

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

NUM. I STAT. METODE, OSNOVE STAT. OKOLIŠA I NUM. METODE -
STUDIJI EI+KI

Ogledni Prvi Kolokvij

2014/2015.

TEORETSKI DIO

Ime i prezime:

Smjer:

Matični broj:

Napomena: Ispit traje 60 minuta. Zabranjena je uporaba mobilnih uređaja tijekom ispita.

1	2	3	4	5	ukupno

1. (i) Za skup podataka $x_1, x_2, \dots, x_n$ napišite formule za aritmetičku sredinu, varijancu i standardnu devijaciju. (4 boda)

aritmetička sredina: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

varijanca: $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

standardna devijacija: $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

- (ii) Podatke 4, 2, 4, 5, 2, 5, 1, 4 poredajte prema veličini i predložite tablično s frekvencijama. (3 boda) (2 boda)

Podatci prema veličini: Podatci tablično

1, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5

x_i	1	2	4	5
f_i	1	2	3	2

$$\sum f_i = n = 8$$

- (iii) Izračunajte na dva decimalna mjesta aritmetičku sredinu, varijancu i standardnu devijaciju podataka iz (ii). (4 boda)

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{8} = \frac{27}{8} = 3.375$$

$$\bar{x} = 3.38 \quad (\text{na dva decimalna mjesta})$$

$$s^2 = \frac{(1 - 3.375)^2 \cdot 1 + (2 - 3.375)^2 \cdot 2 + (4 - 3.375)^2 \cdot 3 + (5 - 3.375)^2 \cdot 2}{8}$$

$$= 1.984375$$

$$s^2 = 1.98 \quad (\text{na dva decimalna mjesta})$$

$$s = \sqrt{1.984375} = 1.41 \quad (\text{na dva decimalna mjesta})$$

2. (i) Navedite formule za očekivanje i varijancu kontinuirane slučajne varijable i objasnite oznake. (2 boda)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad ; \quad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

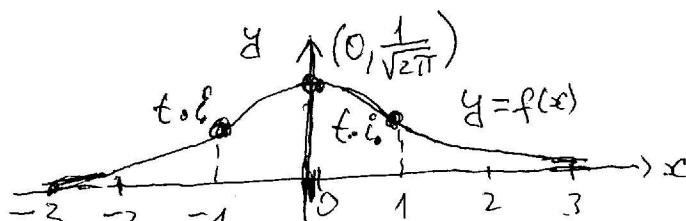
X - kontinuirana slučajna varijable; x - realna varijable; $f(x)$ - funkcija gustoće od X ;

$E(X)$ - očekivanje od X ; $V(X)$ - varijanca od X .

- (ii) Predočite i zapišite funkcije gustoće jedinične normalne razdiobe i normalne razdiobe s parametrima μ i σ^2 i objasnite značenje parametara. Formulirajte i predočite pravilo tri sigme (dviije sigme, jedna sigma). (5 bodova)

$X \sim N(0, 1^2)$ jedinična normalna razdioba.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funkcija gustoće vjer. od X .



$$E(X) = 0, \quad V(X) = 1$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normalna razdioba s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i σ^2 ; $\sigma > 0$.

funkcija gustoće vjer. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2.$$

Pravilo 3 σ :

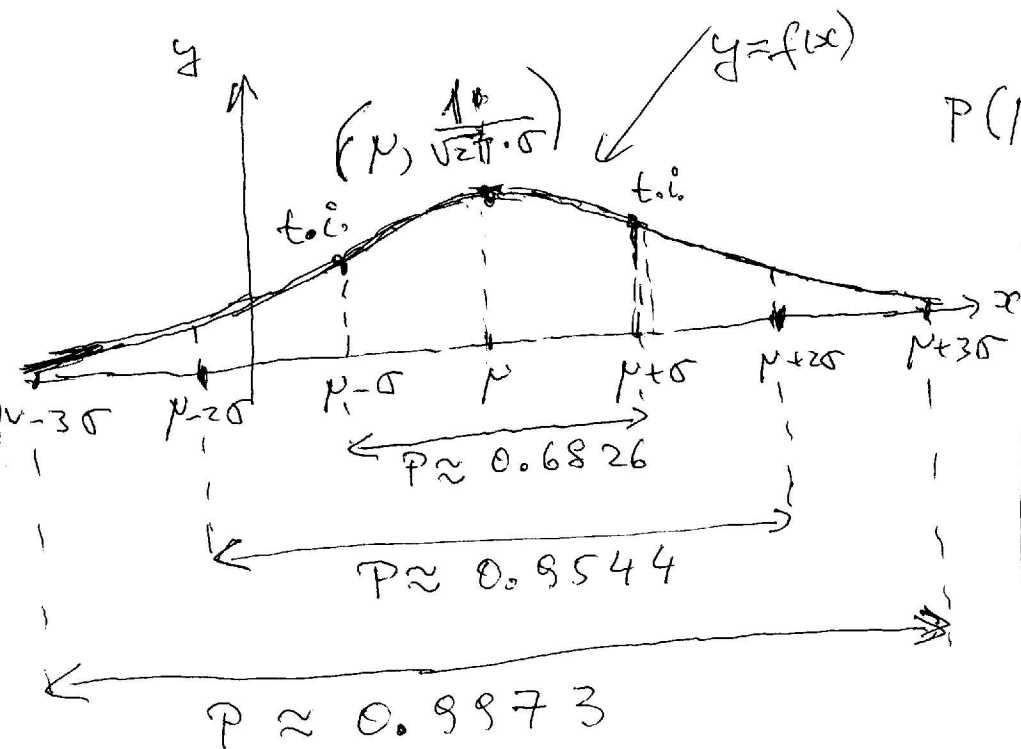
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Pravilo 2 σ

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$$

Pravilo 1 σ

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6826$$

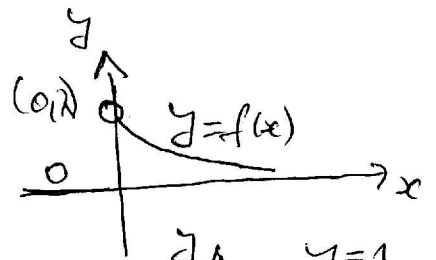


- (iii) Predočite i zapišite funkciju gustoće i funkciju distribucije eksponencijalne razdiobe i objasnite značenje parametra. (3 boda)

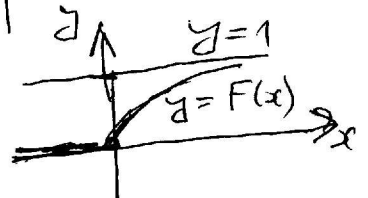
$X \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$, eksponencijalna razdioba s parametrom λ .

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

funkcija gustoće: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$



funkcija distribucije: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}; & x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$



3. (i) Navedite formule za očekivanje i varijancu diskretne slučajne varijable i objasnite oznake. (3 boda)

X - konačna slučajna varijable zadane tablicom:

$$P(X=x_i) = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} ; \sum_{i=1}^n p_i = 1 ; p_i \geq 0$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i ; \quad V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

X - beskonačna diskretna slučajna varijable zadane tablicom:

$$P(X=x_i) = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ; \quad V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

X - slučajna varijable; x_i - vrijednosti koje X može poprimiti; p_i - vjerojatnost da slučajna varijable poprimiti rezultat x_i ; $E(X)$ - očekivanje od X ; $V(X)$ - varijanca od X .

- (ii) Opišite Poissonovu razdiobu i tipične primjere u kojima se pojavljuje. (2 boda)

$X \sim P(a)$; $a > 0$, Poissonova razdioba
s parametrom a . To je diskretna
razdioba sa ~~infinitezim~~ skupom vrijednosti
 $R(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$ i vjerojatnostima
 $P(X=i) = e^{-a} \cdot \frac{a^i}{i!}$; $i=0, 1, 2, \dots$; $E(X) = V(X) = a$
 X registira broj nesudjelujućih čestica u fiksnom
vremenskom intervalu.

- (iii) Opišite binomnu razdiobu i tipični primjer u kojemu se pojavljuje.
(5 bodova)

$X \sim B(n, p)$, binomna razdioba s parametrima
 n (prirodni broj) i p (realni broj između 0 i 1).
To je diskretna razdioba s vrijednostima
 $R(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ i vjerojatnostima
 $P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
 $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Vrijedi $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$.

Tipična okolnost pojavljivanja. U pokusu učimo
događaj A koji ima vjerojatnost p . Pokus
ponovljemo nezavisno n puta. Slučajne
varijable X registira koliko se puta
događaj A dogodio. Tada X ima binomnu razdiobu
s parametrima n i p tj. $X \sim B(n, p)$.

4. (i) Kako procjenjujemo nepoznato očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable na osnovi n slučajnih vrijednosti? (3 boda)

X slučajna varijabla, $x_1, x_2, \dots, x_n$ slučajne vrijednosti od X .

$E(X)$ procjenjujemo aritmetičkom sredinom $\bar{x}$ tih vrijednosti.

$V(X)$ procjenjujemo konfigurnom varijansom

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

tih vrijednosti.

Standardnu devijaciju od X procjenjujemo konfigurnom standardnom devijacijom $s = \sqrt{s^2}$ tih vrijednosti.

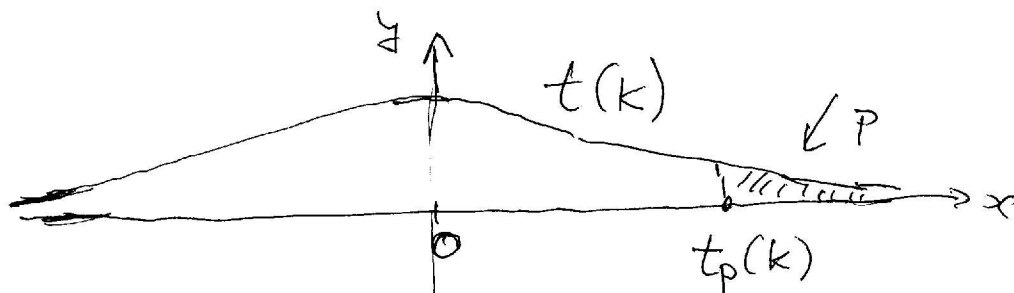
- (ii) Što je interval pouzdanosti za očekivanje i kako ga određujemo? (3 boda)

$X \sim W(\mu, \sigma^2)$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ n slučajnih vrijednosti od X .

Interval pouzdanosti za μ je simetrični interval oko $\bar{x}$ u kojemu se s određenom vjerojatnošću nalazi μ . Interval za vjerojatnost $\geq 1 - \alpha$ je

$$\left\langle \bar{x} - t_p(k) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_p(k) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle \text{ gdje je } k = n-1,$$

s konfigurna standardna devijacija slučajnih vrijednosti, $t(k)$ studentova t -razdioba s k stupnjeva slobode, a broj $t_p(k)$ se vidi iz slike:



$$P(t(k) \geq t_p(k)) = P$$

interval pouzdanosti za μ



- (iii) Napišite formulu za t_{exp} i za broj stupnjeva slobode, te predložite područja prihvatanja hipoteze $\mu = \mu_0$ uz razne alternativne hipoteze.
(5 bodova) (4 bode)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, gdje su μ, σ^2 nepoznati; $x_1, x_2, \dots, x_n$ su slučajnih vrijednosti od X . Testiramo hipotezu $H_0: \mu = \mu_0$ gdje je μ_0 određena vrijednost. α - razina značajnosti (vjerojatnost pogreške prve vrste, tj. vjerojatnost da H_0 prihvatimo iako je istinita)

$t_{exp} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, gdje je $\frac{s}{\sqrt{n}}$ korigirane standardne devijacije slučajnih vrijednosti.

$t(k)$ studentova razdioba s $k = n - 1$ stupnjeva slobode

(I) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

dvostrani t-test.

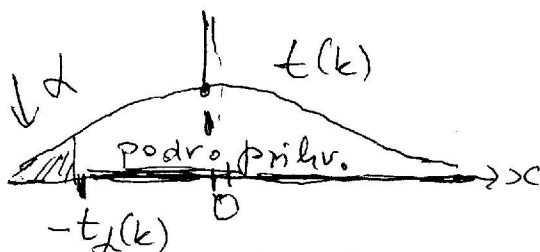
Područje odbacivanja hipoteze H_0 .

H_0 prihvaćamo ako je $|t_{exp}| < t_{\frac{\alpha}{2}}(k)$, inače odbacujemo i prihvaćamo alternativnu hipotezu $H_a: \mu \neq \mu_0$.

(II) $H_0: \mu = \mu_0$
 $H_a: \mu < \mu_0$

Jednostrani t-test

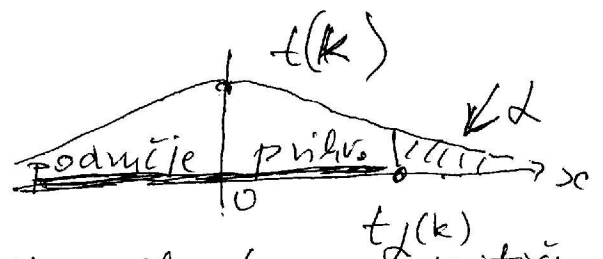
(III) $H_0: \mu = \mu_0$
 $H_a: \mu > \mu_0$



kritična vrijednost

H_0 prihvaćamo ako je

$t_{exp} > -t_{\alpha}(k)$, inače odbacujemo

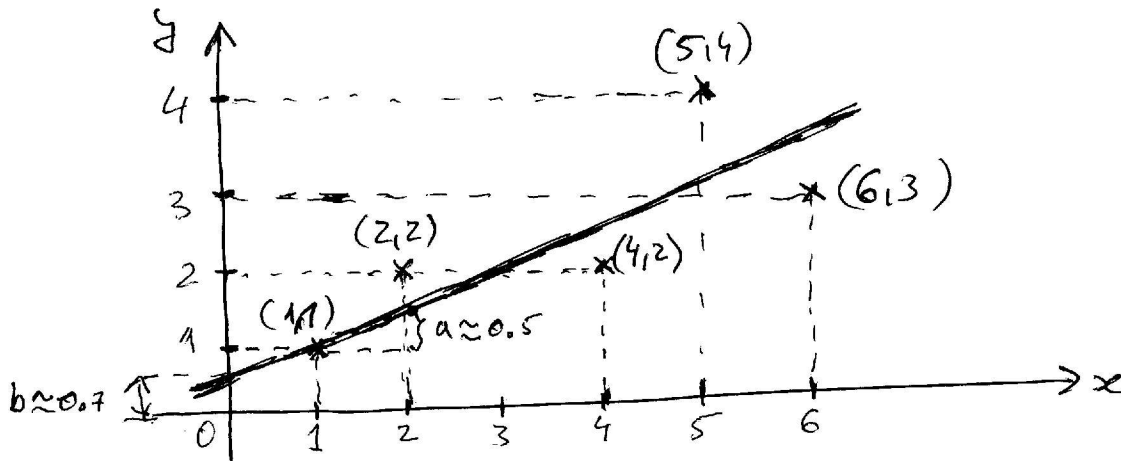


H_0 prihvaćamo

ako je $t_{exp} < t_{\alpha}(k)$

inače odbacujemo

- (i)
5. Precizno predložite podatke x_i | 1 2 4 5 6 . Približno predložite
 y_i | 1 2 2 4 3 . regresijski pravac. (2 boda)



- (ii) Procijenite parametre pri linearnoj vezi. (2 boda)

$b \approx 0.7$ (vidi zliku u (i)) $y \approx 0.5x + 0.7$
 $a \approx 0.5$

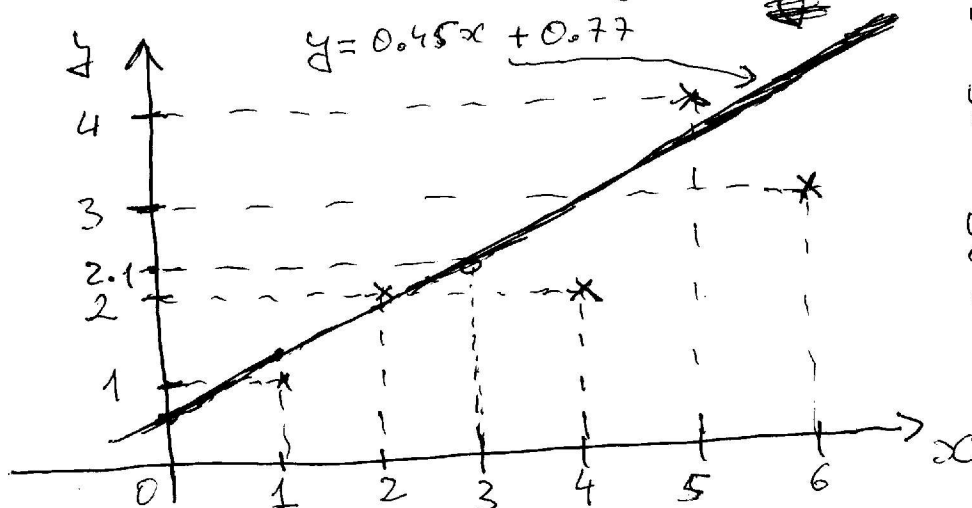
- (iii) Objasnite pojam koeficijenta korelacije i izračunajte ga na dvije decimale u ovom primjeru. (2 boda)

Koef. kor. r je mjera linearnе zavisnosti između dviju veličina x_i, y_i ; $-1 \leq r \leq 1$, $r \approx 1$ visoka linearna poz. korelacija, $r \approx -1$ visoka negativna korelacija, $r \approx 0$ niska korelacija. $r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$
 $r = 0.82$ (na dvije decimale)

- (iv) Odredite jednadžbu regresijskog pravca točno na 2 decimale. Procijenite vrijednost veličine y za $x = 3$ pomoću linearne veze (točno na jednu decimalu). Procjenu objasnite i na regresijskom pravcu. (5 bodova) (4 boda)

$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = 0.45 \approx 0.5$ (na jednu decimalu)

$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = 0.77 \approx 0.8$ (na jednu decimalu)
 ~~$y = 0.5x + 0.8$~~



$y = 0.45x + 0.77$

$y(3) \approx 0.45 \cdot 3 + 0.77$
 $= 2.12$

$y(3) = 2.1$
na jednu decimalu