točki $(1, 1)$ je lokalni maksimum.
Za $(-1, -1)$ imamo $A = -12$, $B = 4$ i $C = -12$ te $\Delta = 128$. Kako je $\Delta > 0$ i $A < 0$, u točki $(-1, -1)$ je lokalni maksimum.

Zadatak 9.0.2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y - e^y$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - e^y$$

Iz sustava

$$2x = 0$$
$$1 - e^y = 0$$

slijedi da je $x = 0$ i $y = 0$ pa je $(0, 0)$ stacionarna točka.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^y$$

Za $(0, 0)$ dobivamo da je $A = 2$, $B = 0$, $C = -1$ te $\Delta = -2 < 0$ pa se radi o sedlastoj točki te funkcija nema lokalnih ekstrema.

Zadatak 9.0.3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Rješenje. Parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

Stacionarne točke dobivamo iz

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3y^2 - 3 = 0$$

te je $x_{1,2} = \pm 1$ i $y_{1,2} = \pm 1$. Prema tome, imamo četiri stacionarne točke: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$.

Druge parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

Za $(1, 1)$ je $A = 6$, $B = 0$, $C = 6$ te $\Delta = 36 > 0$. Kako je i $A > 0$, radi se o lokalnom minimumu.

Za $(1, -1)$ je $A = 6$, $B = 0$, $C = -6$ te $\Delta = -36 < 0$ pa je $(1, -1)$ sedlasta točka.

Za $(-1, 1)$ je $A = -6$, $B = 0$, $C = 6$ te $\Delta = -36 < 0$ pa je $(-1, 1)$ sedlasta točka.

Za $(-1, -1)$ je $A = -6$, $B = 0$, $C = -6$ te $\Delta = 36 > 0$. Kako je $A < 0$, radi se o lokalnom maksimumu.

Zadatak 9.0.4. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = y \sin x$.

Rješenje. Parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x.$$

Iz sustava

$$\begin{aligned} y\cos x &= 0 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}$$

slijedi da je $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} y\cos(k\pi) &= 0 \\ y\cdot(-1)^k &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

pa su stacionarne točke oblika $(k\pi,\, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ (ima ih beskonačno mnogo).

Druge parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

pa dobivamo da je $A = -0\cdot\sin(k\pi) = 0$, $B = \cos(k\pi) = (-1)^k$, $C = 0$ te $\Delta = -(-1)^{2k} = -1$ jer je $2k$ paran broj za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Sve stacionarne točke su sedlaste točke, lokalnih ekstrema nema.

Zadatak 9.0.5. Odredite lokalne ekstreme implicitno zadane funkcije $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$, $z = f(x,y)$.

Rješenje. Definiramo funkciju $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$. Parcijalne derivacije od F su

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x + z, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x + 2z.$$

Parcijalne derivacije od f dobivamo po formulama iz Poglavlja 7 kao

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2x - z}{x + 2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-4y}{x + 2z}.$$

Stacionarne točke dobivamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} \frac{-2x - z}{x + 2z} &= 0 \Rightarrow z = -2x, \\ \frac{-4y}{x + 2z} &= 0 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Dakle, one su oblika $(x, 0, -2x)$, no kako leže na plohi zadovoljavaju njezinu jednadžbu pa imamo

$$\begin{aligned}x^2 + 2\cdot 0^2 + x\cdot(-2x) + (-2x)^2 &= 3\\ x^2 - 2x^2 + 4x^2 &= 3\\ 3x^2 &= 3\\ x_{1,2} &= \pm 1,\end{aligned}$$

iz čega slijedi da su stacionarne točke $(1, 0, -2)$ i $(-1, 0, 2)$.

Druge parcijalne derivacije dobivamo iz prvih parcijalnih po pravilu deriviranja kvocijenta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{(-2-z_x)(x+2z)-(-2x-z)(1+2z_x)}{(x+2z)^2},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{0(x+2z)-(-4y)(1+2z_x)}{(x+2z)^2} = \frac{4y(1+2z_x)}{(x+2z)^2},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{-4(x+2z)-(-4y)\cdot 2z_y}{(x+2z)^2}.\end{aligned}$$

Budući da za stacionarne točke vrijedi da one uvrštene u prve parcijalne derivacije daju 0, imamo da je $z_x(1,0) = z_y(1,0) = 0$ i $z_x(-1,0) = z_y(-1,0) = 0$.

Za točku $(1, 0, -2)$ dobivamo

$$\begin{aligned}A &= \frac{(-2-0)(1-4)-(-2+2)(1+2\cdot 0)}{(1+2\cdot(-2))^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},\\ B &= \frac{4\cdot 0\cdot(1+2\cdot 0)}{(1+2\cdot(-2))^2} = 0,\\ C &= \frac{-4\cdot(1+2\cdot(-2))+4\cdot 0\cdot 2\cdot 0}{(1+2\cdot(-2))^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3},\\ \Delta &= \frac{8}{9} > 0.\end{aligned}$$

Kako je $A > 0$, točka $(1, 0, -2)$ je lokalni minimum.

Na isti se način uvrštavanjem za točku $(-1, 0, 2)$ dobiva $A = -\frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = -\frac{4}{3}$ te $\Delta = \frac{8}{9}$ što uz negativni A dovodi do zaključka da je točka $(-1, 0, 2)$ točka lokalnog maksimuma.

Zadatak 9.0.6. (Zadatak s kolokvija)

Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{xy-3x}$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy-3x}(y-3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy-3x}x$$

Sustav za određivanje stacionarnih točki je

$$e^{xy-3x}(y-3)=0,$$
$$e^{xy-3x}x=0.$$

Kako je eksponencijalna funkcija strogo pozitivna za svaki x i y, odmah dobivamo da je $x=0$ i $y=3$. Druge parcijalne derivacije su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^{xy-3x}(y-3)^2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= e^{xy-3x}(y-3)x+e^{xy-3x}=e^{xy-3x}(yx-3x+1),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= e^{xy-3x}x^2
\end{aligned}$$

pa dobivamo da je $A=0$, $B=1$, $C=0$ te $\Delta=-1$ te zaključujemo da je u $(0,3)$ sedlasta točka (funkcija nema lokalnih ekstrema).