1. Zadane su točke (mjerenja veličina x i y)

x_i	-1	0	2	3
y_i	2	4	4	2

(i) Ucrtajte točke u koordinatni sustav

(ii) Predočite grafički linearnu interpolaciju funkcijske veze između x i y.

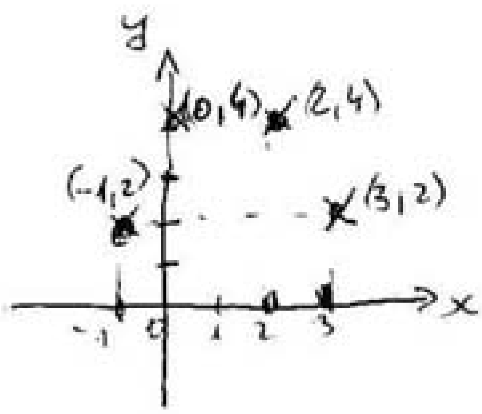
(iii) Koristeći (ii) grafički procijenite vrijednost veličine y za $x = 2.4$

(iv) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju na intervalu $[2,3]$.

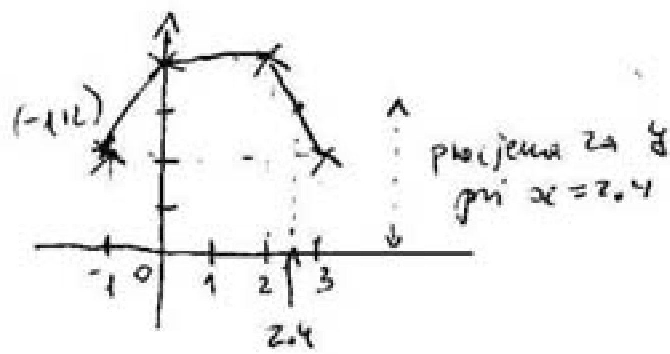
(v) Koristeći (iv) procijenite vrijednost veličine y za $x = 2.4$

Rješenje

(i)



(ii) i (iii)



(iv) Pomoću formule $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ dobijemo

$$y - 4 = \frac{2-4}{3-2}(x-2) \text{ j}$$

Tu je bilo
$(x_1, y_1) = (2, 4)$ i
$(x_2, y_2) = (3, 2)$

$$y = -2x - 8$$

(V) U formulu $y = -2x + 8$ uvrstimo $x = 2.4$

Dobijemo

$$y = -2 \cdot 2.4 + 8$$
$$= 3.2$$

Zato je za $x = 2.4$ procjena $y \approx 3.2$

2. Zadane su točke kao u 1.

(i) Odprilike predočite polinomsku interpolaciju podataka.

(ii) Koji je općenito stupanj polinoma kojemu graf prolazi kroz 4 zadane točke?

(iii) Interpolacijski polinom za ove točke je

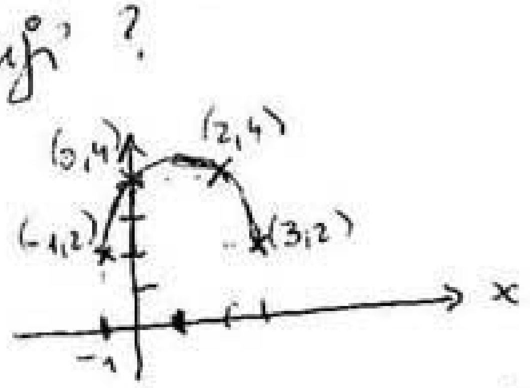
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 4.$$

Iskoristite tu činjenicu da procjenite vrijednost veličine y za $x = 2.4$.

(iv) Koristeći se polinomom f iz (iii) procjenite vrijednost veličine y za $x = 4$.

(v) U kojem od ovih slučajeva je bila riječ o interpolaciji, a u kojem o ekstrapolaciji?

Rješenje (i)



(ii) Općenito, taj polinom stupnja 3 ; iznimno stupanj može biti i niži.

3. Zadane su točke kao u 1. zadatku

(i) Opišite interpolaciju tih podataka kubnim spline-om.

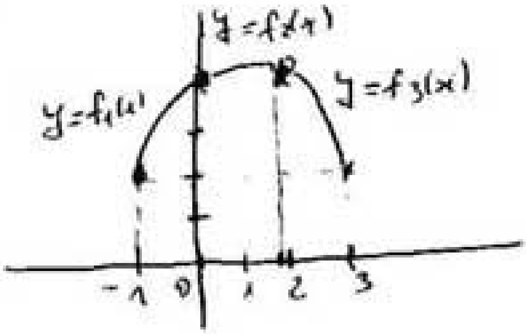
(ii) Objasnite značenje uvjeta kubnog spline-a.

(iii) Kubni spline za ove točke na intervalu $[2,3]$ je $f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 2$.

Koristeći se tom činjenicom procijenite veličinu y pri $x = 2.4$.

Rješenje:

(i)



Na intervalu $[-1,0]$ interpoliramo kubnim polinomom $f_1(x)$, na intervalu $[0,2]$ kubnim polinomom $f_2(x)$ i na intervalu $[2,3]$ kubnim polinomom $f_3(x)$.

Vrijedi: $f_1(-1) = 2$

(I) $f_1(0) = f_2(0) = 4$

$f_2(2) = f_3(2) = 4$

$f_3(3) = 2$

II $f_1'(0) = f_2'(0)$

$f_2'(2) = f_3'(2)$

III $f_1''(0) = f_2''(0)$

$f_2''(2) = f_3''(2)$

(IV) Još dva uvjeta po volji

(ii) Uvjeti (I) znače da kubni spline prolazi zadanim točkama.

Uvjeti (II) znače da postoji brzina promjene i u čvorovima (za $x=0$ i $x=2$), tj. da postoji tangenta na graf kubnog spline-a i u čvornim točkama.

Uvjeti (III) znače da postoji akceleracija i u čvornim točkama.

Uvjeti (IV) omogućuju da spline bude jednoznačno određen. Ako nema dodatnih informacija smatramo da su to uvjeti

$f_1''(-1)=0$ i $f_3''(3)=0$

4. (i) Predočite geometrijski jednadžbu $f(x)=0$ i njezino rješenje x^*.

(ii) Predočite neku aproksimaciju rješenja x^* jednadžbe $f(x)=0$ i aproksimaciju x_1 dobivenu metodom tangente.

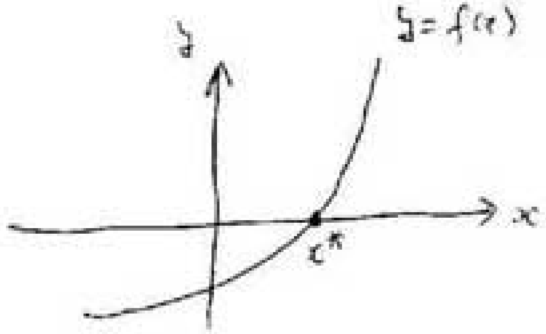
(iii) Zapišite formulu za x_1 iz (ii).
Zapišite formulu za x_{n+1} pomoću x_n (za metodu tangente)

(iv) Primijenite sve ovo za približno određivanje broja $\sqrt[3]{2}$ (uzmite $x_0=2$ i izračunajte x_1 i x_2.

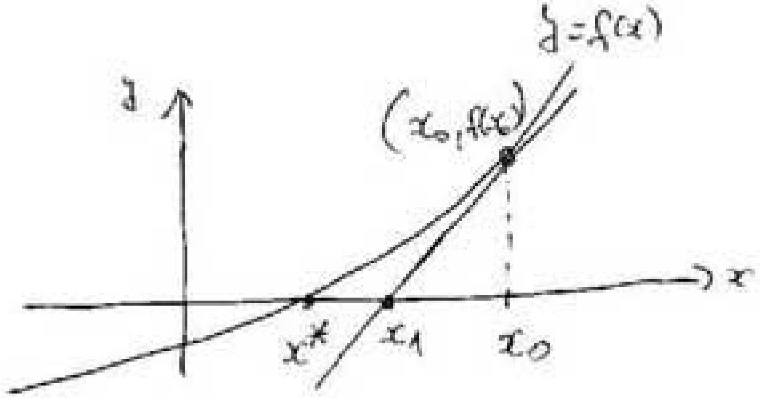
(v) Usporedite s vrijednošću $\sqrt[3]{2}$ dobivenom pomoću kalkulatora.

Rješenje.

(i)

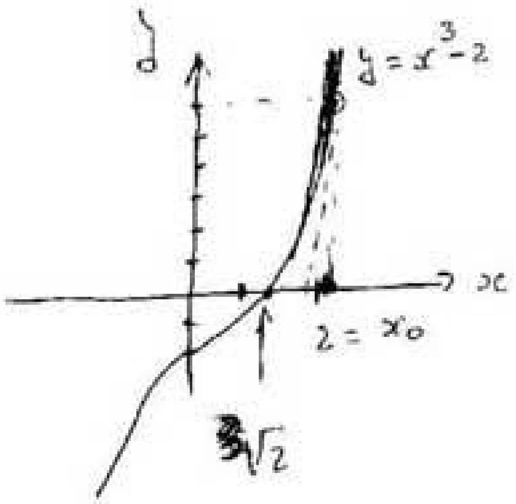


(ii)



(iii) $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(iv)



$$f(x) = x^3 - 2$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$x_0 = 2$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^3-2}{3 \cdot 2^2} = 1.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5 - \frac{1.5^3-2}{3 \cdot 1.5^2} = 1.296 \quad \text{(na 3 decimale)}$$

Pomoću kalkulatora: $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$

Vidimo da bi dobro bilo izračunati barem još jednu aproksimaciju.

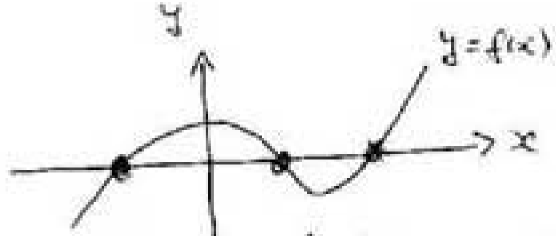
5. (i) Predočite grafički neku jednadžbu $f(x)=0$ koja ima 3 rješenja

(ii) Što je interval izolacije rješenja?

(iii) Predočite intervale izolacije za jednadžbu $f(x)=0$ iz (i).

(iv) Provedite sve za jednadžbu $x^3-3x^2+1=0$

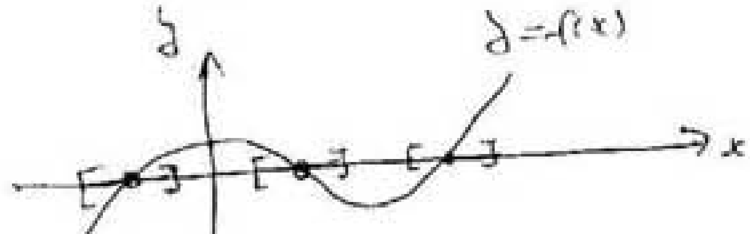
Rješenje: (i)



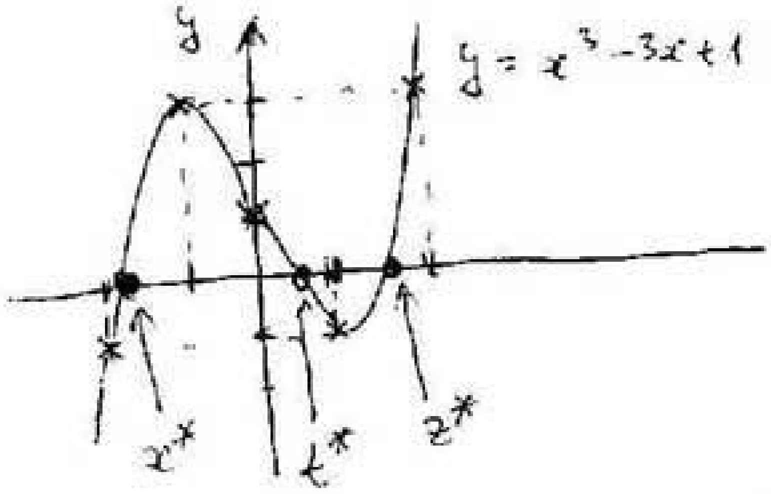
Rješenja su točke u kojima graf funkcije f siječe x-os (točnije to su prve koordinate tih točaka).

(ii) Interval izolacije rješenja x^* jednadžbe $f(x)=0$ jest svaki interval $[a,b]$ unutar kojeg se nalazi x^* tj. $a<x^*<b$ i unutar kojeg se ne nalazi ni jedno drugo rješenje te jednadžbe.

(iii)



(ii) Tu je $f(x) := x^3 - 3x + 1$



x	$f(x)$
-2	-1
-1	3
0	1
1	-1
2	3

$\leftarrow x^*$
$\leftarrow t^*$
$\leftarrow z^*$

Rješenja su x^*, t^* i z^*.

Intervali izolirantosti su, na primjer

$[-2, -1]$ za x^*

$[0, 1]$ za t^*

$[1.5, 2]$ za z^*.

Za ovaj treći interval treba vidjeti da je $f(1.5) < 0$.

$f(1.5) = 1.5^3 - 3 \cdot 1.5 + 1 = -0.125 < 0$.

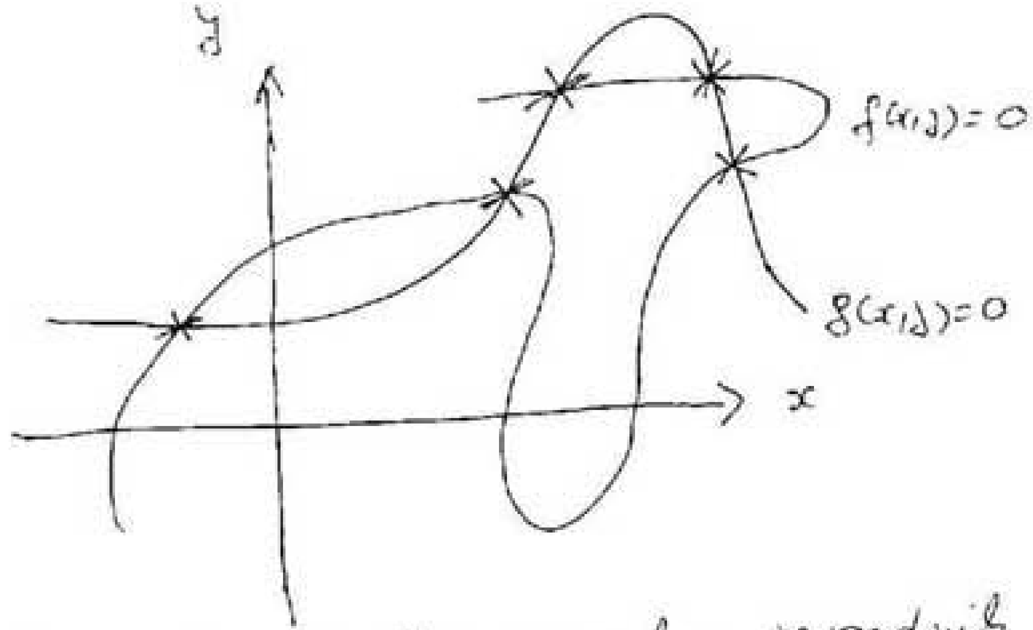
6. (i) Predočite geometrijski rješenja sustava $f(x,y)=0$ i $g(x,y)=0$.

(ii) Što je područje izoliranosti rješenja (x^*,y^*) sustava iz (i)?

(iii) Predočite geometrijski sustav $x^2+y^2=25$ i $3x+4y=12$.

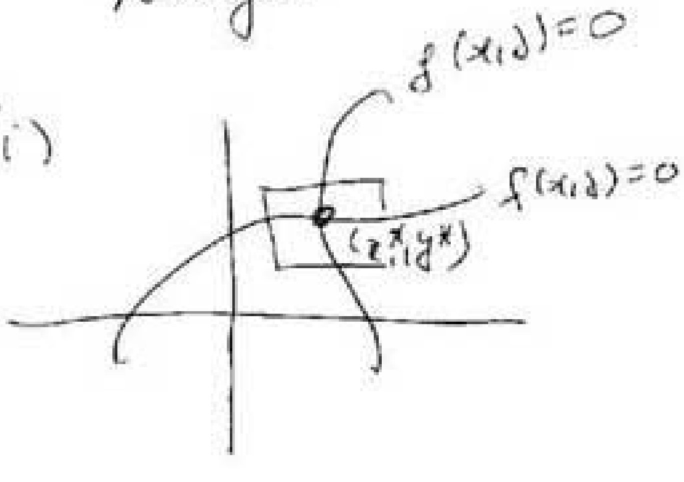
Rješenje.

(i)



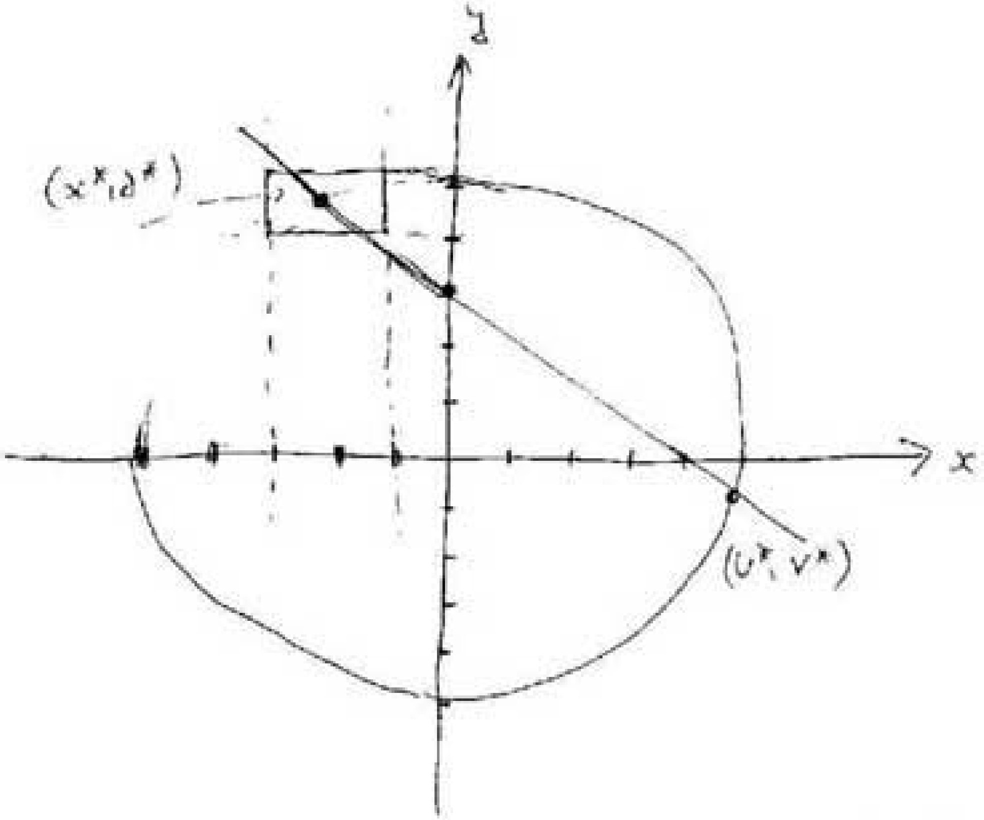
Rješenja su točke presjeka pripadnih krivulja.

(ii)



Područje izoliranosti je dio ravnine unutar kojeg se nalazi (x^*,y^*) i nijedno drugo rješenje sustava. To je obično pravokutnik.

(iii)



Tu je $f(x,y) := x^2+y^2-25$; graf je kružnica

$g(x,y) := 3x+4y-12$; graf je pravac

U presjeku su dvije točke pa sustav ima dva rješenja : (x^*, y^*) i (u^*, v^*).

Područje izolacije je, na primjer, pravokutnik zadan nejednadžbama :

$-3 \le x \le -1$

$4 \le y \le 5$.

7. Diferencijalnu jednadžbu $y' = y$, $y(0) = 1$ na segmentu $[0, 0.1]$ s korakom $h = 0.1$

približno riješite: (a) Eulerovom metodom;

(b) metodom Runge-Kutta (RK-4);

(c) te ocijenite koja je metoda točnija u točki $x_1 = 0.1$ (izračunavši pravu grešku)

Rješ: (a) $\boxed{\text{Euler: } y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1}$

$y' = f(x, y)$

Kod nas $f(x,y) = y$ $\quad n = 1 \quad h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot f(0,1) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$$

(b) Runge-Kutta

$$K_1^{(0)} = 0.1 \cdot f(0,1) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = 0.1 \cdot f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot 1.05 = 0.105$$

$$K_3^{(0)} = 0.1 \cdot f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.105}{2}\right) = 0.1 \cdot 1.0525 = 0.10525$$

$$K_4^{(0)} = 0.1 \cdot f(0 + 0.1, 1 + 0.10525) = 0.1 \cdot 1.10525 = 0.110525$$

$$\Rightarrow \Delta y_0 = 0.105170833$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \Delta y_0 \doteq 1.105170833$$

(c) stvarno rješenje dif. jedn. $y' = y$, $y(0) = 1$ je očito $y = e^x$, pa će $y(0.1) = e^{0.1} \doteq$

$\doteq 1.105170918$

Stoga je Runge-Kutta točnija u točki $x_1 = 0.1$.