# LEKCIJE IZ OSNOVA STATISTIKE I TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ivica Gusić

# Uvod u matematičku statistiku

## **Pojam matematičke statistike**.

Pojednostavljeno rečeno, matematička statistika je znanstvena disciplina koja iz poznavanja određenih svojstava **uzorka** donosi zaključke o svojstvima **populacije**.
**Populacija** je skup svih entiteta koje razmatramo. Na primjer:

(1) ako nas zanimaju izbori, populaciju čine svi glasači (ili svi glasači koji su izašli na izbore, odnosno svi glasački listići),
(2) ako nas zanima duljina studiranja, populaciju čine svi studenti nekog sveučilišta,
(3) ako nas zanimaju svojstva nekog proizvoda proizvedenog određenom tehnološkom metodom, populaciju čine svi proizvodi tako proizvedeni,
(4) ako nas zanima postotak vodika u Svemiru, populaciju čini skup svih atoma itd.

Općenito, zanima nas neko **statistističko obilježje** populacije, na primjer visina, masa, politički stav itd..
Često smo u nemogućnosti razmatrati cijelu populaciju (na primjer ako je čine svi atomi), ili je to vrlo skupo (na primjer ako je čine svi proizvodi u nekom velikom pogonu), ili zbog vremenskog ograničenja (na primjer ako želimo odmah po zatvaranju birališta procijeniti rezultate izbora), ili je to besmisleno (na primjer ako nas zanima vijek trajanja žarulja koje je neka tvornica uputila na tržište) itd. U tim smo uvjetima prisiljeni procjenjivati svojstva populacije na osnovi svojstva nekoliko članova te populacije.

**Uzorak** je neki slučajno odabran podskup populacije, na primjer:
(1) 2% slučajno odabranih glasačkih listića,
(2) 300 slučajno odabranih studenata,
(3) 15 slučajno odabranih proizvoda itd.

Postavlja se pitanje koliko je opravdano na osnovi nekoliko primjera zaključivati o cijeloj populaciji i koliko možemo vjerovati takvom zaključku, koje je često podložno subjektivnim stavovima, pojedinačnim interesima i sl. Jedan od zadataka matematičke statistike jest izgradnja metoda kojim će se ovakvi problemi moći rješavati egzaktno. Mogu se izdvojiti tri glavna koraka:

1.**korak**. Biranje uzorka, priprema i provođenje pokusa (testa, ankete i sl.).
**2. korak**. Obrada dobivenih podataka.
**3. korak**. Vršenje procjena i donošenje odluka.

Prvim se korakom manje bavi matematička statistika, a više statistika u širem smislu. Zato ovdje nećemo obrađivati taj **vrlo važan** korak. Spomenimo samo dva pojma.
Već smo rekli da uzorak za nas znači **slučajno izabrani podskup** populacije. To znači da svaki član populacije ima jednak izgled da bude izabran u uzorak. Dakle, pod uzorkom smatramo **slučajni uzorak** (u literaturi se često to naziva **jednostavni slučajni uzorak**).
Na primjer, ako proizvođač izabere 10 svojih proizvoda i ponudi ih na uvid, radi svoje promidžbe, to u pravilu nije slučajan uzorak, već **pristran** (proizvođač u pravilu izabere najkvalitetnije proizvode za promidžbu).

Jednako tako, trgovac kojemu bi bilo dopušteno da izabere 10 proizvoda na osnovi kojih bi poslije pregovarao o cijeni, možda ne bi izabrao slučajan uzorak (već bi birao lošije proizvode kako bi mogao spustiti cijenu).
Slučajan uzorak **duljine** 10 mogao bi se izabrati na primjer tako da proizvođač dade na uvid serijske brojeve proizvoda, potom da se iz skupa brojeva slučajno izabere desetoračlani podskup i konačno, da uzorak čine upravo proizvodi s izabranim serijskim brojevima.
Kažemo da je uzorak **reprezentativan**, ako odražava svojstva cijele populacije. Na primjer, uzorak koji je vrlo malen (male duljine) u usporedbi s veličinom populacije, u pravilu nije reprezentativan. Tako, slučajno odabranih 20 birača nakon napuštanja biračkog mjesta za državne izbore nije reprezentativan uzorak. Nasuprot tome, uzorak u koji bismo ciljano uključili, proporcionalno prema udjelu u biračkom spisku, birače iz svake županije, iz gradske i ruralne sredine, prema spolu i dobi, prema nacionalnoj i vjerskoj pripadnosti, prema stručnoj spremi, prema imovinskom stanju, prema zaposlenosti, prema visini primanja i sl. bio bi u dobroj mjeri reprezentativan, ali ne bi bio slučajan.

Drugim korakom u većem se dijelu bavi **deskriptivna statistika,** koja je dio matematičke statistike, jer donekle uključuje matematičke tehnike. Deskriptivna se statistika bavi uzorkom, a o populaciji izravno ne govori ništa ili vrlo malo. Naravno, na osnovi svojstava uzorka, mogu se naslućivati svojstva populacije.

U trećem se koraku, na osnovi svojstava uzorka, procjenjuju svojstva populacije. Za prijelaz od uzorka na populaciju presudna je uloga **teorije vjerojatnosti**, koja je teoretski temelj matematičke statistike. Puko naslućivanje svojstava populacije iz svojstava uzorka je nesustavno i, u pravilu, subjektivno. Uz pomoć teorije vjerojatnosti ono se može izgraditi u egzaktnu znanstvenu metodu.

# Deskriptivna statistika

## Uređivanje i grupiranje podataka.

Često su podatci koje dobijemo mjerenjem napisani redoslijedom koji nam otežava jasnu predodžbu o njima. Jedan od načina da podatke učinimo jasnijima jest taj da se napišu u rastućem (ili padajućem) redoslijedu.

**Primjer 1.** Kontrolom slučajno odabranih 20 staklenka s kemikalijom, punjenih od jednog proizvođača, dobiveni su sljedeći podatci (u litrama):
1.97 1.95 2.02 1.99 1.95 2.03 2.00 1.96 1.98 2.00 2.01 1.99 1.98
1.97 1.97 1.94 1.94 2.04 2.02 1.93
U ovom primjeru **populaciju** čine sve staklenke te vrste punjene od tog proizvođača, a izabranih 20 staklenaka čine **uzorak**. Broj 20 je **duljina uzorka**.
Vidimo da se podatci vrte oko vrijednosti 2, a da bismo dobili jasniju predožbu o njima poredajmo ih prema veličini (od manjeg prema većem). Napomenimo da tim postupkom nećemo izgubiti ni jednu statistički važnu informaciju (naime uzorak je izabran slučajno).
Dobijemo:

1.93 1.94 1.94 1.95 1.95 1.96 1.97 1.97 1.97 1.98 1.98 1.99 1.99
2.00 2.00 2.01 2.02 2.02 2.03 2.04

Sad nam je puno lakše uočavati svojstva podataka i odnose među njima. Na primjer, brzo uočavamo da je 1.93 **najmanji** (**minimalni**), a 2.04 **najveći** (**maksimalni**) podatak. Također, brzo uočavamo da se podatak 1.97 pojavljuje tri puta; kažemo da mu je **frekvencija** 3.
Nadalje, vidimo da frekvenciju 2 imaju podatci 1.94, 1.95, 1.98, 1.99, 2.00 i 2.02, a da preostali imaju frekvenciju 1.
Tu činjenicu pregledno zapisujemo pomoću **tablice frekvencija** kojoj su u prvom redku redom različiti podatci, a u drugom njihove frekvencije.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.93 | 1.94 | 1.95 | 1.96 | 1.97 | 1.98 | 1.99 | 2.00 | 2.01 | 2.02 | 2.03 | 2.04 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |

Vidimo da u ovom primjeru od ukupno 20 podataka ima 12 međusobno različitih.
Uočite da je zbroj frekvencija jednak ukupnom broju podataka (s ponavljanjem); u ovom primjeru je 1+2+2+1+3+2+2+2+1+2+1+1 = 20.

**Grupiranje u razrede**. I nakon uređivanja često imamo poteškoća s podatcima, naročito ako ih ima puno; zato ih grupiramo u **razrede**. Da to ilustriramo, podatke iz ovog primjera grupirat ćemo u 6 razreda, svaki duljine 0.02. Ispišimo ih tako da razrede odvojimo:

1.93 1.94 1.94     1.95 1.95 1.96     1.97 1.97 1.97 1.98 1.98

1.99 1.99 2.00 2.00     2.01 2.02 2.02     2.03 2.04

Rezultate ćemo predočiti tablicom koja ima četiri stupca.
U prvom stupcu su redni brojevi razreda (od 1 do 6).
U drugom su stupcu granice razreda; na primjer 1.925-1.945 znači da su u prvom razredu podatci koji su između 1.925 i 1.945 (treću smo decimalu dodali da nam se ne dogodi da neki podatak upadne u dva razreda).
U trećem su stupcu **frekvencije razreda**, tj. broj podataka u pojedinim razredima (uočite da se te frekvencije razlikuju od **frekvencija podataka uzorka** koje smo prije spominjali); na primjer $f_1=3$, znači da su u prvom razredu tri podatka (1.93, 1.94, 1.94 ).
U četvrtom stupcu su relativne frekvencije $\frac{f_i}{n}$ razreda, gdje je $n$ ukupan broj podataka; na primjer relativna frekvencija prvog razreda je $\frac{3}{20}$ jer je $f_1=3$, a $n = 20$.

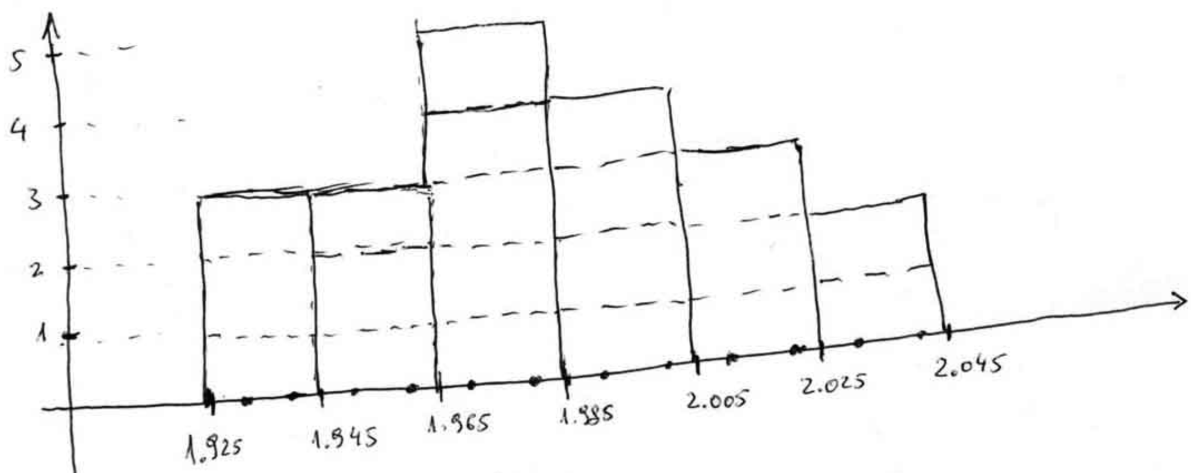
| Redni broj razreda | Granice razreda | Frekvencija razreda $f_i$ | Relativna frekvencija razreda |
|---|---|---|---|
| 1. | 1.925-1.945 | 3 | 3/20 |
| 2. | 1.945 -1.965 | 3 | 3/20 |
| 3. | 1.965-1.985 | 5 | 5/20 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. | 1.985-2.005 | 4 | 4/20 |
| 5. | 2.005-2.025 | 3 | 3/20 |
| 6. | 2.025-2.045 | 2 | 2/20 |

**Važna napomena**. Iako nam ova tablica jasnije dočarava odnos među podatcima, u njoj su se neke informacije izgubile. Na primjer, iz nje očitavamo da su u prvom razredu 3 podatka, ali ne znamo koja su to tri podatka. Gubitak je to neznatniji što je uzorak veće duljine, a razredi uži. Za valjanost nekih statističkih zaključivanja često se traži da frekvencija svakog razreda bude barem 5, što ovo naše grupiranje ne zadovoljava.
Važnost grupiranja nije samo u dobivanju veće preglednosti, već i u uočavanju statističkih zakonitosti. Na primjer, frekvencije podataka iz Primjera 1 variraju, ali nakon grupiranja uočavamo sljedeću pravilnost: frekvencije razreda se povećavaju, potom smanjuju.
Uočite da su svi razredi bili iste duljine. Tako će, u pravilu, uvijek biti, iako, načelno, možemo vršiti i grupiranje u razrede različitih duljina.
Uočite, također, da je već tablicom frekvencija izvršeno jedno grupitranje podataka: u pojedini razred upadaju podatci koji su međusobno jednaki.

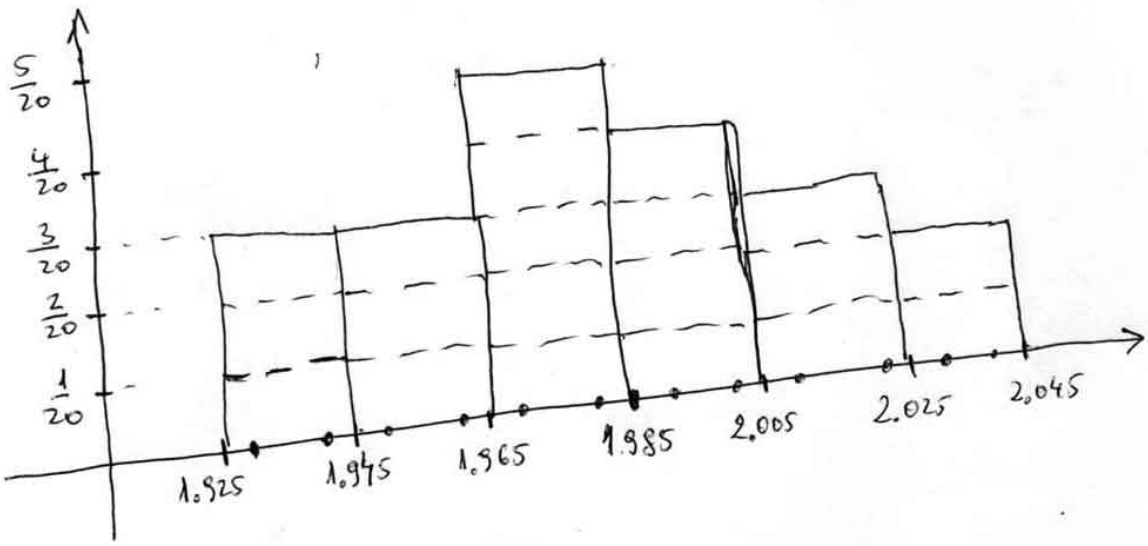
## Grafičko predočavanje podataka. Histogram frekvencija i histogram relativnih frekvencija.

Grupirani podatci iz primjera mogu se grafički predočiti tako da na horizontalnu os koordinatnog sustava nanosimo količinu u litrama, a na vertikalnu frekvencije. Ako se iznad svakog razreda postavi pravokutnik kojemu je visina jednaka frekvenciji razreda dobije se **histogram frekvencija**. Na primjer, za podatke iz Primjera 1. dobije se (sl.1.):




Sl. 1

Sličnu sliku dobili bismo ako bismo na vertikalnu os nanosili relativne frekvencije. To je **histogram relativnih frekvencija.** Iako ni jedan od njih nema prioritetno značenje (jedan se dobije iz drugoga promjenom skale na vertikalnoj osi), obično se histogram relativnih frekvencija naziva **distribucijom frekvencija** (sl.2.).




Sl. 2.

**Svojstva histograma (jednog i drugog).**

1. Svaki podatak doprinosi u histogramu n-ti dio površine, tj. 1/n od ukupne površine, gdje je *n* ukupan broj podataka (računajući i ponavljanje). To najbolje uočavamo tako što svakom podatku odgovara jedan mali pravokutnik u histogramu (tu je važno to da **svi razredi imaju jednaku širinu**).

2. Površine stupaca iznad pojedinih razreda proporcionalne su pripadajućim frekvencijama (odnosno relativnim frekvencijama). Naime iznad i-tog razreda ima $f_i$ malih pravokutnika, pa i-ti stupac čini $\frac{f_i}{n}$ ukupne površine.

3. Stupac iznad i-tog razreda histograma čini $\frac{100 f_i}{n}\%$ površine cijelog histograma. To odmah proizlazi iz svojstva 2. Uočite da se traženi postotak dobije množenjem relativne frekvencije sa 100.

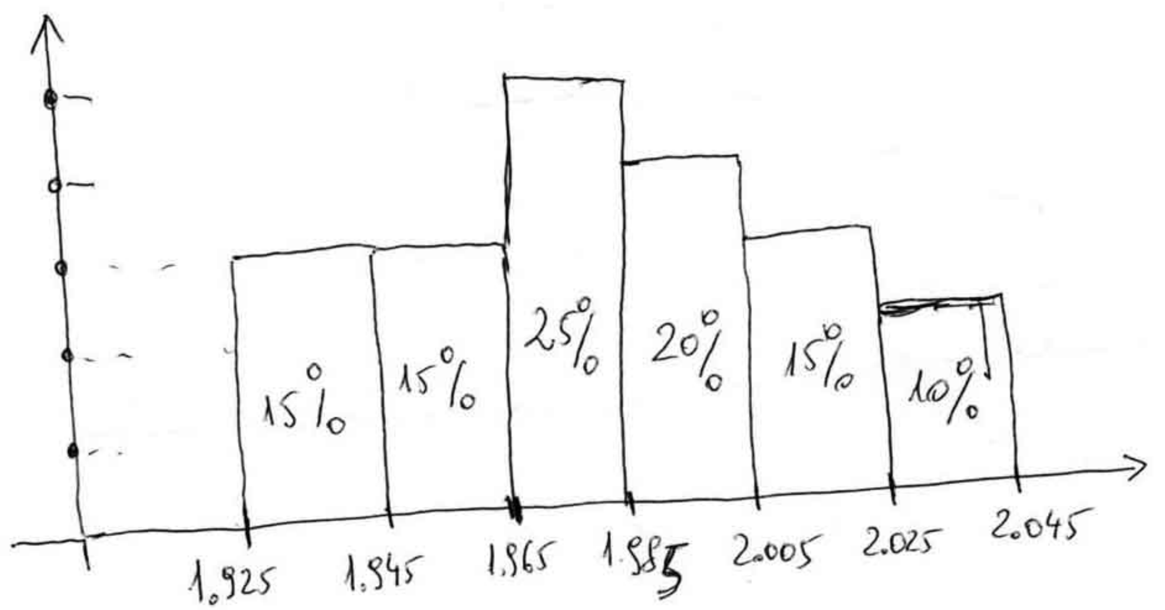
**Primjer 2**. Odredimo površinske udjele iznad pojedinih razreda u postotcima za podatke iz Primjera 1.

$100 \cdot \frac{3}{20} = 15$ (napomenimo da smo rezultat mogli dobiti i kao brojnik razlomka kad relativnu frekvenciju 3/20 zapišemo s nazivnikom 100, tj. $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100}$).

Dalje je:

$100 \cdot (5/20) = 25$; $100 \cdot (4/20) = 20$; $100 \cdot \frac{3}{20} = 15$ i $100 \cdot (2/20) = 10$.

Rezultate smo predočili na slici 3.



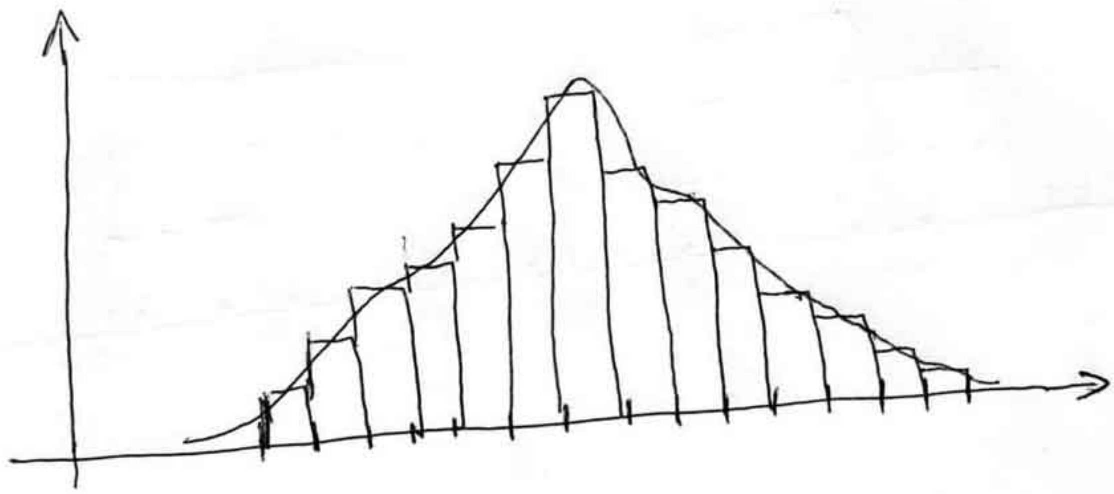

Sl. 3

**Kako treba tumačiti ove postotke**? Prvo što nam pada na pamet jest to da će od svih staklenka ove vrste, punjenih od ovog proizvođača, odprilike 15% imati količinu iz prvog razreda, 15% iz drugoga, 25% iz trećega, 20% iz četvrtoga, 15% iz petoga i 10% iz šestoga. Naravno postavlja se pitanje s koliko sigurnosti možemo predviđati svojstva populacije iz poznatih svojstava uzorka. To je jedan od najvažnijih zadataka matematičke statistike.

**Napomene.** 1. Histogram ne ovisi samo o podatcima (uzorku) već i o izabranoj podjeli na razrede. Zato uz isti uzorak može biti više različitih podjela na razrede.

2. Ako je broj podataka vrlo malen, onda podjela na razrede nije potrebna, pa tako ni histogrami. Za broj podataka iz Primjera 1 prije bismo rekli da je malen (iako nije vrlo malen) nego da je velik. Iako za to nema jasnog opravdanja, obično se uzorci duljine veće od 30 smatraju dovoljno velikima.

3. Ako je broj podataka vrlo velik, a također i broj razreda, onda se histogram može dobro aproksimirati neprekinutom crtom kao na slici 4.



Sl. 4.

Aritmetička sredina i medijan skupa podataka (uzorka).

**Aritmetička sredina uzorka**.
Jedno od osnovnih pitanja o staklenkama kemikalije iz Primjera 1. jest kolika je **prosječna količina** kemikalije u njima. Naravno da iz poznatih podataka ne možemo znati kolika je **aritmetička sredina** populacije, međutim možemo izračunati aritmetičku sredinu uzorka (za koju vjerujemo da bi mogao biti blizu stvarnog prosjeka). Sjetimo se definicije aritmetičke sredine $\bar{x}$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Na primjer, aritmetička sredina brojeva 1,2,3,4,5 je broj $\frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

Taj se izraz zove **aritmetička sredina uzorka**.

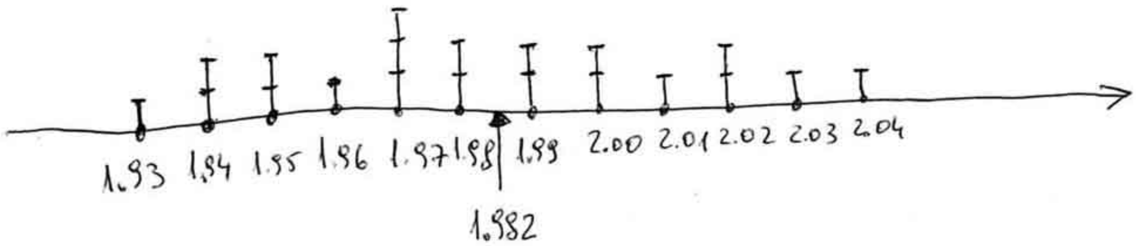
**Primjer 3**. Odredimo aritmetičku sredinu podataka iz Primjera 1.

$$\bar{x} = \frac{1.93 + 1.94 \cdot 2 + 1.95 \cdot 2 + 1.96 + 1.97 \cdot 3 + 1.98 \cdot 2 + 1.99 \cdot 2 + 2.00 \cdot 2 + 2.01 + 2.02 \cdot 2 + 2.03 + 2.04}{20}$$

$$= 1.982$$

Uočite da aritmetička sredina (prosječna vrijednost) ovaj put nije jednaka ni jednom od podataka, što je uglavnom i slučaj.
**Intuitivno značenje aritmetičke sredine**. Aritmetička sredina 1.982 jest upravo ona količina kojom bi trebalo napuniti svaku od 20 staklenka pa da ukupna količina bude kao u uzorku.

**Fizikalna interpretacija aritmetičke sredine – težište sustava masa na pravcu**
Aritmetička sredina ima jednostavno, ali vrlo važno fizikalno značenje. Ako zamislimo da su u točkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ smještene jednake mase (za svaki podatak masa *m*), onda je u $\bar{x}$ koordinata težišta sustava tih masa. Naravno ako se neki podatak pojavljuje više puta onda, u tu koordinatu treba staviti toliko masa koliko se puta on pojavljuje, tj. kolika mu je frekvencija u uzorku.
Na slici 5. predočena je fizikalna interpretacija podataka iz Primjera 1 i interpretacija aritmetičke sredine kao težišta. Radi lakšeg dočaravanja, možemo zamisliti da je koordinatna os čvrsta, ali bez mase. Tada je u aritmetičkoj sredini (težištu) ravnoteža.




Sl. 5.

Intuitivno je jasno da se težište sustava masa ne mijenja ako se svaka masa proporcionalno poveća ili smanji (odnosno ako promijenimo mjernu jedinicu mase). Jednako tako, aritmetička sredina se ne mijenja ako se frekvencije pojavljivanja svakog podatka proporcionalno povećaju ili smanje.

**Procjena aritmetičke sredine populacije.**
Postavlja se pitanje možemo li dobro procijeniti aritmetičku sredinu populacije, ako znamo aritmetičku sredinu uzorka. Odgovor je pozitivan i vrijedi:
**Aritmetička sredina uzorka je najbolja procjena aritmetičke sredine populacije**.
Značenje izraza *najbolja* može se preciznije matematički definirati i o tome ćemo više reći poslije.

**Medijan**.
Jasno je da se aritmetička sredina brojeva nalazi između najmanjeg i najvećeg broja. Tako se 1.982 iz Primjera 3 nalazi između 1.93 i 2.04. Pogrješno bi bilo zaključiti da se lijevo i desno od aritmetičke sredine nalazi jednako mnogo podataka. Tako se u Primjeru 1, lijevo od aritmetičke sredine nalazi 11 podataka, a desno 9 (11 ih je manjih od aritmetičke sredine, a 9 većih). Zato se uvodi pojam medijana.

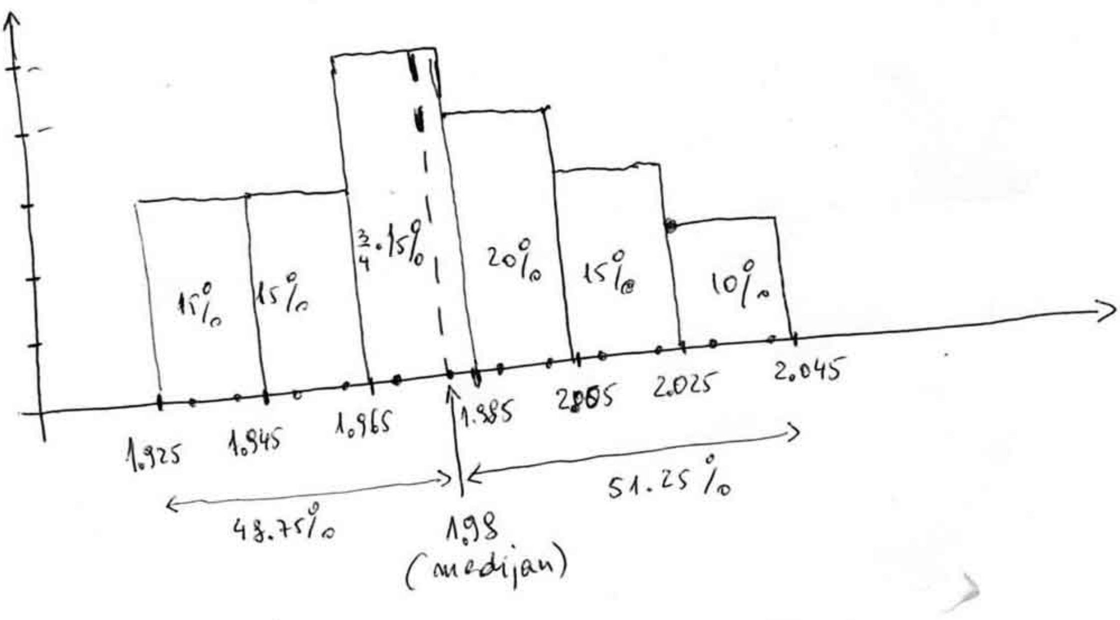
**Medijan** skupa podataka je srednji podatak ako ima neparno podataka, a aritmetička sredina dvaju srednjih ako ima parno podataka.

Na primjer, za podake 1,2, 4, 11, 13 medijan je 4, a za podatke 1,2,4,7,11,13 medijan je $\frac{4+7}{2}=5.5$

**Primjer 4**. Odredimo medijan skupa podataka iz Primjera 1.
Tu ima 20 podataka pa je medijan aritmetička sredina 10-og i 11-og podatka, koja su oba 1.98. Zato je medijan

$$\frac{1.98+1.98}{2}=1.98.$$

**Geometrijska i fizikalna interpretacija medijana**. Medijan dijeli podatke na dva jednakobrojna dijela, jedan lijevo, a drugi desno od njega.
Također, medijan dijeli histogram na dva dijela odprilike jednakih površina (oko polovice je površine lijevo, a oko polovice desno od medijana). Na primjer, histogram iz Primjera 1, medijan dijeli na lijevi dio koji ima 48.75% i desni koji ima 51.25% ukupne površine (sl. 6.).




sl. 6.

U interpretaciji sa sustavom masa na pravcu, lijevo i desno od medijana mase su jednake, što **ne znači** da je tu ravnoteža (jer su krakovi različiti); ravnoteža je u aritmetičkoj sredini.

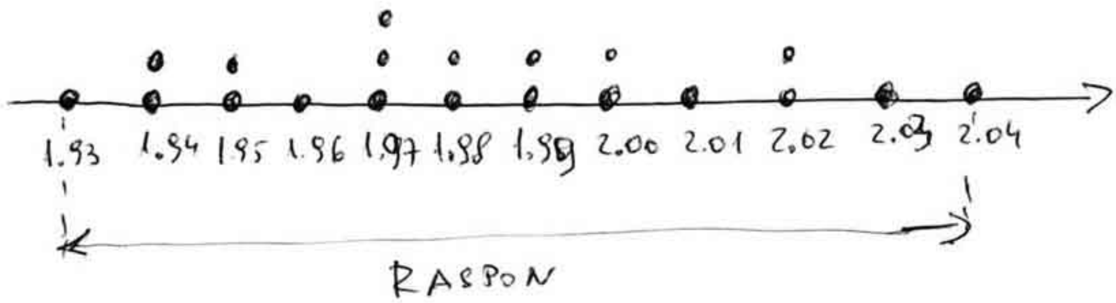
**Mod**. U nekim slučajevima važan je i **mod uzorka**; to je najfrekventniji podatak u uzorku. Na primjer, u Primjeru 1. mod je 1.97 jer ima najveću frekvenciju, broj 3. Slično skup podataka 1, 1, 2, 2, 3, 11, 64, ima dva moda, brojeve 1 i 2 (oba imaju frekvenciju 2).

## Mjere raspršenja podataka. Raspon, kvartili, varijanca i standardna devijacija.

Uočite da su za podatke iz Primjera 1 aritmetička sredina i medijan vrlo blizu (brojevi 1.982 i 1.98), što općenito ne mora biti. Na primjer, za podatke
1, 1, 2, 2, 3, 11, 64
medijan je 2,
a aritmetička sredina 12,
što je veće od svih podataka osim jednog. Razlog tome je zbijenost podataka iz Primjera 1 i njihova grupiranost oko aritmetičke sredine, što nije slučaj s ovima gore. Za opisivanje takvih fenomena uvode se mjere raspršenja podataka. Najjednostavnija mjera raspršenja podataka je **raspon** ili **rang**.

**Raspon** podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poredanih prema veličini je razlika $x_n - x_1$ najvećeg i najmanjeg podatka.

Na primjer, raspon podataka 1,1,2,2,3,11,64 je 64-1=63,
a raspon podataka iz Primjera 1 je 2.04-1.93=0.11 (sl.7.). Tu su točkicama predočene frekvencije pojedinih podataka.

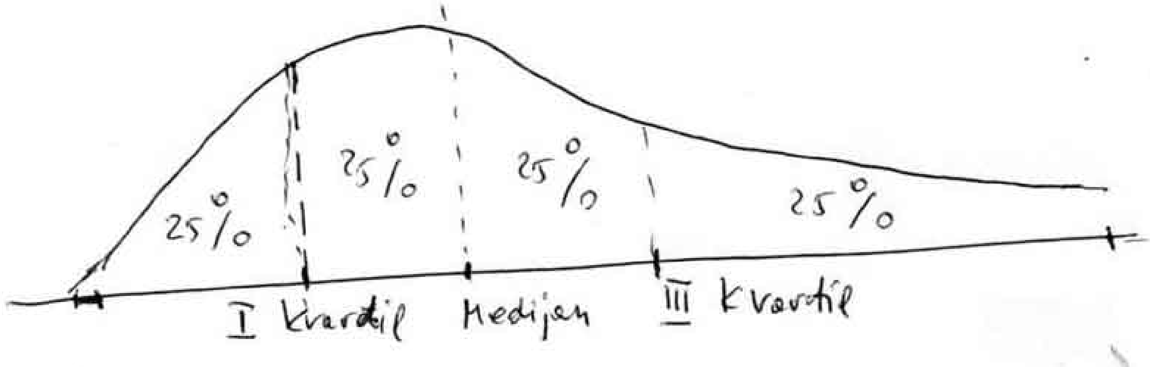



sl.7.

Uočite da je raspon ujedno udaljenost na koordinatnom pravcu između najvećeg i najmanjeg podatka, odnosno to je duljina intervala određenog najmanjim i najvećim podatkom. Na slici 8. su kontinuirane aproksimacije histograma dviju serija podataka koji imaju jednake raspone, ali se očito bitno razlikuju. Naime, površine histograma drukčije su raspoređene.

sl.8.

Da bismo mogli opisivati razlike poput ovih na slici uvodimo pojam kvartila. Ima tri kvartila koji dijele histogram na četiri dijela, tako da svaki ima odprilike 25% površine (tim preciznije što je duljina uzorka veća). To predočujemo na kontinuiranoj aproksimaciji histograma (sl.9.).




Sl. 9

**Prvi** ili **donji kvartil** je broj od kojega je 25% podataka manje ili je njemu jednako.
**Drugi** je kvartil medijan.
**Treći** ili **gornji kvartil** je broj od kojega je 75% podataka manje ili je njemu jednako.

Napominjemo da 25% znači ¼, a 75% znači ¾, pa bi za primjenu ove definicije broj podataka trebao biti djeljiv s 4, a ni onda kvartili ne bi bili jednoznačno određeni. Zato se za računanje kvartila obično daju algoritmi. Opisat ćemo jedan od najuobičajenijih.

**Primjer 5**. Odredimo kvartile za podatke iz Primjera 1.

Tu je n=20, pa za prvi kvartil množimo $0.25 \cdot 21$ i dobijemo 5.25. Zato je prvi kvartil $q_1$ između petog podatka 1.95 i šestoga 1.96. Pravu vrijednost dobijemo kao
$q_1 = 1.95+0.25\cdot(1.96-1.95)=1.9525$
Koeficijent 0.25 u zadnjoj formuli dobili smo kao 5.25-5, što se slučajno poklopilo s 0.25 što se odnosi na prvi kvartil.
Već smo rekli da je drugi kvartil medijan što je bilo 1.98. Provjerimo to i algoritmom.
Za drugi kvartil množimo 0.5 s 21 i dobijemo 10.5, što znači da je drugi kvartil između 10-og i 11-og podatka. Kako su oba ta podatka 1.98, a 10.5-10=0.5 dobijemo
$q_2 = 1.98+0.5(1.98-1.98)=1.98$.
Za treći kvartil množimo 0.75 s 21 i dobijemo 15.75 pa je $q_3$ između 15-og podatka 2.00 i 16-og podatka 2.01. Kako je 15.75-15=0.75 dobijemo
$q_3 = 2.00+0.75(2.01-2.00)=2.0075$.

Slično kvartilima definiraju se i druge podjele, na primjer na **percentile**, kojima se histogram dijeli na 100 dijelova, svaki od kojih ima odprilike 1% površine. Mogu se razmatrati dijelovi s odprilike 10% površine itd. Općenito govorimo o **kvantilima**.

**Varijanca i standardna devijacija**.

Kvartili, percentili i, općenito, kvantili dobro opisuju variranje podataka unutar raspona, ali imaju jednu ozbiljnu slabost – ima ih puno: tri kvartila, 99 percentila itd.
Postavlja se pitanje postoji li neki broj ovisan o podatcima koji dobro opisuje variranje podataka. Odgovor je potvrdan, ima ih više, a najvažnija je varijanca. Varijanca je mjera rasipanja podataka oko aritmetičke sredine.
Odstupanje podatka $x_i$ od aritmetičke sredine $\bar{x}$ mjeri se razlikom $x_i - \bar{x}$. Uočite da vrijedi:
ako je $x_i - \bar{x} > 0$ onda je podatak $x_i$ veći od $\bar{x}$, tj. nalazi se desno od $\bar{x}$
ako je $x_i - \bar{x} < 0$ onda je podatak $x_i$ manji od $\bar{x}$, tj. nalazi se lijevo od $\bar{x}$
ako je $x_i - \bar{x} = 0$ onda je $x_i = \bar{x}$.
Za ukupnu mjeru odstupanja nije dobro uzeti zbroj pojedinačnih odstupanja jer je to nula, tj. odstupanja se međusobno poništavaju. To ćemo potkrijepiti primjerom.

**Primjer 6**. Odredimo odstupanja podataka od aritmetičke sredine u Primjeru 1. i izračunajmo njihov zbroj.

Odstupanja su, redom:
1.93 – 1.982 = -0.052
1.94 – 1.982 = -0.042 dva puta
1.95 – 1.982 = -0.032 dva puta
1.96 – 1.982 = -0.022
1.97 – 1.982 = -0.012 tri puta
1.98 – 1.982 = -0.002 dva puta
1.99 – 1.982 = 0.008 dva puta
2.00 – 1.982 = 0.018 dva puta
2.01 – 1.982 = 0.028
2.02 – 1.982 = 0.038 dva puta
2.03 – 1.982 = 0.048
2.04 – 1.982 = 0.058

Zbroj odstupanja je
$\Sigma = -0.052-2\cdot0.042-2\cdot0.032-0.022-3\cdot0.012-$
$2\cdot0.002+2\cdot0.008+2\cdot0.018+0.028+2\cdot0.038+0.048+0.058$
$= -0.262+0.262$
$= 0$.
To vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru, što se lako provjeri, a intuitivno je vrlo jasno. Naime, koliko ima tekućine ispod prosjeka, toliko mora biti i iznad prosjeka.

**Napomena**. U fizikalnoj interpretaciji gdje svakom podatku pridružujemo jednake mase, rezultat Primjera 6. vrlo je jasan. On upravo govori da je u aritmetičkoj sredini težište, tj. ravnoteža (doprinosi *sila puta krak sile* lijevo i desno od težišta su jednaki).

**Suma apsolutnih odstupanja i prosječno apsolutno odstupanje**.
Kao **dobra mjera rasipanja** podataka oko srednje vrijednost služi **suma apsulutnih vrijednosti odstupanja podataka od aritmetičke sredine**. Definira se kao:

$$SAO := |x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|.$$

Na primjer, koristeći rezultate iz Primjera 6, dobijemo za podatke iz Primjera 1:

SAO = 0.262+0.262 = 0.524.

To tumačimo kao da je ukupno odstupanje (na niže i na više) od prosječne vrijednosti 1.982 oko pola litre.
Ako taj rezultat podijelimo s 20 (brojem staklenka), dobit ćemo **prosječno apsolutno odstupanje** od prosjeka: $\frac{0.524}{20}$ =0.0262.
To znači da, u prosjeku, u svakoj staklenki ili ima za 0.0262 litara više ili 0.0262 litara manje kemikalije od 1.982 litara.

Općenito, **prosječno apsolutno odstupanje od aritmetičke sredine**, definiramo kao

$$\text{PAO:=}\ \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+...+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

Nedostatak izraza SAO i PAO jest taj da u definiciji sadrže apsolutnu vrijednost, koja nije baš pogodna za deriviranje. To i neki drugi **prirodni razlozi** utjecali su da se PAO zamijeni **standardnom devijacijom**, koju ćemo sad definirati.

**Varijanca uzorka** $(s')^2$ definira se kao **prosječno kvadratno odstupanje od prosjeka**:

$$(s')^2 := \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

**Standardna devijacija uzorka** s' je drugi korijen iz varijance uzorka:

$$s' := \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

**Primjer 7**. Izračunajmo varijancu i standardnu devijaciju uzorka (podataka) iz Primjera 1.

$$(s')^2 = \frac{(-0.052)^2+2\cdot(-0.042)^2+...+0.048^2+0.058^2}{20} = \frac{0.01932}{20} = 0.000966$$

$s' = 0.0310805$
(i jedno idrugo su približne vrijednosti).

Uočite da je ispalo SAO<$s'$.
To vrijedi općenito, a ne samo u ovom slučaju.

**Fizikalna interpretacija varijance – moment inercije oko težišta.**
Sjetimo se da je moment inercije mase proporcionalan masi i kvadratno proporcionalan radijusu: $I = mr^2$. Sjetimo se također da se momenti inercije oko istog središta zbrajaju.
Zamislimo da smo **jediničnu masu** rasporedili po pravcu tako
da svaki podatak $x_i$ uzorka opteretimo jednakom masom $m := \frac{1}{n}$, onda će ukupna inercija oko težišta (aritmetičke sredine) biti

$$I=\frac{1}{n}(x_1-\bar{x})^2+\frac{1}{n}(x_2-\bar{x})^2+...+\frac{1}{n}(x_n-\bar{x})^2$$
$$= (s')^2.$$

Zaključujemo: **varijanca uzorka jednaka je momentu inercije oko težišta pripadajućeg sustava masa, pri čemu smo jediničnu masu jednoliko rasporedili na sve podatke – svakom po $\frac{1}{n}$.**

To je i bila jedna od motivacija za definiciju varijance uzorka. Naime, kako je moment inercije mjera disperzije (raspršenja) masa oko težišta, tako je i varijanca mjera disperzije podataka oko aritmetičke sredine.
Fizikalno je jasno da je od svih momenata inercije najmanji onaj oko težišta. Slično svojstvo minimalnosti ima i aritmetička sredina: to je realni broj od kojega je suma kvadrata odstupanja minimalna. To se može lako dokazati. Provjerite da je u Primjeru 1 suma kvadrata odstupanja od aritmetičke sredine manja od sume kvadrata odstupanja od medijana.

**Procjena varijance populacije**. **Korigirana varijanca i korigirana standardna devijacija**.
Za razliku od aritmetičke sredine uzorka, koja je *najbolja* procjena aritmetičke sredine populacije, varijanca uzorka **nije najbolja procjena** varijance populacije. Pokazuje se da to svojstvo ima **korigirana varijanca uzorka** $s^2$, definirana kao:

$$s^2 := \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

**(razlikuje se po tome što u nazivniku, umjesto n ima n-1, a u oznaci što nema crtice).**

Odatle se definira **korigirana standardna devijacija uzorka** $s$, kojom ćemo procjenjivati standardnu devijaciju populacije:

$$s := \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}.$$

**Primjer 8**. Izračunajmo korigiranu varijancu i korigiranu standardnu devijaciju uzorka (podataka) iz Primjera 1.

Koristeći se rezultatom Primjera 6, dobijemo

$$s^2=\frac{0.01932}{19}=0.00101684, \text{ te}$$
$$s = 0.031888$$

Vrijedi općenito, a može se provjeriti za ovaj uzorak:
SAO < s' < $s$.

Vidi se da vrijedi $s = \sqrt{\frac{n-1}{n}}s'$. Zato se za velike $n$ devijacije s i s' praktično ne razlikuju.

Međutim, za male $n$, razlika među njima je nezanemariva. U sljedećoj tablici dan je **približan** omjer (na tri decimale) između s i s' za neke $n$ (kako se $n$ povećava, tako se taj omjer približava broju 1).

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{s}{s'}$ | 0.707 | 0.816 | 0.866 | 0.894 | 0.913 | 0.926 | 0.935 | 0.943 | 0.949 |

| n | 20 | 30 | 100 | 500 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{s}{s'}$ | 0.975 | 0.983 | 0.995 | 0.999 |

Sad ćemo obrađene pojmove ilustrirati na jednom novom uzorku, ponešto različitom od onog u Primjeru 1.

**Primjer 9.** Mjerenjem vremena između dviju uzastopnih poruka pristiglih na neku adresu dobiveni su sljedeći podatci (u sekundama):
12, 8, 1, 7, 24, 4, 4, 6, 20, 10, 3, 2, 22, 23, 8, 6, 5, 25, 16, 3, 1, 14, 15, 18, 2, 6, 27, 19, 12, 4, 20, 14, 3, 13, 8, 15, 30, 5, 7, 16.

(I) Prebrojimo podatke. Vidimo da ih ima 40, dakle n = 40.

(II) Poredajmo podatke prema veličini (od manjeg prema većem):
1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6,6,6, 7, 7, 8, 8, 8, 10, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 18, 19, 20, 20, 22, 23, 25, 27, 30.
(III) Napravimo tablicu frekvencija:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 30 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Vidimo da frekvencije variraju iako imaju i opći trend prema opadanju. To bi još izrazitije bilo da smo stavili frekvencije 0 za brojeve od 1 do 30 koji se ne pojavljuju.

(IV) Grupirajmo podatke u razrede duljine 5:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 - 5.5 | 5.5 – 10.5 | 10.5 – 15.5 | 15.5 – 20.5 | 20.5 – 25.5 | 25.5 – 30.5 |
| 11 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 |

Vidimo da, nakon ovakvog grupiranja, frekvencije razreda opadaju, što se dobro vidi i iz histograma. To je jedan od najvažnijih razloga grupiranja.

(V) Odredimo, najmanji podatak, najveći podatak i raspon:
min = 1
max = 30
raspon = max – min = 30-1 = 29.

(VI) Odredimo medijan i aritmetičku sredinu i unaprijed procijenimo njihov odnos. Odredimo kvartile.
S obzirom da su podatci više grupirani na početak, medijan je manji od aritmetičke sredine. Kako je n = 40, medijan je aritmetička sredina 20-og i 21-og podatka. Dakle:

**Medijan** = $\frac{8+10}{2} = 9$

**Aritmetička sredina**, $\bar{x} = \frac{458}{40} = 11.45$ (zaista je medijan manji).

**Prvi kvartil**: $q_1 = 4.5$
**Drugi kvartil** (medijan): $q_2 = 9$
**Treći kvartil**: $q_3 = 17$

(VII) Odredimo varijancu i standardnu devijaciju te korigiranu varijancu i korigiranu standardnu devijaciju uzorka.

**Varijanca**: $(s')^2 = 63.1975$
**Standardna devijacija**: $s' = 7.9497$ (na 4 decimale)
**Korigirana varijanca**: $s^2 = 64.8179$ (na 4 decimale)
**Korigirana standardna devijacija**: $s = 8.0510$ (na 4 decimale).

Veličine koje smo odredili u Primjeru 9 jesu osnovne deskriptivno statističke veličine uzorka. Za njihovo računanje možemo se koristiti gotovim statističkim paketima. Na primjer, pomoću grafičkog kalkulatora te se veličine dobiju primjenom jedne naredbe.

## Važna svojstvo standardne devijacije – Čebiševljev teorem i empirijsko pravilo za zvonolike distribucije frekvencija.

**Čebiševljev teorem**. *Neka je* $\bar{x}$ *aritmetička sredina i* $s'$ *standardna varijanca uzorka* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Tada u intervalu* $\langle \bar{x} - 2 \cdot s', \bar{x} + 2 \cdot s' \rangle$ *ima barem 75% podataka, a u intervalu* $\langle \bar{x} - 3 \cdot s', \bar{x} + 3 \cdot s' \rangle$ *ima barem 88% podataka.*

**Napomena.** Budući da je $s' < s$, Čebiševljev teorem vrijedi i za korigiranu standardnu devijaciju.

**Primjer 10.** Provjerimo Čebiševljev teorem na uzorku iz Primjera 9.

Tu je $2s' = 15.89$ (na dvije decimale) i $\bar{x} = 11.45$ pa je
$\langle \bar{x} - 2 \cdot s', \bar{x} + 2 \cdot s' \rangle = \langle -4.44, 27.34 \rangle$
Vidimo da su njemu svi podatci osim podatka 30, pa je tvrdnja provjerena.

**Primjer 11**. Provjerimo Čebiševljev teorem na uzorku iz Primjera 1.

Tu je uzorak
1.93 1.94 1.94 1.95 1.95 1.96 1.97 1.97 1.97 1.98 1.98 1.99 1.99
2.00 2.00 2.01 2.02 2.02 2.03 2.04
Prema Primjeru 3, $\bar{x} = 1.982$ .
Prema Primjeru 7, $s' = 0.031$ (na tri decimale), dakle $2s' = 0.062$.

Zato je $\bar{x}$ +2s'=2.044 i $\bar{x}$ -2s'=1.920. Vidimo da su svi zadani podatci između 1.920 i 2.044 (a Čebiševljev teorem garantira bar 75%).

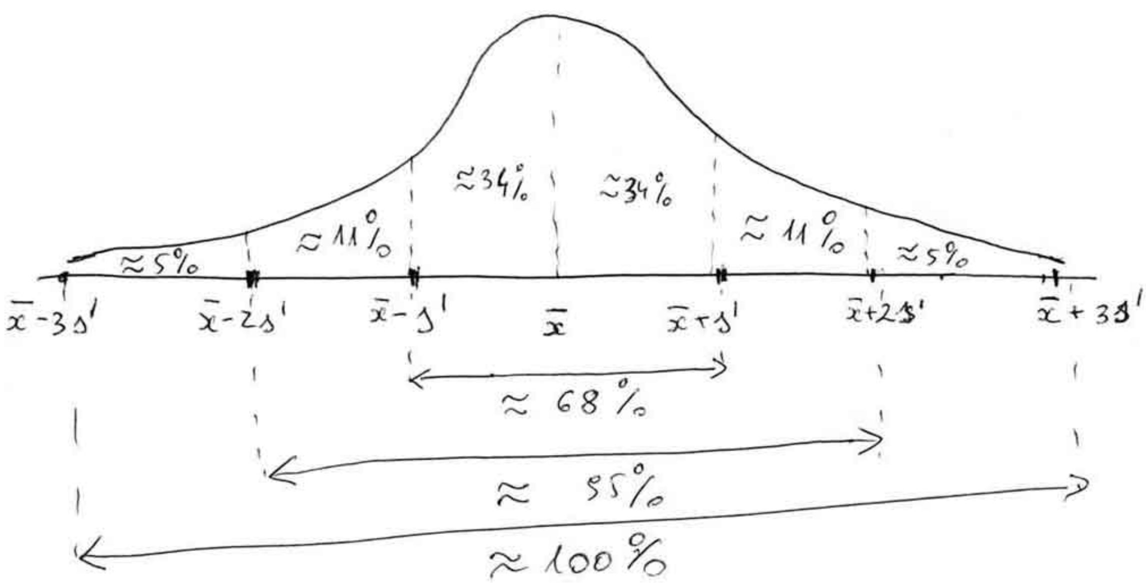
**Empirijsko pravilo za zvonolike distribucije frekvencija.**

Letimičan pogled na uzorke iz Primjera 1 i 9, odnosno na njihove histograme, upućuju na razlike među njima. Površine u histogramu iz Primjera 9 opadaju, dok za Primjer 1 vrijedi:

(N1) Površina je koncentrirana oko aritmetičke sredine.
(N2) Površina je približno simetrično raspoređena lijevo i desno od aritmetičke sredine
(N3) Površine rastu odprilike do aritmetičke sredine, potom padaju.

Uz ove uvjete histogram (odnosno pripadna krivulja) ima **zvonolik oblik.** Praksa pokazuje da takav oblik imaju histogrami distribucija kod **velikih uzoraka,** pri mjerenju mnogih statističkih fenomena (**statističkih obilježja**), poput mase, visine, postotka elementa koji se može nekom tehnološkom metodom izdvojiti iz neke rudače, grješaka pri mjerenju, kvocijenta inteligencije itd. Za takva statistička obilježja **uočeno je** sljedeće **empirijsko pravilo** (sl.10.):

U intervalu $< \bar{x} - s', \bar{x} + s' >$ ima oko 68% podataka, tj. oko 2/3 podataka (površine histograma)
U intervalu $< \bar{x} - 2\cdot s', \bar{x} + 2\cdot s' >$ ima oko 95% podataka (površine histograma)
U intervalu $< \bar{x} - 3\cdot s', \bar{x} + 3\cdot s' >$ su gotovo svi podatci (gotovo čitava površina).




Sl. 10

Napomenimo da empirijsko pravilo vrijedi samo približno i ne za sva statistička obilježja i, obično, samo za velike uzorke, dok je Čebiševljev teorem egzaktan (vrijedi bez ikakvih ograničenja). O tome ćemo više govoriti u teoriji vjerojatnosti.

Treba također napomenuti da postotci kod prebrojavanja podataka, neće biti jednaki onima pri procjeni površine histograma. Razlika među njima bit će znatnija za relativno male uzorke.

Za statistička obilježja za koje vrijedi empirijsko pravilo kažemo da su (približno) **normalno distribuirani**.

Već smo vidjeli da su svi podatci iz Primjera 1. u intervalu $< \bar{x} - 2 \cdot s', \bar{x} + 2 \cdot s' >$.
Također, vidi se da je $< \bar{x} - s', \bar{x} + s' > = < 1.951, 2.013 >$,
pa zaključujemo da je u tom intervalu 11 od 20 podataka, što je oko 55%. Da smo gledali površinu u histogramu, to bi bilo odprilike 60% površine, što je još uvijek nešto manje od 68%.
Tako, iako je u tom primjeru statističko obilježje bila količina kemikalije u staklenkama, što bi trebalo biti normalno distribuirano, uočava se odudaranje od empirijskog pravila. Razlog tome je relativno mala veličina uzorka. U sljedećem ćemo primjeru podatke iz Primjera 1 upotpuniti s još 20 novih podataka (20 novih staklenka).

**Primjer 12**. Mjerenjem količine kemikalije u dodatnih 20 staklenka iz Primjera 1. dobiveni su sljedeći podatci i unešeni u tablicu frekvencija (sad uzorak ima duljinu 40)..

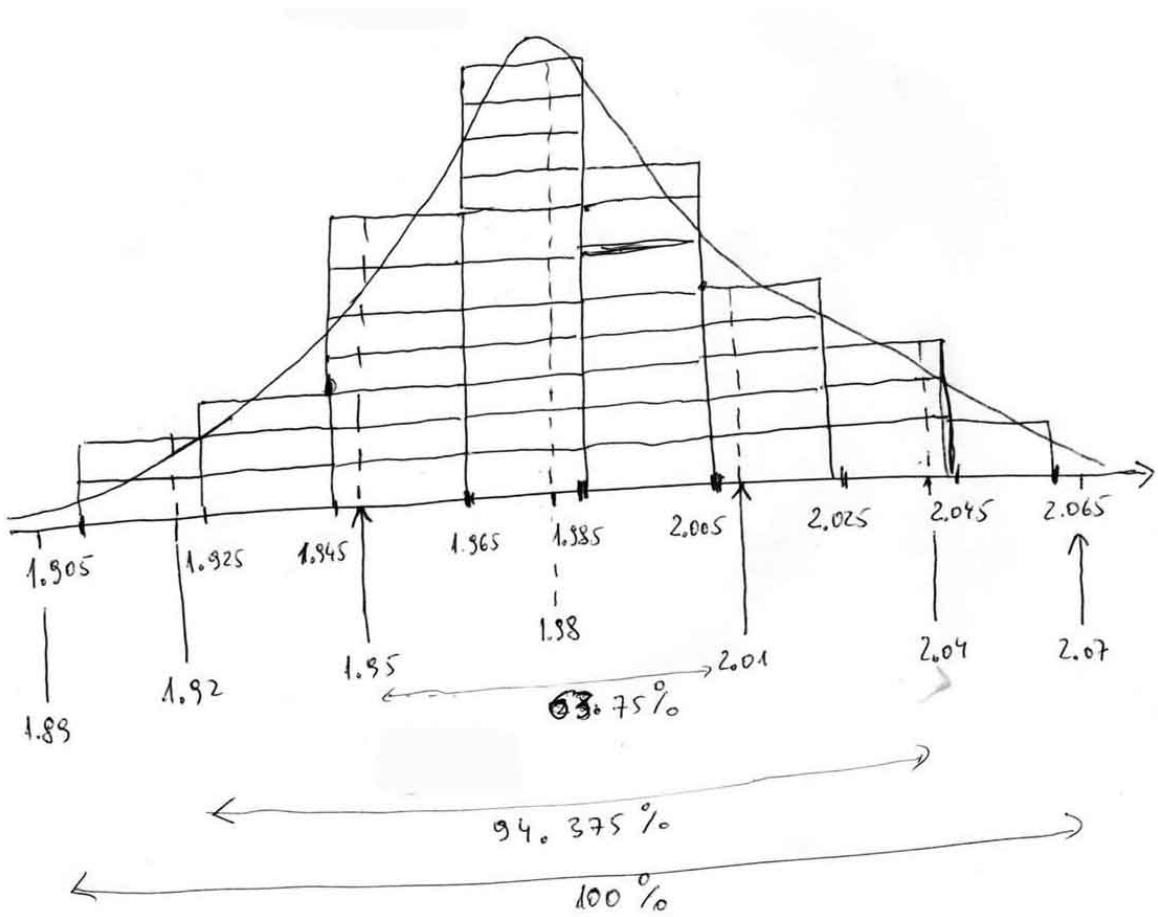
| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1.91 | 1.92 | 1.93 | 1.94 | 1.95 | 1.96 | 1.97 | 1.98 | 1.99 | 2.00 | 2.01 | 2.02 | 2.03 | 2.04 | 2.05 |
| $f_i$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

Provjerimo empirijsko pravilo o normalnoj distribuiranosti količine kemikalije u staklenkama.

Tu je $\bar{x} = 1.98$ i $s' = 0.030455$ (na šest decimala). Zato, na dvije decimale imamo:
$s'=0.03$, $2s'=0.06$, $3s'=0.09$
Vidimo, da je, na dvije decimale:
$< \bar{x} - s', \bar{x} + s' > = <1.95, 2.01>$
$< \bar{x} - 2 \cdot s', \bar{x} + 2 \cdot s' > = <1.92, 2.04>$,
$< \bar{x} - 3 \cdot s', \bar{x} + 3 \cdot s' > = <1.89, 2.07>$.

Budući da je broj podataka relativno malen, **za naslućivanje stanja u cijeloj populaciji**, realnije je razmatrati površine u histogramu, na primjer uz duljinu razreda 0.02, nego prebrojavati podatke uzorka u pojedinim intervalima. Tako dobijemo (vidi sliku 11.):

U intervalu $< \bar{x} - s', \bar{x} + s' >$ je 63.75% površine histograma.
U intervalu $< \bar{x} - 2 \cdot s', \bar{x} + 2 \cdot s' >$ je 94.375% površine histograma
U intervalu $< \bar{x} - 3 \cdot s', \bar{x} + 3 \cdot s' >$ je 100% površine histograma.



Sl. 11.

To se u velikoj mjeri slaže s empirijskim pravilom, što nam je oslonac za vjerovanje da je količina kemikalije u staklenkama (približno) normalno distribuirana.

**Dvije osnovne vrste statističkih obilježja: kontinuirana i diskretna statistička obilježja**.

U Primjeru 1. mjerili smo količinu kemikalije u litrama i rezultate mjerenja zapisivali na dvije decimale. Jasno je da smo, uz pomoć preciznijih uređaja, mjerenja mogli provoditi na tri, četiri ili više decimala. Načelno, rezultati mjerenja mogu biti sve precizniji, tako da za njihove zapisivanje trebamo sve realne brojeve. Zato kažemo da je količina **kontinuirana** ili da ima **kontinuirano statističko obilježje.** Slično je s masom, visinom, obujmom, vremenom itd. Na primjer, u Primjeru 9. mjeri se vrijeme između dviju poruka, pa je riječ o kontinuiranom statističkom obilježju, iako su podatci bili cijeli brojevi. Naime, rezultate smo pisali u sekundama, a da smo imali precizniji uređaj, koji registrira desetinke sekunda, rezultati bi (vjerojatno) bili decimalni brojevi.
Drugo važno statističko obilježje jest **diskretno statističko obilježje**. Ono u pravilu nastaje u pokusima u kojima nešto prebrojavamo. To ćemo ilustrirati primjerom.

**Primjer 13**. Da bismo dobili predodžbu o broju poruka koje pristignu na neku adresu tijekom fiksiranog vremenskog intervala (od 8 do 10 sati prije podne), kontrolirali smo tu adresu u 60 takvih intervala. Dobili smo sljedeće podatke.
4, 3,3, 0, 0, 5, 7, 1, 5, 1, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 4, 0, 3, 3, 1, 4, 5, 6, 2, 1, 3, 2, 2, 0 , 5, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 3, 4, 6, 8, 4, 2, 2, 1, 0, 4, 5, 2, 5, 1, 0, 2, 3, 3, 0, 1, 4, 2 , 5

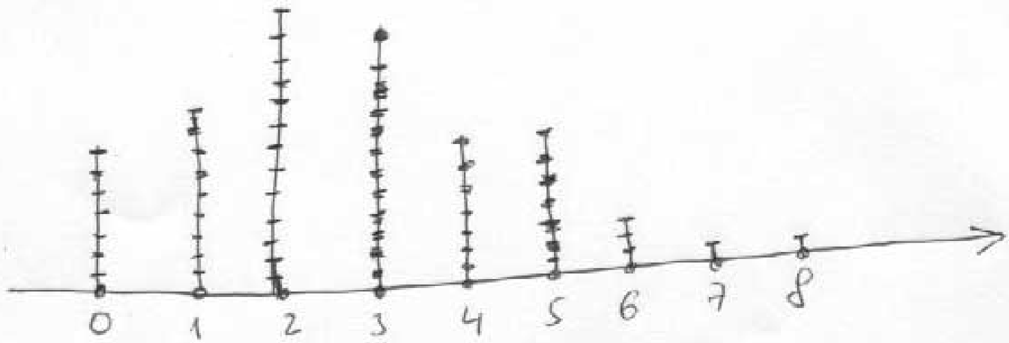
Te podatke možemo predočiti sljedećom tablicom frekvencija.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 7 | 9 | 13 | 12 | 7 | 7 | 3 | 1 | 1 |

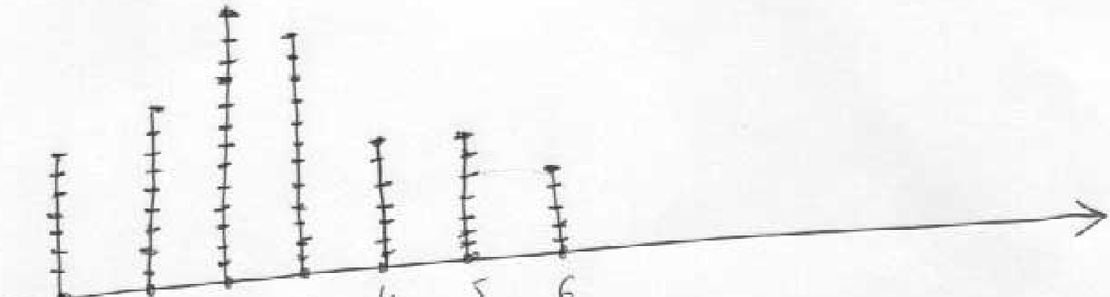
Umjesto ove stvarne tablice frekvencija, obično se koristi sljedeća, modificirana (nakon djelomičnog grupiranja).

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 ili više |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 9 | 13 | 12 | 7 | 7 | 5 |

Tu smo tri šestice, jednu sedmicu i jednu osmicu stavili skupa u razred koji smo nazvali *šest ili više*.
U ovom je primjeru riječ o diskretnom obilježju pa za grafičko predočavanje podataka nije pogodan histogram, već **dijagram frekvencija** kao na slici 12.



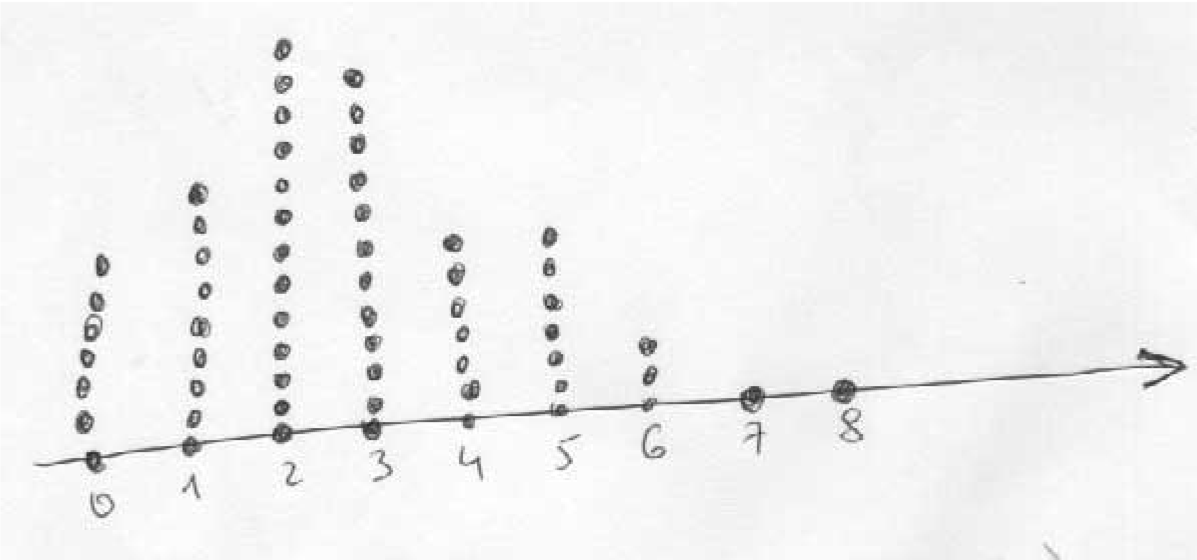

Sl. 12 a)




Sl. 12 b) – nakon djelomičnog grupiranja

Tu smo iznad svake vrijednosti $x_i$ na koordinatnom pravcu postavili dužinu kojoj je duljina jednaka pripadnoj frekvenciji $f_i$. Ukupna duljina ovih dužina jednaka je ukupnom broju podataka *n* (u ovom je primjeru n = 60).

Još je uobičajenije grafičko predočavanje pomoću **dijagrama relativnih frekvencija**, u kojemu je duljina dužine iznad pojedinog podatka $x_i$ jednaka pripadnoj relativnoj frekvenciji $f_i/n$. Ukupna duljina dužina sad je jednaka 1.
Dijagram frekvencija mogli smo predočiti i točkicama kao na slici 13.




Sl. 13

Aritmetička sredina, standardna devijacija, korigirana standardna devijacija, raspon i kvartili dobiju se kao i kod kontinuiranih obilježja. Dakle, na tri decimale dobijemo:

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 7 + 1\cdot 9 + 2\cdot 13 + 3\cdot 12 + 4\cdot 7 + 5\cdot 7 + 6\cdot 3 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1}{60} = 2.783$$

s' = 1.881
s = 1.896
Raspon = 8-0 = 8
Prvi kvartil $q_1 = 1$ (objasnite)
Drugi kvartil – medijan = 3 (objasnite)
Treći kvartila $q_3 = 4$ (objasnite).

**Napomena**. Statističke veličine u primjerima poput Primjera 13. često se ne računaju za sve podatke, već približno, tj. koristeći se podatcima iz modificirane tablice (nakon djelomičnog grupiranja). Tada se dobije:

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 7 + 1\cdot 9 + 2\cdot 13 + 3\cdot 12 + 4\cdot 7 + 5\cdot 7 + 6\cdot 5}{60} = 2.733$$

s' = 1.769
s = 1.784
Raspon = 6 - 0 = 0
Prvi kvartil $q_1 = 1$ (objasnite)
Drugi kvartil – medijan = 3 (objasnite)
Treći kvartila $q_3 = 4$ (objasnite).

# OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI ZA INŽENJERE

# I. VJEROJATNOSNI PROSTOR

## Skup ishoda

U teoriji vjerojatnosti razmatraju se događaji koji se mogu, ali ne moraju dogoditi. Takvi se događaji zovu **slučajnim događajima**. Dakle, slučajni događaj jest događaj koji ne možemo predvidjeti. Takvi se događaji događaju u nekim pokusima ili pri opažanjima nekih prirodnih pojava.

**Primjer 1.** Bacamo dvije kocke označene brojevima od 1 do 6 i registriramo brojeve koji su se pojavili na gornjim stranama kocaka. Zanima nas događaj: *zbroj brojeva na bačenim kockama jest 9*.

Događaj koji razmatramo u tom pokusu je slučajan (zbroj može biti svaki broj od 2 do 12 i ne možemo predvidjeti hoće li zbroj biti 9 ili neće). Od sada ćemo razmatrati samo slučajne događaje i zvat ćemo ih, jednostavno, događajima i označavati velikim slovima abecede: A,B,C, …

Evo nekoliko tipičnih pokusa u kojima nastaju (slučajni) događaji:

1) *Bacamo kocku čije su strane označene brojevima od 1 do 6* (od sada ćemo samo govoriti: *bacamo kocku*).
2) *Iz skupa od 32 karte slučajno biramo jednu kartu.*
3) *Biramo slučajno troznamenkast broj.*
4) *Biramo slučajno dva troznamenkasta broja.*
5) *Od 5 kandidata slučajno biramo dvojicu od kojih će jedan biti predsjednik, a drugi potpresjednik.*
6) *Bacamo novčić dok ne ispadne pismo* (jedna strana novčića zove se **pismo** oznaka $P$, a druga **glava** – oznaka $G$).
7) *Mjerimo vrijeme trajanja kemijske reakcije.*
8) *Mjerimo dnevnu temperaturu.*

Razmotrimo pokus bacanja kocke jedan put i registriramo broj koji se pojavio na gornjoj strani kocke. Možemo govoriti o različitim događajima u tom pokusu, primjerice,
$A$: *ispao je broj 6,*
$B$: *ispao je broj 4,*
$C$: *ispao je broj 2,*
$D$: *ispao je paran broj,*
$E$: *nije ispao broj 2*.

Složit ćete se da su događaji A, B, C jednostavni, a da su događaji D, E složeni. Naime, za događanje događaja $A$ postoji samo po jedna mogućnost, slično je za događaje $B,C$, za događanje događaja $D$ postoje tri mogućnosti (da se dogodi bilo koji od događaja A, B, C), dok za događanje događaja $E$ postoji pet mogućnosti. Jednostavne događaje u nekom pokusu zvat ćemo **ishodima** (**elementarnim događajima**).
Uočite sljedeće: **svaki se događaj sastoji od ishoda**.

Vrlo je važno da u pokusu koji razmatramo znamo odrediti skup ishoda.

**Primjer 2.** Odredimo skup ishoda za pokuse 1-8 navedene prije.

1. **Bacanje kocke jedan put**. U tom pokusu ima šest ishoda; možemo ih označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. **Biranje karte iz skupa od 32 karte**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.

A: as pik, B: as tref, C: sedmica karo, D: kralj herc, E: dečko herc, F: dama herc. Vidimo da u tom pokusu ima ishoda koliko i karata, dakle ima 32 ishoda.

3. **Biranje troznamenkastog broja**. Navedimo nekoliko ishoda (ne označavajući ih slovima): 123, 108, 801, 213. Zaključujemo da u tom pokusu ima ishoda koliko i troznamenkastih brojeva, dakle ima 900 ishoda.

4. **Biranje dvaju troznamenkastih brojeva**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.

*A: izabrali smo 123 i 108,*
*B: izabrali smo 234 i 432,*
*C: izabrali smo 333 i 555.*
Naravno da je svejedno izabrali mi brojeve 123 i 108 ili izabrali brojeve 108 i 123 (bitno je da smo oba puta odabrali ista dva troznamenkasta broja, a ne kojega smo od njih prije izabrali). Zato svaki ishod možemo smatrati **dvočlanim skupom** (koji je podskup skupa svih troznamenkastih brojeva – kojih ima 900). Takvih podskupova ima $\binom{900}{2}$.

5. **Biranje predsjednika i potpredsjednika od 5 kandidata**. Da bismo opisali skup ishoda označimo kandidate malim slovima abecede: a, b, c, d, e. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.
   A: *a* predsjednik, *c* potpredsjednik
   B: *c* predsjednik, *a* potpredsjednik
   C: *d* predsjednik, *e* potpredsjednik.

Uočite da su A, C različiti ishodi iako u oba slučaja sudjeluju iste osobe (naime nije svejedno tko će biti predsjednik, a tko potpredsjednik). Događaje A,B,C možemo zapisati i kraće:
A: ac ;
B: ca;
C: de.
Zaključujemo da svaki ishod **možemo jednoznačno zapisati šifrom** koja se sastoji od dvaju slova (izabranih među slovima a, b, c, d, e). Šifru čitamo tako da je **prvo slovo šifre predsjednik**, a **drugo potpredsjednik**,
primjerice šifra *ec* znači da je *e* predsjednik, a *c* potpredsjednik.
Uočite dva važna svojstva tih šifara.
(i) slova šifre su različita.
(ii) bitno je mjesto slova u šifri (pri zamjeni slova šifra se mijenja).

Svojstvo (ii) u matematici imaju **uređeni parovi**. Dakle svaku takvu šifru, tj. svaki ishod u tom pokusu možemo smatrati uređenim parom kojemu su koordinate različite i iz skupa su $\{a,b,c,d,e\}$.
Uređene parove obično pišemo u oblim zagradama, a koordinate odvajamo zarezom. Tako bi šifru *ab* mogli pisati kao uređeni par *(a,b)*, međutim, radi uštede vremena i prostora pisat ćemo bez zagrada i bez zareza. Ispišimo sve ishode:

*ab, ba, ac, ca, ad, da, ae, ea, bc, cb, bd, db, be, eb, cd, dc, ce, ec, de, ed*.

Vidimo da ih ima 20. Do tog smo broja mogli doći i ovakvim razmišljanjem:
Prvu koordinatu smo mogli izabrati na 5 načina, a drugu (jer mora biti različita od prve) na 4 načina (bez obzira koju smo prvu izabrali). Zato ukupno ima 5·4 = 20 takvih uređenih parova. Drugim rječima, predsjednika možemo izabrati na 5 način, nakon toga potpredsjednika na 4 načina (bez obzira kojega smo izabrali za predsjednika).

**Napomena**. Pravilo koje smo koristili pri računanju broja šifara u gornjem primjeru zove se **osnovnim teoremom prebrojavanja**. Njegov se smisao vidi iz tog primjera. Bitno je da se uoči da se svaki sljedeći korak može učiniti na određeni broj načina, bez obzira koji su bili prethodni koraci. Ako bi, recimo, broj načina na koji možemo učiniti 3. korak ovisio o tome koji smo 2. korak ili koji smo 1. korak izabrali, onda ne bismo mogli koristiti to pravilo.

6. **Bacanje novčića dok ne ispadne pismo**. Evo prijedloga nekoliko ishoda u tom pokusu.
   *A: pismo je ispalo u prvom bacanju.*
   *B: pismo je ispalo u drugom bacanju.*
   *C: pismo je ispalo u desetom bacanju.*

Ako događanje pisma označimo slovom *P*, a događanje glave slovom *G*, onda događaje A, B, C možemo zapisati i ovako:
A: P;
B: GP;
C: GGGGGGGGGP.
Pritom GP znači da je u prvom bacanju ispala glava, a drugom pismo, što je isto kao i da je pismo ispalo u drugom bacanju. Slično, GGGP jest zapis događaja *pismo je ispalo tek četvrti put*. Koliko ima takvih zapisa toliko u tom pokusu ima ishoda, dakle ima ih beskonačno mnogo. Po tome se taj pokus razlikuje od prethodnih. Treba uočiti da je taj skup ishoda prebrojiv, tj. može se postaviti u niz: P, GP, GGP, GGGP, GGGGP, GGGGGP, …
Uočimo još jednu razliku od između ovih ishoda i onih prije. Ovi ishodi nisu ravnopravni, što se vidi i po dužini zapisa. Poslije ćemo vidjeti kako to utječe na vjerojatnost.

7. **Mjerenje vremena trajanja kemijske reakcije**. Tu je ishod svako moguće vrijeme trajanja te kemijske reakcije i može se označiti pozitivnim realnim brojem. Ovisno o pokusu to može biti bilo koji pozitivni realni broj; zato je skup ishoda neki interval u skupu realnih pozitivnih brojeva. S donje je strane taj interval omeđen nulom (vrijeme trajanja kemijske reakcije ne može biti negativno). S gornje strane taj je interval neodređen (koliko najviše može trajati neka kemijska reakcija?). Taj se pokus bitno razlikuje od prethodnih. Naime, u prethodnim je pokusima skup ishoda bio konačan ili prebrojiv, a tu je neprebrojiv.

Treba uočiti da smo vrijeme trajanja kemijske operacije shvatili u teoretskom smislu. U praksi, vrijeme trajanja ovisi o mjernoj skali. Ako, na primjer, mjerimo mjernim instrumentom koji registrira stotinku sekunde (a manje vremenske vrijednosti ne registrira), onda bi skup ishoda bio dio teoretskog intervala, kojeg čine čvorišta podjele tog intervala na stotinke.

8. **Mjerenje dnevne temperature**. Pretpostavimo da je riječ o mjerenju temperature u Celzijevim stupnjevima na slučajno odabranom mjestu na Zemlji, u slučajno odabrano vrijeme. Skup ishoda tog pokusa jest neki interval u skupu realnih brojeva (kao i u prethodnom pokusu). Taj je interval omeđen s donje strane brojem –273 (apsolutna nula), dok je međa s gornje strane neodređena (kao i u 7. pokusu).

Dakle, ishodi u nekom pokusu čine skup (**skup ishoda**, koji ćemo označavati slovom *S*). Treba uočiti tri mogućnosti s obzirom na broj ishoda.

I. skup ishoda je konačan.
II. skup ishoda je beskonačan, ali prebrojiv.
III. skup ishoda je neprebrojiv.

U teriji vjerojatnosti i u praksi pojavljuju se sve tri mogućnosti i sve su važne (to se vidi i iz navedenih primjera). Napomenimo da je, što se vjerojatnosti tiče, II bliže I, nego III. Najvažniji primjeri III. mogućnosti jesu kad je skup ishoda neki interval u skupu realnih brojeva (oni nastaju u pokusima u kojima se nešto mjeri i takve ćemo ponajviše razmatrati).

Ishodi su jednostavni događaji; općenito događaj je sastavljen od jednog ili više ishoda. Zato **svaki događaj možemo interpretirati kao neki podskup skupa ishoda** *S*.
Pri takvoj su interpretaciji ishodi **jednočlani događaji**.
Skup svih ishoda *S* također je događaj; taj događaj zovemo **sigurnim događajem**.
Pokazuje se da je razumno uvesti i **nemogući događaj**; taj događaj interpretiran je **praznim skupom** (oznaka Ø).

**Primjer 3.** Bacamo kocku jedan put. Zapišimo pomoću skupova događaje:
S (sigurni događaj);
*A: ispao je broj veći od dva;*
*B: ispao je paran broj;*
*C: ispao je broj veći od 3, a manji od 5;*
*D: nije ispao neparan broj;*
*E: ispao je broj 4.*

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A = \{3,4,5,6\}$
$B = \{2,4,6\}$
$C = \{4\}$
$D = \{2,4,6\}$
$E = \{4\}$.

Treba uočiti da se događaji A, D sastoje od istih ishoda; kažemo da su ta dva događaja **jednaka** i pišemo A = D. Slično, C = E. Definicija jednakosti događaja u skladu je s definicijom jednakosti skupova.

Zaključujemo:
1. Događaj je podskup skupa svih ishoda.
2. Dva su događaja jednaka ako se sastoje od istih ishoda.

Ako je skup ishoda konačan ili beskonačan prebrojiv, onda se u teoriji vjerojatnosti razmatraju **svi podskupovi skupa ishoda kao događaji**.
Ako je skup ishoda beskonačan neprebrojiv, pokazuje se da **nije dobro prihvatiti sve podskupove skupa ishoda kao događaje**, već samo neke. Ta se, za mnoge iznenađujuća činjenica, može točno matematički obrazložiti; mi to u ovoj knjizi nećemo učiniti.
Napomenimo da su u pokusima u kojima je skup ishoda neki interval skupa realnih brojeva (takvi nas u pravilu zanimaju), **najvažniji i u praksi najzanimljiviji** događaji upravo oni koji se skupovno **mogu interpretirati kao podintervali** skupa ishoda. Dobro je znati da se oni prihvaćaju kao događaji u teoriji vjerojatnosti. Na primjer, u pokusu mjerenja temperature, obično nas zanimaju događaji poput:
A: temperatura je iznad nule.
B: temperatura je manja od 30º.
C: temperatura je između 4º i 5.5º.

**Primjer 4.** Odredimo broj svih događaja u pokusu bacanja kocke jedan put.

Možemo postupiti na više načina.

1. način. Popišimo redom sve podskupove skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ prema broju elemenata (članova) i prebrojimo ih.

nulčlanih ima 1 (samo prazni skup – nemogući događaj)
jednočlanih ima 6 (koliko i ishoda)
dvočlanih ima 15
tročlanih ima 20
četveročlanih ima 15
peteročlanih ima 6
šesteročlanih ima 1 (sigurni događaj S).
Zbrajanjem dobijemo: 1+6+15+20+15+6+1 = 64.
Uočite u tom zbroju simetričnost binomnih koeficijenata.

2. način. Svakom događaju (odnosno podskupu skupa S) pripišimo šifru duljine 6 sastavljenu od brojeva 0,1 kao u primjerima:

događaj (podskup) *ispao je paran broj* ima šifru 010101 što treba čitati kao *podskup ne sadrži 1, sadrži 2, ne sadrži 3, sadrži 4, ne sadrži 5, sadrži 6*.
Slično, 110011 je šifra podskupa (događaja) $\{1,2,5,6\}$.
Dakle kako je 1 na drugom mjestu znači da broj 2 pripada skupu, a kako je broj 0 na trećem mjestu, to znači da 3 ne pripada podskupu; slično je za ostala mjesta. Treba uočiti da događaja ima koliko i takvih šifara. Takvih šifara ima $2^6 = 64$ (prvo se mjesto bira na 2 načina, drugo opet na dva načina, bez obzira kako je izabrano prvo mjesto itd.)

Zaključivanje iz primjera može se provesti općenito i dokazati:

Ako ima $n$ ishoda onda ima $2^n$ događaja.

Dakle, broj svih događaja **eksponencijalno ovisi** o broju ishoda. Zato je već kod relativno malog broja ishoda, broj događaja tako velik da je praktično nedostupan.
Na primjer, ako ima 31 ishod, onda ima $2^{31}$ = 2 147 483 648 svih događaja. Da bismo dobili predodžbu o tom broju, zamislimo da netko broji svih 24 sata dnevno i da svake sekunde može izbrojiti jedan broj. Tada bi mu trebao cijeli život (više od 68 godina) da dobroji do tog broja. Zapisivanje brojeva od 1 do $2^{31}$ trajalo bi još duže, a zapisivanje svih događaja u tom slučaju (nekom šifrom) trajalo bi još duže.

Dobro je što u teoriji vjerojatnosti **nije važan popis svih događaja** u nekom pokusu, već samo neki zanimljivi događaji i broj ishoda koji ih čine.
Ako u pokusu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda, tada, kao i u slučaju konačnog broja ishoda, svaki podskup skupa ishoda reprezentira neki događaj. Tada, naravno, ima beskonačno mnogo svih događaja, a može se dokazati da ih ima neprebrojivo mnogo. Kao i u konačnom slučaju, zanimat će nas samo neki događaji, a ne svi.
Na primjer, kod bacanja novčića dok ne ispadne glava, obično nas zanimaju događaji poput:
*A: pokus je trajao 5 bacanja,*
*B: pokus je trajao bar 5 bacanja,*
*C: pokus je trajao najviše 5 bacanja,*
*D: pokus je trajao između 5 i 10 bacanja,*
*E: pokus je trajao paran broj bacanja.*
Uočite da se događaji A,C,D sastoje od konačno mnogo , a događaji B,E od beskonačno mnogo ishoda.

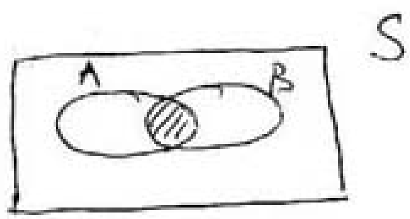
## Algebra događaja

**Veznici i, ili.**
Veznicima se u jeziku povezuju dvije rečenice i tako nastaje nova rečenica, složena od tih dviju. Na primjer, povezivanjem veznikom *i* rečenica:
*A: Matea voli plivanje*,
*B: Matea voli rukomet*,
nastaje rečenica
*A i B: Matea voli plivanje i Matea voli rukomet*.
Kraće, povezivanjem rečenica A, B veznikom *i* nastaje rečenica *A i B*.
U jeziku se, premu **načelu ekonomičnosti**, rečenica *A i B* piše kao:
*Matea voli plivanje i rukomet*.
Treba uočiti da svaka od rečenica A, B nešto tvrdi, a da rečenica *A i B* tvrdi da vrijedi jedno i drugo.
Slično, povezivanjem veznikom *ili* rečenica:
*A: Raspisan je natječaj za inženjera matematike*,
*B: Raspisan je natječaj za profesora matematike*,
nastaje rečenica
*A ili B: Raspisan je natječaj za inženjera matematike ili raspisan je natječaj za profesora matematike.*
Kraće, povezivanjem rečenica A, B veznikom *ili* nastaje rečenica *A ili B*.
Opet, prema načelu ekonomičnosti, ta bi se rečenica pisala kao:
*Raspisan je natječaj za inženjera ili profesora matematike.*
Treba uočiti da rečenica *A ili B* tvrdi da vrijedi jedno ili drugo, ali **dopušta da vrijedi jedno i drugo**. Ta je rečenica tvrdnja da je natječaj za one koji imaju jednu od tih diploma, ali i za one koji imaju obje diplome, dakle, koji su ujedno i inženjeri i profesori matematike (a takvih ima). Treba znati da se veznik *ili* u matematici uvijek shvaća na taj način (**uključivi ili**). U svakidašnjem govoru to uvijek nije tako. Na primjer, u rečenici:
*Marko je položio ispit ocjenom 2 ili 3*,
veznik *ili* ne dopušta jedno i drugo (**isključivi ili**). Da bi se to naglasilo ta bi se rečenica mogla napisati i kao:
*Marko je položio ispit ili ocjenom 2 ili ocjenom 3*.

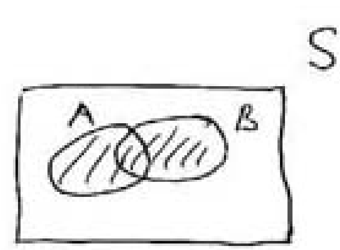
## Zbroj i umnožak događaja.

Pretpostavimo da su rečenice A, B formulacije dvaju događaja u nekom pokusu. Tada su rečenice *A i B*, *A ili B* također formulacije događaja u tom pokusu.
Neka je, na primjer, u pokusu bacanja kocke jedan put:
*A: ispao je broj veći od 2*,
*B: ispao je paran broj.*
Tada je:
*A i B: ispao je broj veći od 2 i ispao je paran broj.*
Također:
*A ili B: ispao je broj veći od 2 ili je ispao paran broj*.
Zapišimo te događaje kao poskupove skupa ishoda (**skupovna interpretacija događaja**).
A = $\{3,4,5,6\}$
B = $\{2,4,6\}$
*A i B* = $\{4,6\}$
*A ili B* = $\{2,3,4,5,6\}$
Treba uočiti da, u skupovnoj interpretaciji, događaju *A i B* odgovara **presjek skupova** A, B; također da događaju *A ili B* odgovara **unija skupova** A,B. To očito vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru.
Uobičajeno je da se događaj *A i B* u teoriji vjerojatnosti zove **umnoškom (produktom)** događaja A, B i da se piše kao $A{\cdot}B$;
također da se događaj *A ili B* zove **zbrojem (sumom)** događaja A,B i da se piše kao $A+B$.
Dakle,
$A{\cdot}B$ = umnožak događaja A,B (dogodio se i događaj A i događaj B; dogodila su se oba od događaja A,B),
$A+B$ = zbroj događaja A,B (dogodio se događaj A ili događaj B; dogodio se barem jedan od događaja A, B).
Kako smo rekli, u skupovnoj interpretaciji, događaju A·B odgovara presjek skupova A,B, tj. skup $A \cap B$, a događaju A+B skup $A \cup B$. Zato se, katkad, ti događaji tako i označuju.

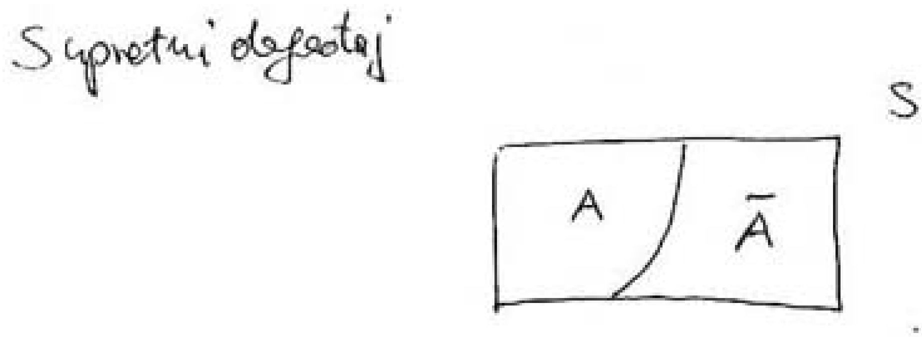
Zbroj i umnožak događaja




A · B
A i B




A + B
A ili B




Treba uočiti da su zbrajanje, odnosno množenje **binarne operacije** na događajima; one dvama događajima pridružuju novi događaj, složen od njih, njihov zbroj, odnosno njihov umnožak.

## Suprotni događaj.

**Nijekom (negacijom)** neke rečenice **protuslovi se** tvrdnji koju ta rečenica izriče. Na primjer,
*A: Marko je položio ispit iz matematike,*
*nije A: Nije Marko položio ispit iz matematike.*
Rečenicom *nije A* protuslovi se rečenici *A*, tj. njom se niječe (negira) tvrdnja izrečena rečenicom *A*. Napomenimo da je rečenicu *nije A*, uobičajeno zapisati kao:
*nije A: Marko nije položio ispit iz matematike.*
(iz **estetskih** i nekih drugih razloga riječ *nije* ide unutra)
Predpostavimo da je rečenica *A* formulacija nekog događaja. Tada je rečenica *nije A* također formulacija nekog događaja kojega zovemo **suprotnim događajem** događaja *A* .
Na primjer, ako je u pokusu bacanja kocke jedan put:
*A: ispao je paran broj*,
onda je suprotni događaj:
*nije A: nije ispao paran broj*.
U skupovnoj je interpretaciji:
A = $\{2,4,6\}$
*nije A* = $\{1,3,5\}$.
Treba uočiti da se događaj *nije A* sastoji upravo od onih ishoda koji ne pripadaju događaju *A*. To znači da je *nije A* **komplement** skupa *A* u skupu svih ishoda *S*. Uobičajeno je da se suprotni događaj *nije A* događaja *A* označava kao $\bar{A}$ i čita kao *ne a*. Dakle,
$\bar{A}$ : suprotni događaj događaja *A* (nije se dogodio *A*).
U skupovnoj interpretaciji $\bar{A}$ je komplement skupa *A* u skupu *S*.

Treba uočiti da je nijekanje događaja **unarna operacija** na događajima; ona svakom događaju pridružuje njemu suprotni događaj.

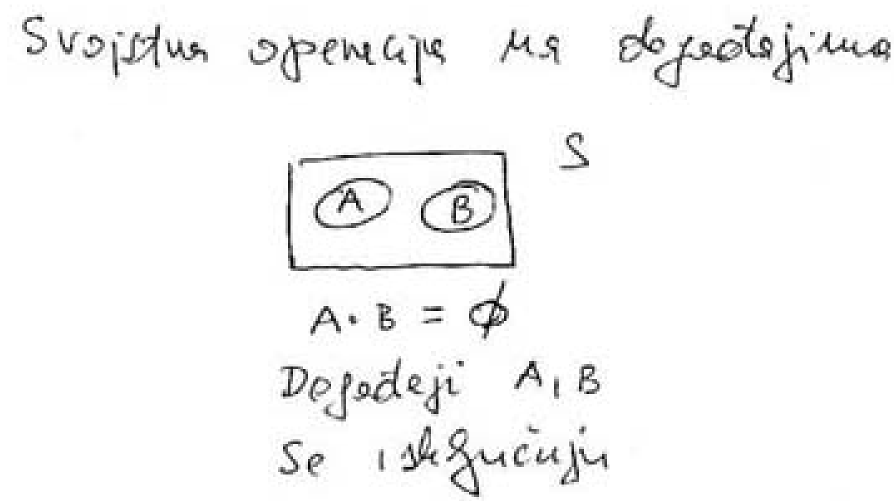
**Primjer 5.** Zapišimo sljedeće događaje i skupovno ih interpretirajmo:
a) *dogodio se A, ali se nije dogodio B*,
b) *dogodio se točno jedan od događaja A, B*,
c) *nije se dogodio nijedan od događaja A, B*,
d) *bar jedan od događaja A,B nije se dogodio*,

e) *dogodio se najviše jedan od događaja A,B.*

a) $A\overline{B}$
b) $A\overline{B}+B\overline{A}$
c) $\overline{A}\,\overline{B}$
d) $\overline{A}+\overline{B}$
e) $\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B$ .

## Svojstva operacija na događajima

U skupovnoj interpretaciji operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja na događajima odgovaraju redom operacije unije, presjeka i komplementiranja (s obzirom na sigurni događaj *S*). Pri tom svojstvima operacija na skupovima odgovaraju pripadna svojstva operacija na događajima. U sljedećoj ćemo tablici u lijevom stupcu zapisati važna svojstva unije, presjeka i komplementiranja na podskupovima skupa *S*, a u desnom pripadna svojstva operacija zbroja, umnoška i nijekanja na događajima. Ta svojstva vrijede za sve dogasđaje *A,B,C*.




| | |
|---|---|
| $A\cup B=B\cup A$ | $A+B=B+A$ |
| $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ | $(A+B)+C=A+(B+C)$ |
| | |
| $A\cap B=B\cap A$ | $AB=BA$ |
| $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ | $(AB)C=A(BC)$ |
| | |
| $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | $A(B+C)=AB+AC$ |
| $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ | $A+(BC)=(A+B)(A+C)$ |

$(A^c)^c = A$ $\qquad\qquad$ $\overline{\overline{A}} = A$

$A \cup A^c = S$ $\qquad\qquad$ $A \cup \overline{A} = S$

$A \cap A^c = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad\qquad$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\qquad\qquad$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

**Primjer 6.** Izrecimo riječima sljedeća svojstva operacija na događajima:

a) $\overline{\overline{A}} = A$
b) $A + \overline{A} = S$
c) $A\overline{A} = \emptyset$
d) DeMorgnova pravila.
   (i) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
   (ii) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

a) Događaj: *nije istina da se nije dogodio A* jednak je događaju *A*. Možemo reći i ovako: suprotni događaj suprotnog događaja jednak je početnom događaju. To u stvari znači da su događaji $A$ i $\overline{A}$ međusobno suprotni ($\overline{A}$ suprotan je događaju $A$, dok je $A$ suprotan događaju $\overline{A}$).
b) Za svaki događaj vrijedi da se dogodio ili nije.
c) Međusobno suprotni događaji ne mogu se istovremeno dogoditi
d) (i) događaj: *nije istina da se dogodio A ili B* jednak je događaju: *nije se dogodio A niti se dogodio B*.
   (ii) događaj: *nije istina da se dogodio A i B* jednak je događaju: *nije se dogodio A ili se nije dogodio B*.

**Skup događaja u nekom pokusu skupa s operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja zovemo algebra događaja.**

Uobičajeno je algebru događaja označavati oznakom $(\underline{A},+,\cdot,\overline{\ })$, gdje $\underline{A}$ označava skup svih događaja. Treba uočiti da ima više različitih algebra događaja (koje su pridružene različitim pokusima), ali da svaka od njih ima gore napisana svojstva.

Vidjeli smo da se dva međusobno suprotna događaja ne mogu istovremeno dogoditi. To znači: ako se dogodio $A$, onda se nije dogodio $\overline{A}$ i obratno, ako se dogodio $\overline{A}$, onda se nije dogodio $A$. Općenito:

**ako se dva događaja ne mogu istovremeno dogoditi, onda kažemo da se događaji isključuju (u skupovnoj interpretaciji to znači da su pripadni podskupovi disjunktni).**

Može se reći i ovako:

**Dva se događaja isključuju ako je njihov umnožak nemogući događaj.**

Ako su dva događaja međusobno suprotni, onda se oni isključuju, međutim događaji se mogu isključivati, a da ne budu suprotni.

**Primjer 7.** Bacamo kocku jedan put. Ispišimo sve događaje koji se isključuju s događajem $A = \{1,2,3\}$.

To su događaji $\{4\},\{5\},\{6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5,6\}$ i Ø (nemogući se događaj isključuje sa svakim događajem). Treba uočiti da ima više događaja koji se isključuju s nekim događajem; među njima je samo jedan suprotan zadanom događaju.

## Vjerojatnosni prostor

Kako smo rekli (slučajni) događaj se može , ali ne mora dogoditi.
**Vjerojatnost** događaja jest **brojčana mjera izgleda** (šanse) da se taj događaj dogodi.
Neka je, na primjer u jednoj kutiji 50 crvenih, 20 bijelih i 30 plavih kuglica (koje se ne razlikuju osim po boji) i neka se pokus sastoji od slučajnog biranja jedne kuglice. Označimo:
*A: izvučena je kuglica crvena*
*B: izvučena je kuglica bijela*
*C: izvučena je kuglica plava.*
U pokusu se može dogoditi bilo koji od događaja A, B, C. Intuitivno je jasno da ti događaji **nemaju jednake izglede** (najveći izgled ima događaj *A* jer crvenih kuglica ima najviše).
Mnogi će, upitani da izgled tih događaja izraze brojčano, odgovoriti da događaj *A* ima šansu (izgled) 50% (jer crvene kuglice čine 50% kuglica), da događaj *B* ima šansu 20%, a događaj *C* šansu 30%.
Ako se analizira zaključak o izgledu izvlačenja crvene kuglice, ustanovit ćemo da se on zasniva na sljedećim činjenicama:

(i) ukupan je broj kuglica 100,
(ii) svaka kuglica ima jednak izgled da bude izvučena (to je smisao uvjeta da se kuglica bira slučajno),
(iii) crvenih kuglica ima 50.

Dakle, u 50 od 100 mogućnosti, izvučena će kuglica biti crvena, pa je izgled izvlačenja crvene kuglice 50%, odnosno $\frac{50}{100}$ .
Taj model zaključivanja provest ćemo općenito, samo što nećemo govoriti o izgledu događaja, već o vjerojatnosti događaja i što vjerojatnost nećemo zapisivati u obliku postotka, već u obliku razlomka (odnosno decimalna broja).

Neka u nekom pokusu ima $n$ ishoda i neka su svi ishodi međusobno ravnopravni (imaju međusobno jednake izglede da se dogode). Pretpostavimo da se događaj $A$ sastoji od $m$ ishoda. Tada je **vjerojatnost događanja događaja** *A* jednaka $\frac{m}{n}$ . To kraće pišemo kao:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

($p$ je početno slovo latinske riječi *probabilis*).

**Primjer 8.** Bacamo kocku jedan put. Izračunajmo vjerojatnost događaja.
*A: ispao je paran broj,*
*B: ispao je broj veći od dva.*

Zapišimo događaj $A$ kao podskup skupa ishoda: $A = \{2,4,6\}$. Tu je m=3, n=6, pa je p(A)=3/6.
Slično je, $B = \{3,4,5,6\}$, pa je p(B) = 4/6.

To rješenje zahtijeva komentar. Naime, pretpostavili smo da brojevi 1,2,3,4,5,6 imaju međusobno jednake izglede da se pojave (da su međusobno ravnopravni), tj. da je kocka homogena. Od sad ćemo, ako ne budemo drukčije rekli, uvijek smatrati da je kocka koju bacamo homogena.
Što bi se moglo dogoditi ako kocka ne bi bila homogena? Zamislimo da smo kocku označili tako da je 6 nasuprot 1, 5 nasuprot 2, 4 nasuprot 3. Zamislimo, također, da smo polovicu kocke koja sadrži stranu označenu brojem 1 izradili od željeza, a onu drugu od aluminija. Ako bi pokus bio bacanje takve kocke, skup ishoda, pa onda i skup događaja, bili bi isti kao i pri bacanju homogene kocke. Međutim vjerojatnosti bi se tih događaja promijenili, jer ishodi ne bi bili međusobno ravnopravni (veća bi bila vjerojatnost da ispane broj 6 nago broj 1).
Treba imati na umu da se bilo koji **praktični pokus** razlikuje od pripadnog **idealnog (zamišljenog, matematičkog) pokusa**.
Objasnimo to. Što znači da bacamo homogenu kocku? Je li uopće moguće izraditi kocku (u matematičkom smislu), posebice homogenu kocku? Ako bismo i imali takvu kocku, teško bi bilo ostvariti apsolutnu ravnopravnost svih ishoda pri bacanju. Zato, kad u teoriji vjerojatnosti govorimo da bacamo homogenu kocku, zamišljamo idealni pokus. Taj bi se idealni pokus mogao formulirati ovako:
*Slučajno biramo jedan od brojeva 1,2,3,4,5,6.*
Postavlja se pitanje može li se ostvariti takav pokus. Evo nekoliko prijedloga:
1. Bacamo homogenu kocku označenu brojevima 1,2,3,4,5,6.
2. U kutiji je 6 kuglica istih polumjera i istih masa označenih brojevima od 1 do 6. Slučajno vadimo jednu kuglicu.
3. Šest listića označeno je brojevima od 1 do 6 i zatvoreno u 6 kuverata. Biramo slučajno jednu od kuverata.

Treba imati na umu da je svaki od tih pokusa samo približno rješenje. Za ove (različite) pokuse kažemo da su **ekvivalentni**. Sa stanovišta vjerojatnosti, oni se ne razlikuju.

**Primjer 9**. Kolika je vjerojatnost da od dviju slučajno odabarnih karata iz kupa od 32 karte budu.
a) dva asa
b) dva herca.

Označimo
*A: izabrana su dva asa,*
*B: izabrana su dva herca.*
Da bismo odredili vjerojatnost treba odrediti broj ishoda, a da bismo odredili broj ishoda treba znati što su ishodi u tom pokusu. Ishod u tom pokusu jest svaki dvočlani podskup

skupa od 32 karte. Zato ishoda ima $\binom{32}{2}$. Budući da je biranje karata slučajno, ishodi su međusobno ravnopravni. Događaj *A* sastoji se od 6 ishoda:
*A* = { {as pik, as karo}, {as pik, as herc}, {as pik, as tref}, {as karo, as herc}, {as karo, as tref}, {as herc, as tref} }.
Broj ishoda od kojih se sastoji događaj *A* mogli smo izračunati i kao $\binom{4}{2}$, jer je to broj dvočlanih podskupova četveročlana skupa. Dakle,

$$p(A) = \frac{6}{\binom{32}{2}} .$$

Slično se dobije

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$$ jer ukupno ima 8 herčeva.

## Svojstva vjerojatnosti događaja.

Iz definicije vjerojatnosti kao omjera svih povoljnih mogućnost i svih mogućnosti proizlaze sljedeća svojstva vjerojatnosti *p* događaja.

1. P(S) = 1 (ukupna vjerojatnost jednaka je 1)
2. p(A+B) = p(A) + p(B), ako se A, B isključuju

Ako u 2. umjesto *B* stavimo $\overline{A}$, dobijemo
p(A+$\overline{A}$)= p(A)+p($\overline{A}$), a kako je A+$\overline{A}$=S i p(S)=1, dobijemo
p(A)+p($\overline{A}$)=1, što pišemo i kao
3. p($\overline{A}$)=1-p(A)
Ta se formula zove **formulom vjerojatnosti suprotnog događaja**
i lako se može izravno izvesti.
Ako se u tu formulu stavi A=S, onda je, $\overline{A}$ =Ø, pa je
4. P(Ø) = 0.
Ta se formula može izravno dobiti i iz definicije vjerojatnosti jer se nemogući događaj sastoji od 0 ishoda.

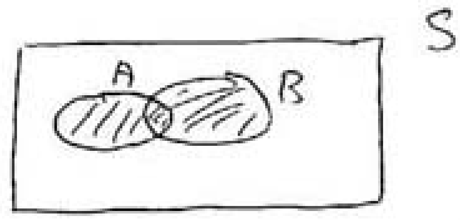
Postavlja se pitanje vjerojatnosti sume događaja za dva događaja koja se nužno ne isključuju. Razmotrimo sliku. Neka je:
card S = n,
card A = m,
card B = k
card AB = r.
Zato je card (A+B)=m+k-r, pa je
p(A+B) =(m+k-r)/n
= m/n+k/n-r/n

= p(A)+p(B)-p(AB), dakle,

5. p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).

Ta se formula zove **formulom zbroja dvaju događaja**. Ona povezuje vjerojatnosti dvaju događaja, te vjerojatnosti njihova zbroja i umnoška. Ako znamo 3 od tih vjerojatnosti, onda pomoću te formule možemo izračunati i četvrtu.

Svojstva vjerojatnosti događaja




$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$

**Vjerojatnosnim prostorom zovemo algebru događaja <u>A</u> skupa s funkcijom vjerojatnosti**
**p: <u>A</u> ….[0,1] koja ima svojstva 1,-5**.

Kad ima beskonačno mnogo ishoda treba dodati još neka svojstva.
Može se pokazati da se iz svojstava 1. i 2. mogu izvesti svojstva 3., 4. i 5.

U sljedećim ćemo primjerima ilustrirati uporabu nekih svojstava vjerojatnosti i nekih svojstava operacija na algebri događaja.

**Primjer 10.** Iz kupa od 32 karte slučajno izvlačimo 2 karte. Odredite vjerojatnost da bude:

a) izvučen je točno jedan as.
b) izvučen je točno jedan kralj.
c) izvučeni su as i kralj.
d) izvučen je as ili kralj.
e) nije izvučen as ili nije izvučen kralj.

Označimo:
*A: među izvučenim kartama je točno jedan as,*
*B: među izvučenim je kartama točno jedan kralj.*
Da bismo izračunali vjerojatnost navedenih događaja treba uočiti da se *A* sastoji od dviju komponenata: asa i neke karte koja nije as. As se bira na 4 načina, a karta koja nije as na 28 načina, bez obzira koji je as izabran. Zato je:

$p(A)=4\cdot 28/\binom{32}{2}$

p(B)=p(A)

Događaj: *izvučen je as i kralj* jest umnožak događaja *A,B*. Slično kao do sada zaključujemo da je:

$p(AB)=4\cdot 4/\binom{32}{2}$

d) događaj: *izvučen je as ili kralj* jest zbroj događaja *A,B*. Koristeći se formulom za vjerojatnost zbroja događaja dobivamo:

$$p(A+B) = p(A)+p(B)-p(AB)$$
$$=128/\binom{32}{2}$$

e) događaj: *nije izvučen as ili nije izvučen kralj* jest zbroj događaja $\overline{A}$, $\overline{B}$. Koristeći se DeMorganovom formulom i formulom vjerojatnosti suprotnog događaja dobivamo:

f) $p(\overline{A}+\overline{B})= p(\overline{AB}) =1-p(AB)$

$$=1 - 16/\binom{32}{2}$$

**Primjer 11.** Izvedimo formulu za vjerojatnost zbroja triju događaja.

$$\begin{aligned}p(A+B+C)&=p((A+B)+C)\\&=p(A+B)+p(C)-p((A+B)C)\\&=p(A)+p(B)-p(AB)+p(C)-p(AC+AC)\\&=p(A)+p(B)-p(AB)+p(C)-p(AC)-p(BC)+p(ACBC)\\&=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABCC)\\&=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC).\end{aligned}$$

Svojstva vjerojatnosti (1.-5.) na algebri događaja izveli smo uz pretpostavku da je skup ishoda konačan i da su ishodi međusobno ravnopravni. Štoviše, pokazali smo da se svojstva 3.-5. izvode iz prvih dvaju svojstava. Napišimo opet ta dva svojstva vjerojatnosti:

1. $p(S) = 1$
2. $p(A+B) = p(A)+p(B)$, za svaka dva događaja A,B koja se isključuju.

Ta su dva svojstva toliko intuitivno jasna da možemo pretpostaviti da vrijede na svakoj algebri događaja. Naravno, tada vrijede preostala tri svojstva. Također, ako je broj ishoda beskonačan prebrojiv ili ako je skup ishoda interval u skupu realnih brojeva, onda nećemo više imati onu formulu vjerojatnosti kao omjera povoljnih i svih mogućnosti. Primjere računanja vjerojatnosti u slučaju beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda vidjet ćemo poslije. Sad ćemo razmotriti neke primjere vjerojatnosti u slučaju kad je skup ishoda interval u skupu realnih brojeva.

## Geometrijska vjerojatnost.

U sljedećim ćemo primjerima ilustrirati kako se može računati vjerojatnost u nekim pokusima s neprebrojivo mnogo ishoda.

**Primjer 12.** Predpostavimo da čestica može ravnopravno biti u svakoj točki intervala duljine 10. Odredimo vjerojatnost da udaljenost točke od središta intervala bude:

a) jednaka 2,
b) manja ili jednaka 2,
c) između 2 i 3.

Ishode tog pokusa možemo interpretirati točkama zadanog intervala; dakle skup je ishoda upravo zadani interval. Zato ishoda ima beskonačno mnogo.

a) označimo:

*A: udaljenost čestice od središta intervala jednaka je 2.*

Taj se događaj sastoji od dvaju ishoda (čestica može biti lijevo ili desno od središta). Budući da ima beskonačno mnogo ishoda, a svi su ishodi ravnopravni (tako shvaćamo tvrdnju da čestica ravnopravno može biti u svakoj točki intervala), zaključujemo da je p(A)=0 (intuitivno: omjer broja 2 i beskonačnosti jednak je 0). To možda može stvoriti nedoumicu: događaj *A* je moguć, ali mu je vjerojatnost jednaka nuli.

Da se uvjerimo u to i matematičkim rezoniranjem, pretpostavimo da je p(A)>0. Vjerojatnost da je udaljenost čestice od središta jednaka 2.1; 2.11; 2.111 itd. jednaka je p(A) (jer se svaki od tih događaja također sastoji od po dvaju ishoda, a svi su ishodi ravnopravni). Ako bismo uzeli zbroj dovoljno mnogo tih događaja (koji se međusobno isključuju), dobili bismo događaj kojemu je vjerojatnost veća od 1 (zbog svojstva 2. vjerojatnosti). To je u suprotnosti sa svojstvom 1. (da je ukupna vjerojatnost jednaka 1). Dakle, ne može biti p(A)>0 pa mora biti p(A)=0.

Treba imati na umu sljedeće: taj smo zaključak izveli iz pretpostavke da zaista postoji vjerojatnost na algebri događaja u ovom pokusu (i da ona ima svojstva 1. i 2.).

b) Označimo:

*B: udaljenost čestice od središta intervala manja je ili jednaka 2.*

Taj se događaj interpretira intervalom duljine 4, simetričnim s obzirom na središte zadanog intervala duljine 10 (taj interval možemo označiti slovom *S*, kao sigurni događaj). Vidimo da vjerojatnost ne možemo računati dijeljenjem broja povoljnih ishoda s brojem svih ishoda (kao u slučaju konačno mnogo ishoda) jer bismo dobili beskonačno kroz beskonačno. Međutim , možemo postupiti slično i, kao vjerojatnost događaja uzeti omjer duljine intervala koji reprezentira događaj i duljine ukupnog intervala. Dakle,

p(B) := duljina intervala *B*/duljina intervala S
= 4/10.

Treba uočiti da smo *prihvatili razumnim* ovakvo računanje vjerojatnosti (ali da nismo dokazali da je to tako). Napomenimo da pri ovakvoj interpretaciji vjerojatnosti u tom pokusu i pri interpretaciji da su točke intervali duljine 0, proizlazi da je vjerojatnost svakog od ishoda jednaka 0 (što smo dobili i u a)). Također, može se pokazati da je ovakvo rezoniranje matematički konzistentno.

c) Označimo:

*C: udaljenost čestice od središta intervala je između 2 i3.*

Taj se događaj interpretira unijom dvaju intervala, svakog duljine 1. Zato je:
p(C)=2/10.

**Primjer 13**. U svakom trenutku vremenskog intervala [0,T], ravnopravno mogu doći dva signala. Ako vremenski razmak dolaska signala bude manji od *v* (gdje je *v* mali pozitivan broj), doći će do smetnje. Odredimo vjerojatnost da dođe do smetnje.

Kako prvi signal može doći u bilo kojem trenutku zadanog intervala, a drugi signal također, skup ishoda tog pokusa možemo interpretirati skupom svih uređenih parova (x,y), gdje su x, y realni brojevi sa svojstvom $0<x,y<T$. Tu *x* označava vrijeme dolaska prvog, a *y* vrijeme dolaska drugog signala. Uočite da je taj skup kvadrat kojemu
je duljina stranice *T*.

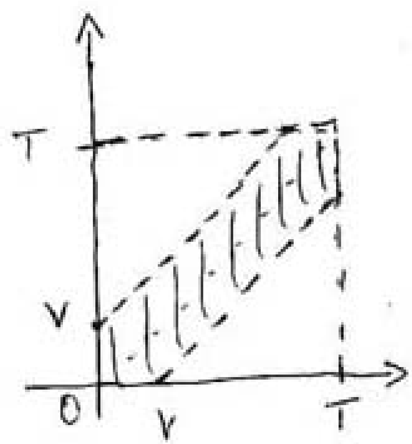
Pri toj interpretaciji, signali će doći u vremenskom intervalu manjem od *v*, ako je

$x-y<v$.
Skup uređenih parova s tim svojstvom osjenjen je na slici i on reprezentira traženi događaj $A$. Vjerojatnost ćemo interpretirati kao **omjer površine skupa koji reprezentira događaj A i ukupne površine**. Dakle:

$$p(A)=\frac{T^2-(T-v)^2}{T^2}.$$

Vjerojatnost u ovim primjerima naziva se **geometrijskom**, jer smo se pri njenoj definiciji koristili **geometrijskom predodžbom**.

Geom. vjer.




## Statistička definicija vjerojatnosti

Što znači da je pri bacanju novčića jedan put, vjerojatnost da ispadne $P$ jednaka 1/2? Znači li to da će se pri 2 bacanja novčića jednom dogoditi $P$. Naravno da ne znači. Znači li to da će se pri 20 bacanja novčića 10 puta dogoditi $P$? Ne znači ni to. Pokusom se možemo uvjeriti da će se pri 200 bacanja novčića otprilike 100 puta dogoditi $P$ (a ujedno i $G$).
Evo rezultata broja pisama u nekoliko pokusa bacanja novčića po 200 puta. Zapisali smo I međurezultate nakon 20, 50, 100 bacanja.

| | 20 bacanja | 50 bacanja | 100 bacanja | 200 bacanja |
|---|---|---|---|---|
| 1.pokus | 8 | 22 | 54 | 103 |
| 2.pokus | 12 | 26 | 56 | 109 |
| 3.pokus | 8 | 21 | 45 | 94 |
| 4.pokus | 11 | 24 | 51 | 106 |
| 5.pokus | 8 | 21 | 44 | 89 |

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
| 6.pokus | 9 | 27 | 47 | 93 |
| 7.pokus | 12 | 29 | 54 | 110 |
| 8. pokus | 10 | 27 | 54 | 103 |

Izračunajmo omjer broja pojavljivanja pisma i ukupnog broja bacanja u tim pokusima.

1.pokus 103/200 = 0.515

2.pokus 109/200 = 0.545

3.pokus 94/200 = 0.47

4.pokus 106/200 = 0.53

5.pokus 89/200 = 0.445

6.pokus 93/200 = 0.465

7.pokus 110/200 = 0.55

8.pokus 103/200 = 0.515

Treba uočiti da se omjeri grupiraju oko broja 0.5, tj. da je pri svakom od 200 bacanja novčića, omjer približno jednak 0.5.
Ukupno, tj. u 1 600 bacanja, događaj *P* dogodio se 807 puta. Pripadni je omjer:
807/1 600 = 0.504375.
Taj je rezultat na dvije decimale jednak broju 0.5.
Ta nas razmatranja navode na **statističku definiciju vjerojatnosti** kao **graničnu vrijednost relativnih frekvencija** događaja. Pojasnimo to.
Uočimo u nekom pokusu događaj *A*. Da bismo statistički odredili vjerojatnost tog događaja ponavljajmo izvođenje tog pokusa. Ako se pri *n* izvođenja tog pokusa događaj *A* dogodio *m* puta, onda se *m* zove **frekvencija**, a kvocijent *m/n* **relativna frekvencija** događaja *A* (za *n* izvođenja pokusa).
**Statistička vjerojatnost događaja *A* jest granična vrijednost reletivnih frekvencija tog događaja kad broj izvođenja pokusa teži k beskionačnosti**. Kraće:
p(A) = lim m/n.
Naravno, nema matematičkih razloga koji bi bezuvjetno garantirali da će relativne frekvencije imati limes. Pokusi, poput onog s novčićem, uvjeravaju nas u to. Vidimo da se relativne frekvencije grupiraju oko teoretske vjerojatnosti.

**Primjer 14**. Treba provjeriti je li izrađena kocka homogena.

Taj bi se problem možda mogao riješiti uz pomoć tehnološke metode kojom se provjerava homogenost materijala. Pretpostavimo da to nismo u mogućnosti, tj. da nemamo nikakvih pomagala za provjeru homogenosti. Tada homogenost možemo provjeriti pomoću statističke vjerojatnosti. Ako pri velikom broju bacanja kocke ustanovimo da su se brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6 približno jednako puta dogodili, tj. ako su njihove relativne frekvencije približno jednake

1/6, možemo smatrati da je kocka homogena, inače ne. Vidjet ćemo poslije kako se egzaktnije odlučuje jesu li rezultati približno jednaki ili ne.

Statistička vjerojatnost nije samo alternativa za taoretsku vjerojatnost. U mnogim se pokusima i ne može doći do vjerojatnosti osim tako. Na primjer, ako želimo odrediti vjerojatnost da se atom radija raspadne u vremenu *t*. Naravno da se tada može govoriti samo o približnoj vjerojatnosti. Također, točnost se rezultata povećava ako se broj izvođenja pokusa (odnosno broj mjerenja) povećava.

## Uvjetna vjerojatnost. Nezavisni događaji

Ako saznamo neku informaciju o pokusu, može se dogoditi da se vjerojatnosti događaja promijene. To ćemo pokazati na primjerima.

**Primjer 15**. Kolika je vjerojatnost da je pri bacanju kocke ispao broj 6 ako znamo da je ispao paran broj?

Označimo:
*A: ispao je broj 6.*
*B: ispao je paran broj.*
Naravno, $p(A) = 1/6$ ; $p(B) = 3/6$ .
Međutim ako znamo da je ispao paran broj, nema više 6 nego samo 3 mogućnosti (ishoda): ispao je broj 2 ili broj 4 ili broj 6. Kako su te 3 mogućnosti ravnopravne, zaključujemo da je sad vjerojatnost da ispadne 6 jednaka 1/3. To se zapisuje kao:
$p(A|B) = 1/3$
i čita kao: *vjerojatnost da se dogodi A ako se dogodio B je 1/3* (odnosno *uvjetna vjerojatnost događaja A uvjetno o B jednaka je* 1/3).
Vidimo da se u tom primjeru uvjetna vjerojatnost događaja razlikuje od njegove izvorne vjerojatnosti.

Dakle, ako znamo da se dogodio događaj *B*, onda se skup ishoda mjenja. Taj novi skup ishoda jest upravo skup ishoda koji čine događaj *B*. Tada događaj *A* čine samo oni njegovi ishodi koji su ujedno i u *B*, tj. oni koji su u $A \cap B$ , tj. u *AB*. Koristeći se time izvodimo:

$$\begin{aligned} p(A|B) &= \text{card}\,(AB)/\text{card}\,B \\ &= (\text{card}(AB)/\text{card}S)/(\text{card}B/\text{card}\,S) \\ &= p(AB)/p(B). \end{aligned}$$

Tom je formulom uvjetna vjerojatnost izražena pomoću izvorne vjerojatnosti. Treba uočiti da taj izvod vrijedi za pokus u kojemu je skup ishoda konačan i u kojemu su ishodi međusobno ravnopravni.
Do iste bi se formule došlo ako bismo imali pokus u kojemu se skup ishoda *S* interpretira kao interval realnih brojeva, kao podskup ravnine ili kao podskup prostora. Oznakom *m* označimo duljinu, površinu, odnosno obujam. Tada izvodimo:

$$\begin{aligned} p(A|B) &= m(AB)/m(B) \\ &= (m(AB)/m(S))/(m(B)/m(S)) \\ &= p(AB)/p(B). \end{aligned}$$

Dakle, uvijek dolazimo do iste formule:

$$p(A|B) = p(AB)/p(B)$$

To je **formula uvjetne vjerojatnosti**.
Ta se formula može napisati i u obliku:

$$p(AB) = p(A|B)p(B)$$

Ta se formula zove **formulom umnoška (produktnom formulom)**.

U navedenom primjeru lako smo prihvatili da se vjerojatnost ispadanja broja 6 promijenila kad smo saznali da je ispao paran broj. Međutim, često okolnosti u kojima se pojavljuje uvjetna vjerojatnost znaju, barem na prvi pogled, izgledati paradoksalno. Navedimo jedan takav slučaj.

**Primjer 16.** Trgovački je putnik došao u posjet bračnom paru. U ragovoru s njima saznao je da imaju dvoje djece. U to je u sobu ušao dječak.

(i) Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete dječak?

(ii) U nastavku razgovora trgovački je putnik saznao da je drugo dijete mlađe. Kolika je sad vjerojatnost da je drugo dijete dječak?

Prije nego prijeđemo na rješavanje ovog problema (za koje je potrebno i dodatno pojašnjenje), pogledajmo jedan drugi primjer, analogan ovome, ali nešto jasniji (vi sami možete pokušati riješiti problem s djecom).

**Primjer 17**. Pokus se sastoji od bacanja dviju kocaka.

(i) Pretpostavimo da smo saznali da je na prvoj kocki bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio broj 6?

(ii) Pretpostavimo da smo saznali da je na jednoj od kocaka bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je na drugoj kocki bio 6?

Razmotrimo ovaj primjer (radi provjere svoga osjećaja za problem, pokušajte odgovoriti je li rezultat u oba slučaja isti).
U prvom slučaju znamo da je na prvoj kocki bio rezultat 6. Intuitivno nam je jasno da ta činjenica **ne može utjecati** na vjerojatnost događaja da na drugoj kocki bude 6 (što znači da vjerojatnost treba ostati 1/6). Tome i sličnim okolnostima više ćemo se posvetiti u sljedećoj jedinici, a sada tvrdnju i obrazložimo.
Ako je na prvoj kocki bio 6, onda su mogle nastati sljedećih 6, međusobno ravnopravnih, mogućnosti: 61, 62, 63, 64, 65, 66 , gdje ovi zapisi imaju uobičajeno značenje (na primjer 63 znači da je na prvoj kocki bio 6, a na drugoj 3). Samo u jednoj od tih mogućnosti i na drugoj je kocki bio 6 (to je mogućnost 66). Zato je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio 6 jednaka 1/6 (kao da prvu kocku nismo ni bacali).

U drugom slučaju (koji se **samo naizgled ne razlikuje** od prvoga) znamo da je na jednoj od kocaka bio 6 (ali ne znamo na kojoj). Sad ima 11 međusobno ravnopravnih mogućnosti: 61,62,63,64,65,66,56,46,36,26,16, ali sad ima šest mogućnosti u kojima je 6 na drugoj kocki. Zato je vjerojatnost da na drugoj kocki bude 6 jednaka 6/11. Vidimo da se vjerojatnosti bitno razlikuju.

Sad ćemo pokušati slično razmatranje primijeniti na slučaj trgovačkog putnika i djece, koji je još uvijek mističan (jer kakve veze može pojam *mlađi* imati s pojmom spola). Prije svega dogovorimo se da je za rođeno dijete jednaka vjerojatnost da bude dječak kao i da bude curica). Znademo da to u stvarnosti nije baš tako (vjerojatnost rađanja dječaka, odnosno curice ovisi o mnogim okolnostima, koje se često i mijenjaju, ovise i o konkretnom bračnom paru i ona se može samo približno odrediti, kao statistička vjerojatnost).

Ako slovom *D* označimo dječaka, a slovom *C* curicu, onda za dvoje djece mogu nastati sljedeće 4 ravnopravne mogućnosti:
CC,CD,DC,DD
(gdje, na primjer, CD znači da je bračni par najprije dobio curicu, potom dječaka, itd.).
Nakon što je vidio dječaka, trgovački je putnik saznao da su ostale 3 ravnopravne mogućnosti:
CD,DC, DD
pa je u 1. slučaju vjerojatnost da i drugo dijete bude dječak jednaka 1/3 (a ne 1/2 kako bi se brzopleto moglo pomisliti).
U drugom je slučaju trgovački putnik dobio dodatnu informaciju na osnovi koje je zaključio da su ostale dvije ravnopravne mogućnosti:
CD, DD
(jer je starije dijete dječak). Dakle, u ovom je slučaju vjerojatnost da i drugo dijete bude dječak jednaka 1/2 (a ne 1/3, kao prije).

**Pitanje.** Nakon usvajanja dogovora da je kod svakog para jednaka vjerojatnost da se rodi curica kao i da se rodi dječak, uočite da je pokus dobivanja dvoje djece ekvivalentan pokusu bacanja novčića dva puta. Kako biste formulirali analogni zadatatak u tom pokusu?

**Zadatak 1.** Od triju kutija dvije su prazne, a u jednoj je nagrada. Natjecatelj slučajno odabire jednu od kutija za koju misli da je u njoj nagrada. Prije nego je otvori netko pogleda u one preostale dvije kutije, pokaže jednu koja je prazna i ponudi natjecatelju da zamijeni svoju kutiju s onom preostalom. Isplati li se to natjecatelju? Izračunajte relevantne vjerojatnosti.

**Zadatak 2.** Bomba se deaktivira tako da se prerežu tri točno odredjene žice, a da se četvrta ne prereže. Osoba W koja je prisiljena na to da pokuša deaktivirati bombu izabere slučajno jednu od žica koju neće prerezati (dok ostale tri hoće).
(a) Nakon slučajnog odabira jedne od preostalih triju žica, W je prereže i bomba ne eksplodira. Ima li W razloga promijeniti svoj odabir žice koju je na početku odabrao da je ne reže?
(b) Razgledavanjem triju žica koje je odlučio prerezati W uoči da je jednu pregrizao miš. Ima li sad W razloga promijeniti svoj početni odabir?

Navedimo još nekoliko karakterističnih primjera.

**Primjer 18**. U kutiji je 5 crvenih i 8 bijelih kuglica. Kuglice izvlačimo redom iz kutije (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost:
a) da je druga izvučena kuglica bijela, ako je prva bila bijela,
b) da je druga izvučena kuglica bijela ako je prva izvučena bila crna,

Označimo:
*B1: prva izvučena kuglica je bijela,*
*B2: druga izvučena kuglica je bijela,*
*C1: prva izvučena kuglica je crvena,*
*C2: druga izvučena kuglica je crvena.*

a) Treba izračunati p(B2|B1). Ako je prva izvučena kuglica bila bijela, onda je u kutiji ostalo 12 kuglica: 5 crvenih i 7 bijelih. Zato je:

$p(B2|B1) = 7/12$.
b) $p(B2|C1) = 8/12$.

**Primjer 19**. Neka je pokus kao u prethodnom primjeru. Izračunajmo vjerojatnost da:
a) prva izvučena kuglica bude bijela, a druga crvena,
b) izvučene kuglice budu različitih boja.

Zadržimo dosadašnje oznake.
a) Treba izračunati vjerojatnost umnoška događaja B1, C2. Dobijamo:
$p(B1C2) = p(C2B1)$ zbog komutativnosti umnoška
$= p(C2|B1)p(B1)$ formula umnoška
$= (5/12)(8/13)$
$= 10/39$,
b) $p(B1C2+C1B2) = p(B1C2)+p(C1B2)$ jer se događaji B1C2,C1B2 isključuju
$= 10/39+p(B2|C1)p(C1)$ zbog a) i prema a)
$= 10/39+(8/12)(5/13)$
$= 20/39$.

Treba uočiti da događaji B1C2, C1B2 imaju jednake vjerojatnosti (iako su različiti). To smo dobili računanjem, koristeći se formulom umnoška. Postavlja se pitanje jesmo li to mogli zaključiti i bez računanja. Jesmo, koristeći se simetrijom. Zamislimo da netko zamijeni redoslijed kuglica (nakon izvlačenja). Tada ona kuglica koja je izvučena prva postaje druga i obratno. Općenito, događaj B1C2 postaje događajem B2C1 i obratno. Kako vjerojatnost ne ovisi o izvođenju pokusa, već samo o njegovu karakteru, vjerojatnosti tih događaja moraju biti jednake.

**Primjer 20**. Neka je pokus kao u prethodna dva primjera, samo neka nam izvođač sakrije prvoizvučenu kuglicu i neka je drugoizvučena kuglica bila bijela. Kolika je vjerojatnost da je sakrivena kuglica bijela?

Neki će na brzinu reći da to što je izvučeno drugi put ne može utjecati na rezultat prvog izvlačenja (jer je vremenski poslije njega). To je pogrješno. Osvrnut ćemo se na to poslije, a sada izračunajmo traženu vjerojatnost. Zadržimo dosadašnje oznake.
$p(B1|B2) = p(B1B2)/p(B2)$ formula uvjetne vjerojatnosti
$= p(B2B1)/p(B2)$ komutativnost množenja
$= p(B2|B1)p(B1)/p(B2)$ formula umnoška
$= (7/12)\, p(B1)/p(B2)$
$= 7/12$ jer je $p(B1) = p(B2)$ iz razloga simetrije koji smo objasnili u prethodnom primjeru. To ćemo, na drugi način, objasniti poslije.

Treba uočiti da je $p(B1) = 8/13$, a da smo dobili $p(B1|B2) = 7/12$, pa rezultat drugog izvlačenja utječe na rezultat prvog izvlačenja.

Pokažimo sad, na jednostavnom primjeru, da rezultat drugog izvlačenja može utjecati na rezultat prvoga. Zamislimo da smo u kutiji imali 1 bijelu i 3 crvene kuglice. Pretpostavimo da nismo pogledali boju prve kuglice, a da je druga bila bijela. Sada znamo, bez gledanja, da je prva kuglica crvena (jer ima samo jedna bijela, a ta je već izvučena). Dakle, $p(B1) = 1/4$, ali je $p(B1|B2) = 0$.

U nekoliko smo prethodnih primjera vidjeli da vjerojatnost nekog događaja ovisi o tome je li se dogodio neki drugi događaj.

**Ako je $p(A|B) \neq p(B)$, onda kažemo da je događaj A zavisan o događaju B.**
**Ako je $p(A|B) = p(B)$, onda kažemo da je događaj A nezavisan o događaju B.**

**Primjer 21**. Bacamo kocku 1 put. Ispitajmo zavisnost događaja A: {1,2,3,4} o događajima B: {3,4,5}, C: {4,5,6}.

$p(A) = 4/6$,
$p(A|B) = 2/3$ (od triju mogućnosti: 3,4,5 dvije su povoljne: 3,4)
$p(A|C) = 1/3$ (od triju mogućnosti: 4,5,6 jedna je povoljna: 4).
Dakle, $p(A|B) = p(A)$ pa je A nezavisan o B,
$p(A|C) \neq p(A)$ pa je A zavisan o C.

Teško je bilo unaprijed, bez računanja, znati da je, u gornjem primjeru, $A$ nezavisan o $B$, a zavisan o $C$. Znači li to da nezavisnost dvaju događaja nema intuitivnu pozadinu, tj. da ćemo uvijek nezavisnost, odnosno zavisnost događaja provjeravati računanjem? Ne znači. Jedan od najvažnijih slučajeva u kojima ćemo intuitivno prepoznavati nezavisnost jeste uzastopno izvođenje jednog te istog pokusa ili uzastopno izvođenje različitih pokusa koji ne utječu jedan da na drugoga (nezavisno izvođenje jednog ili više pokusa).

Prije nego nastavimo s primjerima, razmotrimo još jednom definiciju nezavisnosti događaja $A$ o događaju $B$:
1. $p(A|B) = p(A)$
$p(AB)/p(B) = p(A)$
2. $p(AB) = p(A)p(B)$
Treba uočiti da je formula 1. nesimetrična (to znači: ako slova $A,B$ zamijene mjesta, formula se mijenja). Također treba uočiti da je formula 2. simetrična. Ako $A,B$ zamijene mjesta dobije se formula $p(BA) = p(B)p(A)$, koju, zbog komutativnosti množenja događaja i komutativnosti množenja brojeva, možemo smatrati formulom 2. S druge strane, ta je formula samo drukčije napisana formula
3. $p(B|A) = p(B)$
(naravno, smatramo da je $p(A)>0$ i $p(B)>0$). Zaključujemo:
Ako je $A$ nezavisan o $B$, onda je $B$ nezavisan o $A$.
Drugim riječima,
Nezavisnost događaja jest simetrična relacija.
Zato se govori da su $A$, $B$ međusobno nezavisni, odnosno da su međusobno zavisni.
Formula 2. zove se **produktnom formulom** za nezavisne događaje.
Ta se formula može shvatiti kao:

**Dva su događaja nezavisna ako i samo ako je vjerojatnost njihova umnoška jednak umnošku njihovih vjerojatnosti.**

Treba uočiti neznatnu razliku između tvrdnja formula 1., 3. s jedne i formule 2. s druge strane. U formuli 1. mora biti $p(B)>0$; slično, u formuli 3. mora biti $p(A)>0$, dok formula 2. vrijedi i ako je jedan od $p(A)$, $p(B)$ (ili oba) 0. Dogovorom se uzima da je događaj kojemu je vjerojatnost 0 nezavisan od bilo kojeg događaja, odnosno da je svaki događaj nezavisan od događaja kojemu je vjerojatnost jednaka 0 (to posebice vrijedi za nemogući događaj). Zato je formula 2. potpuni zapis nezavisnosti dvaju događaja.

**Primjer 22**. Bacamo kocku dva puta. Provjerimo nezavisnost događaja:
*A: prvi je put ispao 6,*
*B: drugi je put ispao 5.*

Intuitivno je jasno jasno da su ta dva događaja nezavisna i to ne treba provjeravati (naime, bez obzira što je ispalo prvi put, vjerojatnost da drugi put bude 5 jednaka je 1/6). Međutim, to se zaista može provjeriti računanjem. Zapišimo događaje *A, B* kao podskupove skupa ishoda u tom pokusu:
A = {61, 62, 63, 64, 65, 66}    tu, na primjer, 64 znači da je prvi put ispao 6, a drugi put 4
B = {15, 25, 35, 45, 55, 65},
AB = {65}
Zato je (budući da je ukupno 36 ravnopravnih ishoda):
p(AB) = 1/36,
p(A) = 6/36 = 1/6;   p(B) = 6/36 = 1/6;   p(A)p(B) = 1/36.
Dakle, p(AB) = p(A)p(B), pa su *A,B* međusobno nezavisni.

Intuitivno je jasno da iz nezavisnosti događaja *A, B* slijedi nezavisnost događaja *A*, $\overline{B}$ (ako događanje događaja *B* ne utječe na vjerojatnost događaja *A*, onda na tu vjerojatnost ne utječe ni nedogađanje događaja *B*).
To se može i strogo matematički dokazati. Pretpostavimo da su *A, B* nezavisni, tj. da je p(AB) = p(A)p(B). Dokažimo da su *A*, $\overline{B}$ također nezavisni, tj. da je p(A $\overline{B}$ ) = p(A)p( $\overline{B}$ ).
Zaista:
p(A $\overline{B}$ ) = p(A) - p(AB)
= p(A) – p(A)p(B)    jer su, prema pretpostavci, *A,B* nezavisni
= p(A)(1- p(B))
= p(A)p( $\overline{B}$ ).
Slično možemo dokazati općenito:
**Ako su događaji *A,B* nezavisni, onda su međusobno nezavisni i događaji A, $\overline{B}$ , događaji $\overline{A}$ , B te događaji $\overline{A}$ , $\overline{B}$ .**

Mnogi, bez razloga, miješaju nezavisnost i isključivost događaja. Zato treba upamtiti sljedeće:
Dva se događaja isključuju, ako pojavljivanje jednog onemogućuje pojavljivanje drugoga. U toj se definiciji ne pojavljuje vjerojatnost, ali vrijedi: ako se događaji isključuju, onda je vjerojatnost njihova zbroja jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti: p(A+B) = p(A) + p(B).

S druge strane, nezavisnost događaja ne može se definirati bez vjerojatnosti i izražava se formulom: p(AB) = p(A)p(B). Ako se dva događaja isključuju onda ne mogu biti nezavisna (osim ako je jedan od njih nemogući događaj).

U sljedećem ćemo se primjeru koristiti i disjunktnošću i nezasvisnošću.

**Primjer 23**. Bacamo kocku tri puta. Odredimo vjerojatnost da ispane:
a) bar jednom 6,
b) točno jednom 6.

Označimo:
*A : ispao je bar jednom broj 6,*

*Ai : i-ti je put ispao broj 6 (i = 1,2,3),*
*B: točno je jednom ispao 6.*

a) Uočimo da je

$\overline{A}$ =ni jednom nije bio 6 = $\overline{A}$ 1 $\overline{A}$ 2 $\overline{A}$ 3. Ad je

$$
\begin{aligned}
p(A) &= 1 - p(\overline{A}) \\
&= 1 - p(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}) \\
&= 1 - p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(\overline{A}_3) \quad \text{iz nezavisnost Ai slijedi nezavisnost supr. događaja.} \\
&= 1 - 5/6\ 5/6\ 5/6 \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3
\end{aligned}
$$

b) B= $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$

$$
\begin{aligned}
p(B) &= p(\ A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3\ ) \\
&= p(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3) \quad \text{zbog disjunktnosti} \\
&= p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(A_3) \quad \text{zbog nezavisnosti} \\
&= (1/6)\ (5/6)(5/6) + (5/6)\ (1/6)\ (5/6) + (5/6)\ (5/6)\ (1/6) \\
&= 3\ (1/6)\ (5/6)\ (5/6).
\end{aligned}
$$

Trebalo je uočiti da su sva tri pribrojnika jednaka iako predočuju vjerojatnosti različitih događaja. U svakom od njih jednom se u umnošku pojavljuje 1/6 jer jednom ispada 6, a dva se puta pojavljuje 5/6 jer dva puta ne ispada 6.

U sljedećem ćemo primjeru uz pomoć nezavisnosti izračunati vjerojatnost nekih događaja u pokusu u kojemu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda.

**Primjer 24**. Bacamo kocku dok ne ispadne broj 6. Odredimo vjerojatnost da bude:

a) točno 3 bacanja,
b) bar 3 bacanja,
c) više od 10, a manje od 20 bacanja.

a) p(točno tri bacanja) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6)
= p(prva dva puta nije 6)p(treći put 6) zbog nezavisnosti
= (5/6) (5/6) (1/6)

b) p(bar 3 bacanja) = 1 – p(najviše 2 bacanja)
= 1 – p(1 bacanje ili 2 bacanja)
= 1 – p(1 bacanje) – p(2 bacanja) zbog disjunktnosti
= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6, drugi put 6)
= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6)p(drugi put 6) zbog nezavisnosti
= 1 – 1/6 – (5/6) (1/6)

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{18}\frac{1}{6}$.

**Zadatak 3.** Izračunajte taj zbroj koristeći se formulom za zbroj članova geometrijskog reda.

## Formula potpune vjerojatnosti.

Vratimo se pokusu izvlačenja dviju kuglica iz kutije s 5 crvenih i 8 bijelih kuglica.
Podsjetimo:
$p(B1) = 8/13$ vjerojatnost da prvoizvučena kuglica bude bijela je 8/13
$p(B2) = 8/13$ po načeku simetrije vjerojatnost da je druga kuglica bijela je ista
Mnogima načelo simetrije nije uvjerljivo. Zato pokušajmo vjerojatnost događaja B2 izračunati na drugi način:
$B1+C1 = S$ prvi put je izvučena ili bijela ili crvena kuglica
$B2(B1+C1) = B2S$
$B2B1+B2C1 = B2$
$p(B2B1)+p(B2C1) = p(B2)$ jer se B2B1 i B2C1 isključuju (jer se B1 i C1 isklj.)
$p(B2) = p(B2|B1)p(B1)+p(B2|C1)p(C1)$ formula umnoška
$= (7/12)\ (8/13) + (8/12)\ (5/13)$
$= 14/39 + 10/39$
$= 8/13$
što smo i trebali dokazati.

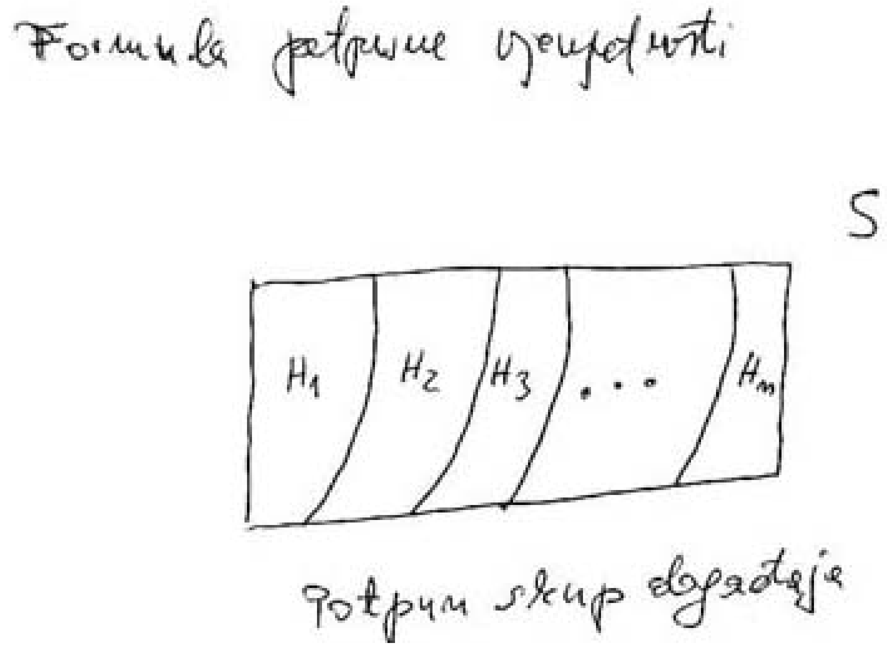
Treba uočiti da se ovo izvođenje zasniva na činjenici da se događaji B1 i C1 isključuju i da im je zbroj siguran događaj (ta su dva događaja jedan drugome suprotni). Slično se može postupiti kad imamo više (a ne samo dva) događaja koji se međusobno isključuju i kojima je zbroj sigurni događaj.

Kažemo da događaji H1, H2,…,Hn čine **potpun skup događaja** ako je:

(i) $HiHj = \emptyset$, za $i \neq j$ (događaji se međusobno isključuju)

(ii) $H1+\ldots+Hn = S$ (zbroj događaja je sigurni događaj)

(iii) $p(Hi)>0$, za sve i.




Događaji B1, C1 koje smo razmatrali prije čine potpun skup događaja. Općenito, svaka dva međusobno suprotna događaja (kojima je vjerojatnost pozitivna) čine potpun skup

događaja. U svakom pokusu s konačno mnogo ishoda, ishodi čine potpun skup događaja. Provjerite.
Evo nekoliko potpunih skupova događaja u pokusu bacanja kocke 3 puta.

| | | |
|---|---|---|
| *(1)* | *Hi: i puta je ispao broj 6* | *(i = 0,1,2,3)* |
| *(2)* | *Hi: i puta je ispao broj 5* | *(i = 0,1,2,3)* |
| *(3)* | *Hi: i puta je ispao paran broj* | *(i = 0,1,2,3)* |
| *(4)* | *Hi: zbroj je i* | *(i = 3,4,5,…,18)* |
| *(5)* | *Hi: najveći je broj i* | *(i = 1,2,3,4,5,6)* |
| *(6)* | *Hi: najmanji je broj i* | *(i = 1,2,3,4,5,6)* |

**Primjer 25**. Dokažimo da su skupovi (1)-(6) potpuni skupovi događaja. Izračunajmo vjerojatnosti događaja Hi

U svim slučajevima treba provjeriti svojstva (i), (ii), (iii) potpunog skupa događaja.

(1) (i) Hi i Hj se isključuju za $i \neq j$, jer broj 6 ne može ispasti i puta i j puta za $i \neq j$.
(ii)Zbroj događaja Hi jest sigurni događaj jer broj šest mora ispasti ili nikako ili jednom ili dvaput ili triput.
(iii) očito

(2) taj je primjer identičan primjeru (1) jer su brojevi 5 i 6 ravnopravni.

(3) (i) isto kao i u (1)
(ii) isto kao i u (1)
(iii) očito, samo događaji Hi imaju drukčije vjerojatnosti nego u (1) i (2).

(4) (i) Hi i Hj se isključuju za $i \neq j$ jer ne može zbroj biti i, a ujedno i j za $i \neq j$.
(ii) jer je najmanji zbroj je 3 (kad je na sve tri kocke 1), a najveći 18 (kad je na sve tri kocke 6) i jer se postiže svaki zbroj između njih.
(iii) očito

(5) (i) Hi i Hj se isključuju za $i \neq j$, jer ne može najveći rezultat na kockama biti i, a ujedno i j za $i \neq j$.
(ii) maksimalni broj mora biti jedan od brojeva od 1 do 6, jer se na svakoj kocki može postići svaki od tih brojeva.
(iii) očito

(6) slično kao u (5), samo se događaji Hi u tim slučajevima razlikuju (a razlikuju se i njihove vjerojatnosti).

Prema analogiji na primjer riješen na početku, mogli bismo zaključiti da vrijedi sljedeće:

Neka H1,…,Hn čine potpun skup događaja i neka je *A* bilo koji događaj. Tada je:

$$p(A) = p(A|H1)p(H1)+\ldots+p(A|Hn)p(Hn)$$

Ta se formula zove **formula potpune vjerojatnosti**.
Prije nego dokažemo tu formulu pokažimo kako se ona primjenjuje.

**Primjer 26**. Tri tvornice proizvode proizvod iste marke. Prva proizvodi 30% proizvoda, druga 50%, a treća 20%. U prodaji je iz prve tvornice 2% neispravnih proizvoda, iz druge 3%, a iz treće 4%. Kolika je vjerojatnost da je slučajno kupljeni proizvod neispravan?

Označimo:
*A: slučajno kupljeni proizvod je neispravan,*
*H1: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u prvoj tvornici,*
*H2: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u drugoj tvornici,*
*H3: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u trećoj tvornici.*
Tada je:
p(H1) = 0.3 (jer prva tvornica proizvodi 30% proizvoda)
p(H2) = 0.5
p(H3) = 0.2
p(A|H1) = 0.02 (jer prva tvornica proizvodi 2% neispravnih proizvoda)
p(A|H2) = 0.03
p(A|H3) = 0.04
Prema formuli potpune vjerojatnosti dobijemo:
p(A) = p(A|H1)p(H1)+p(A|H2)p(H2)+p(A|H3)p(H3)
= 0.02·0.3+0.03·0.5+0.04·0.2
= 0.029.
Dakle, u prodaji je 2.9% neispravnih proizvoda.

Dokažimo sada formulu potpune vjerojatnosti. Kako smo već rekli, dokaz je samo tehnički nešto složeniji od rješenja početnog primjera.
A = AS
= A(H1+…+Hn)
= Ah1+…+Ahn
Zato je:
p(A) = p(AH1+…+AHn)
= p(AH1)+…+p(AHn) (jer se događaji AHi međusobno isključuju)
= p(A|H1)p(H1)+…+p(AHn)p(Hn) (prema formuli umnoška).
Formula je dokazana.

**Primjer 27**. Neka je kao u prethodnom primjeru. Pretpostavimo da je slučajno kupljeni proizvod neispravan. Kolika je vjerojatnost da je on iz prve, kolika da je iz druge, a kolika da je iz treće tvornice?

Pogrješan bi bio odgovor da je vjerojatnost da je proizvod iz prve tvornice 0.3 itd. To je istina za slučajno kupljeni proizvod, međutim ako znamo da je on neispravan, te se vjerojatnosti mijenjaju (uvjetna vjerojatnost). Nas ne zanimaju p(Hi) već p(Hi|A).
p(H1|A) = p(H1A)/p(A)
= p(A|H1)p(H1)/p(A)
= 0.02·0.3/0.029
= 6/29
Slično je:
p(H2|A) = p(A|H2)p(H2)/p(A)
= 0.03·0.5/0.029
= 15/29
p(H3|A) = p(A|H3)p(H3)/p(A)
= 0.04·0.2/0.029

$= 8/29.$

Ti su brojevi redom približno jedenaki 0.207; 0.517; 0.276 pa su, prema tome, različiti redom od brojeva 0.3; 0,5; 0.2.

Kako smo postupili u rješenju tog primjera, možemo postupiti općenito:

$$p(H_i|A) = p(H_iA)/p(A)$$
$$= p(A|H_i)p(H_i)/p(A|H_1)p(H_1)+\ldots+p(A|H_n)p(H_n).$$

Ta se formula naziva **Bayesovom formulom** ili **provjerom hipoteze**.

# II. SLUČAJNE VARIJABLE

## Uvod: Pojam slučajne varijable i razdiobe vjerojatnosti

**Primjer 1.** Bacamo kocku dva puta zaredom i potom:
a) zbrojimo dobivene rezultate,
b) oduzmemo drugi od prvog rezultata,
c) registriramo koliko se puta pojavio broj 6,
d) registriramo koliko se puta pojavio broj 5,
e) registriramo veći od rezultata,
f) registriramo manji od rezultata.
Komentirajmo taj primjer.

Pretpostavimo da se u pokusu dogodio ishod 36 (prvi put 3, drugi put 6). Tada je:
rezultat u a) 9
rezultat u b) –3
rezultat u c) 1
rezultat u d) 0
rezultat u e) 6
rezultat u f) 3.
Pretpostavimo pak da se dogodio ishod 44 (oba puta 4). Tada je:
rezultat u a) 8
rezultat u b) 0
rezultat u c) 0
rezultat u d) 0
rezultat u e) 4
rezultat u f) 4.

Zaključujemo da je u tom primjeru riječ o funkcijama kojima su vrijednosti realni brojevi, a koje ovise o ishodu koji se dogodio. Dakle te su funkcije definirane na skupu svih ishoda u pokusu i slučajno (ovisno o ishodu koji se dogodio) postižu određene vrijednosti. Zato se te funkcije zovu slučajnim varijablama. Dakle:

**Slučajna varijabla jest funkcija koja svakom ishodu pridružuje neki realni broj.**

Kraće:

**Slučajna varijabla jest funkcija $X: S \rightarrow R$, gdje je S skup ishoda u nekom pokusu**

(slučajne ćemo varijable obično označavati velikim slovima X,Y,Z,U,V,W,…).

S matematičke strane gledišta gornja definicija nije općenito korektna. O tome ćemo nešto više reći poslije, a za sada napominjemo da je ta definicija korektna u slučaju pokusa s konačno ili prebrojivo mnogo ishoda ( u početku ćemo razmatrati samo takve pokuse).
Skup vrijednosti slučajne varijable X označavamo oznakom R(X).

**Primjer 2.** Odredimo skupove vrijednosti slučajnih varijabla iz početnog primjera bacanja kocke dva puta.

a) R(X) = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
b) R(Y) = {-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}
c) R(Z) = {0,1,2,3,4,5,6}
d) R(U) = {0,1,2,3,4,5,6}
e) R(V) = {1,2,3,4,5,6}
f) R(W) = {1,2,3,4,5,6}.

Slučajne su varijable funkcije, pa su dvije slučajne varijable jednake ako su jednake kao funkcije. Treba uočiti da su slučajne varijable Z,U odnosno V,W međusobno različite iako imaju iste domene i iste skupove vrijednosti. Na primjer:
Z(35) = 0, U(35) = 1.
Slično:
V(35) = 5, W(35) = 3.
Ipak, svi će se složiti da su varijable Z,U srodne. O čemu je tu riječ, saznat ćemo uskoro.

**Primjer 3.** Bacamo novčić 3 puta. Slučajna varijabla X registrira koliko se puta pojavio P. Zapišimo X.
Očito je da je R(X) = {0,1,2,3}. Da bismo zapisali slučajnu varijablu X moramo joj odrediti vrijednosti u svakom ishodu u tom pokusu. Ima ukupno 8 ishoda:
S = {PPP,PPG,PGP,PGG,GPP,GPG,GGP,GGG}. Vrijedi:

| | |
|---|---|
| X(PPP) = 3 | X(GPP) = 2 |
| X(PPG) = 2 | X(GPG) = 1 |
| X(PGP) = 2 | X(GGP) = 1 |
| X(PGG) = 1 | X(GGG) = 0. |

U tom primjeru treba uočiti da ima više izgleda da slučajna varijabla X poprimi vrijednost 2, nego 3, a da ima jednake izglede da poprimi rezultat 1 kao i rezultat 2. To je zato što postoje 3 ravnopravne mogućnosti za postizanje broja 1 (odnosno za postizanje broja 2), a samo 1 mogućnost za postizanje broja 3. Možemo govoriti o vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi neku vrijednost, primjerice:

vjerojatnost da X poprimi rezultat 2 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 1 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 3 jednaka je 1/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 0 jednaka je 1/8
vjerojatnost da X poprimi rezultat 4 jednaka je 0.

To se može obrazložiti ovako:

reći da X poprimi rezultat 2 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPG,PGP,GPP}, a vjerojatnost tog događaja je 3/8,
reći da X poprimi rezultat 3 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPP}, a vjerojatnost tog događaja je 1/8,
reći da X poprimi rezultat 4, je isto što i reći da se dogodilo nešto nemoguće, a vjerojatnost nemogućeg događaja je 0, itd.

Vidimo da se neki događaji u pokusu mogu zapisati u terminima slučajne varijable. Da bismo tako zapisivanje događaja pojednostavnili, uvodimo sljedeće označivanje:

[X=a]: slučajna varijabla postiže rezultat a (gdje je a neki realni broj).

Drugim riječima:

$[X=a] = \{ w \in S : X(w) = a \}$

Umjesto p([X=a]) pisat ćemo kraće p(X=a), dakle,
$p(X=a) = p(\{ w \in S : X(w) = a \})$

Za slučajnu varijablu X iz prethodnog primjera vrijedi:
p(X=0) = 1/8
p(X=1) = 3/8
p(X=2) = 3/8
p(X =3) = 1/8

To se kraće zapisuje kao:

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

U gornjem su redu tablice vrijednosti koje slučajna varijabla postiže, a u donjem dijelu vjerojatnosti s kojima se te vrijednosti postižu. Treba uočiti da je zbroj brojeva u drugom redu jednak 1. To je zato što je ukupna vjerojatnost 1 (događaji [X=0], [X=1], [X=2],[X=3] čine potpun skup događaja: međusobno se isključuju i zbroj im je sigurni događaj).
Kažemo da je tom tablicom zadana slučajna varijabla X.
Točnije, tom je tablicom zadana **razdioba vjerojatnosti** slučajne varijable X, tj. zadane su vjerojatnosti s kojima slučajna varijabla X postiže pojedine vrijednosti.
Da bismo to pojasnili promotrimo slučajnu varijablu Y koja registrira koliko se puta pojavio G u pokusu bacanja novčića 3 puta. Ta slučajna varijabla ima razdiobu:

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Dakle, slučajne varijable X, Y (koje se odnose na isti pokus) imaju iste razdiobe vjerojatnosti. Kažemo i da su te slučajne varijable **jednako distribuirane**. Međutim X i

Y nisu jednake kao funkcije. Na primjer, X(PPP) = 3, a Y(PPP) = 0. Dakle, slučajne varijable mogu biti različite, a da imaju istu razdiobu vjerojatnosti. U razmatranom slučaju treba uočiti da je zbog simetrije jasno da slučajne varijable X,Y moraju biti jednako distribuirane (zamjenom slova P,G prelaze jedna u drugu).
U teoriji vjerojatnosti slučajne varijable klasificiramo s obzirom na razdiobu vjerojatnosti. U tom ćemo smislu govoriti da je slučajna varijabla zadana svojom razdiobom vjerojatnosti (pritom treba imati na umu da ima više slučajnih varijabla s istom razdiobom vjerojatnosti).

**Primjer 4.** U pokusu bacanja kocke dva puta, označimo, kao i prije:
Z: registrira koliko se puta pojavio broj 6,
U: registrira koliko se puta pojavio broj 5,
V: registrira najveći broj
W: registrira najmanji broj.
Diskutirajmo razdiobe vjerojatnosti tih slučajnih varijabla.

Očito je da su te slučajne varijable međusobno različite. Također, bez računanja njihovih razdioba, jasno je da su Z i U jednako distribuirane (to se može obrazlažiti zamjenom znakova 5 i 6 na stranama kocke, odnosno ravnopravnošću brojeva 5 i 6). Razdiobom vjerojatnosti tih slučajnih varijabla pozabavit ćemo se poslije.
Razmotrimo sad slučajne varijable V i W. Ako bi netko na kocki brojeve 1,2,3,4,5,6 redom zamijenio brojevima 6,5,4,3,2,1 slučajna varijabla V postala bi slučajna varijabla W i obratno. To znači da bi pri zamjeni redoslijeda tablica razdiobe slučajne varijable V prešla u tablicu razdiobe slučajne varijable W. Pokažimo to i tako da odredimo te razdiobe.

Već smo vidjeli da je R(V) = R(W) = {1,2,3,4,5,6}.
p(V=1) = p(11) = 1/36
p(V=2) = p(12+21+22) = 3/36
tumačenje: slučajna varijabla V postiže rezultat 2 ako veći od rezultata bude 2, tj. ako se dogodi ishod 12 (prvi put 1, drugi put 2) ili ishod 21 (prvi put 2 drugi put 1) ili ishod 22 (oba puta 2); kako se događaji 12, 21, 22 međusobno isključuju, a svaki ima vjerojatnost 1/36, vjerojatnost njihova zbroja je 3/36; slično dobijemo dalje:
p(V=3) = p(13+23+31+32+33) = 5/36
p(V=4) = p(14+24+34+41+42+43+44) = 7/36
p(V=5) = p(15+25+35+45+51+52+53+54+55) = 9/36
p(V=6) = p(16+26+36+46+56+61+62+63+64+65+66) = 11/36

p(W=1) = p(11+12+13+14+15+16+21+31+41+51+61) = 11/36
p(W=2) = p(22+23+24+25+26+32+42+52+62) = 9/36
p(W=3) = p(33+34+35+36+43+53+63) = 7/36
p(W=4) = p(44+45+46+54+64) = 5/36
p(W=5) = p(55+56+65) = 3/36
p(W=6) = p(66) = 1/36.

Dakle, razdiobe tih varijabla jesu:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 | 11/36 | 9/36 | 7/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 |

Treba uočiti da su V,W različite slučajne varijable u istom pokusu, dapače i njihove razdiobe vjerojatnosti su različite, ali vrlo bliske. Točno značenje te bliskosti objasnit ćemo poslije.

**Primjer 5.** Bacamo kocku dok se ne pojavi broj 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Odredimo razdiobu vjerojatnosti od X.

Već smo vidjeli da je to pokus s beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda. Slučajna varijabla X primjer je slučajne varijable koja poprima beskonačno mnogo (ali prebrojivo) vrijednosti:
R(X) = **N =** {1,2,3,4, …}.
Izračunajmo nekoliko početnih vjerojatnosti:

p(X=1) = p(prvi put 6) = 1/6
p(X=2) = p(prvi put nije 6, drugi put 6) = 5/61/6
p(X=3) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6) = $(5/6)^2 1/6$
p(X=4) = p(prva tri puta nije 6, četvrti put 6) = $(5/6)^3 1/6$.

Zato je razdioba vjerojatnosti slučajne varijable X:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | …………… | n | ………. |
| 1/6 | 5/61/6 | $(5/6)^2 1/6$ | $(5/6)^3 1/6$ | …… | $(5/6)^{n-1} 1/6$ | ….. |

Koristeći se formulom za sumu beskonačnog reda možemo provjeriti da je zbroj vjerojatnosti zaista jednak 1.

$$1/6 + 5/61/6 + (5/6)^2 1/6 + (5/6)^3 1/6 + \ldots = 1/6(1 + 5/6 + (5/6)^2 + (5/6)^3 + \ldots)$$
$$= 1/6 \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$$
$$= 1.$$

S druge strane, intuitivno je jasno da je zbroj vjerojatnosti jednak 1, pa smo time, koristeći se vjerojatnošću, odredili sumu beskonačnog reda.

# Diskretna slučajna varijabla

## Definicija diskretne slučajne varijable

Na osnovi razmatranih primjera uvodimo sljedeću definiciju.

**Diskretna slučajna varijabla jest slučajna varijabla kojoj je skup vrijednosti konačan ili beskonačan prebrojiv.**
Drugim riječima slučajna varijabla X je diskretna ako je
$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ ili $R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$

Događaji $[X=x_i]$ čine potpun skup događaja. To znači da se oni međusobno isključuju i da je suma njihovih vjerojatnosti 1:
$\sum\ p(X=x_i) = 1.$

Ako označimo:
$p_i = p(X=x_i)$,
onda se razdioba vjerojatnosti slučajne diskretne varijable X može zapisati kao:

| | | | |
|---|---|---|---|
| x1 | x2 | x3 | xn |
| p1 | p2 | p3 | pn |

ako je skup vrijednosti konačan, odnosno kao:

| | | |
|---|---|---|
| x1 | x2 | x3….. |
| p1 | p2 | p3 …. |

ako je skup vrijednosti beskonačan prebrojiv.

**Primjer 6.** Bacamo kocku 2 puta. Slučajna varijabla X zbraja dobivene rezultate, a slučajna varijabla Y oduzima drugi rezultat od prvoga. Odredimo razdiobe vjerojatnosti tih slučajnih varijabla.

Već smo rekli da je $R(X) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Nadalje:
$p(X=2) = p(11) = 1/36$
$p(X=3) = p(12+21) = 2/36$
$p(X=4) = p(13+22+31) = 3/36$
Sličnim razmatranjem zaključujemo da X ima razdiobu vjerojatnosti:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Također je $R(Y) = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Nadalje:
$p(Y = -5) = p(16) = 1/36$

p(Y = -4) = p(15+26) = 2/36
p(Y=0) = p(11+22+33+44+55+66) =6/36
Zaključujemo da Y ima razdiobu vjerojatnosti:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

**Zadatak 1.** Objasnite zašto su vjerojatnosti u tablici razdiobe vjerojatnosti slučajnih varijabla X, Y simetrične u odnosu na vrijednost 6/36.

**Zadatak 2.** Dvojica igrača bacaju po kocku. Ako zbroj bude 5 dobija prvi, ako bude 6 dobija drugi, inače ne dobija njedan od njih. U kojem odnosu mora biti uložen novac da bi igra bila pravedna?

Treba uočiti sličnost razdioba vjerojatnosti slučajnih varijabla X,Y iz Primjera 6. Te slučajne varijable nisu jednako distribuirane, međutim ako bi vrijednosti slučajne varijable X umanjili za 7, dobili bismo slučajnu varijablu koja je jednako distribuirana kao Y. Točnije, neka je Z slučajna varijabla koja zbroji dobivene rezultate, potom tom zbroju oduzme 7. Ta je slučajna varijabla jednako distribuirana kao i Y (uočite da Z i Y nisu jednake). Slučajnu varijablu Z možemo zapisati kao X-7, dakle

$$Z = X-7$$

(slučajna varijabla definirana kao slučajna varijabla koja postiže vrijednost x-7 ako X postigne vrijednost x).

Općenito, neka je X slučajna varijabla i *h* realna funkcija kojoj područje definicije sadrži R(X), tj. koja je definirana na svakoj vrijednosti slučajne varijable X. Tada je definirana slučajna varijabla h(X) prema pravilu:

**Ako X postigne vrijednost x, onda h(X) postigne vrijednost f(x).**

**Primjer 7.** Neka je X slučajna varijabla iz prethodnog primjera i *h* realna funkcija zadana formulom h(x):= x-7. Tada je h(X) = Z.
Naime, h(X) postiže vrijednost x-7 ako X postigne vrijednost x. Zato je h(X) = X-7 = Z.

Treba uočiti sljedeće:
Ako je *h* injektivna onda vrijedi: h(X) postiže vrijednost h(x) ako i samo ako X postigne vrijednost x.
Tako nešto **ne mora** vrijediti ako *h* nije injekcija, što potvrđuje i sljedeći primjer.

**Primjer 8.** Neka je X slučajna varijabla kojoj je razdioba vjerojatnosti:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Odredimo skup vrijednosti i razdiobu vjerojatnosti slučajne varijable $Y = X^2$.

Tu je $h(x) := x^2$. Vrijedi:
Ako X postigne vrijednost –5, Y postigne vrijednost 25,
ako X postigne vrijednost –4, Y postigne vrijednost 16,
ako X postigne vrijednost 5, Y postigne vrijednost 25, itd.
Dakle Y postigne vrijednost 25 ako i samo ako X postigne vrijednost 5 ili –5, Y postigne vrijednost 16 ako i samo ako X postigne vrijednost 4 ili –4, Y postigne vrijednost 0 ako i samo ako X postigne vrijednost 0, itd.
Zaključujemo da je $R(Y) = \{0,1,4,9,16,25\}$. Također,
$p(Y=0) = p(X=0) = 6/36$,
$p(Y=1) = p([X=1]+[X=-1]) = 10/36$,
$p(Y=4) = p([X=2]+[X=-2]) = 8/36$, itd.
Dakle, razdioba vjerojatnosti od Y zadana je tablicom:

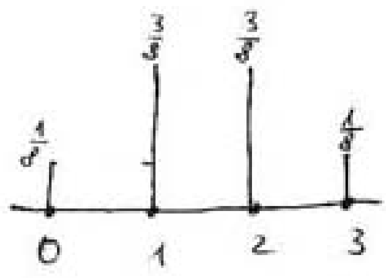
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6/36 | 10/36 | 8/36 | 6/36 | 4/36 | 2/36. |

## Očekivanje i varijanca diskretne slučajne varijable

Razdioba slučajne varijable može se grafički predočiti točkama pravca (vrijednosti slučajne varijable) nad kojima su podignuti štapovi kojma su visine pripadne vjerojatnosti. Evo nekoliko razdioba s kojima smo se već susretali i njihovih grafičkih predodžba:

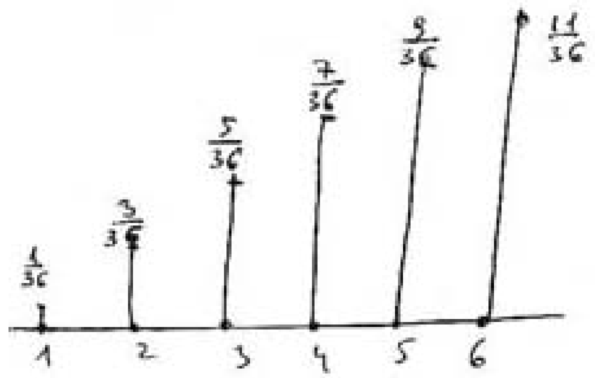
(X)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |



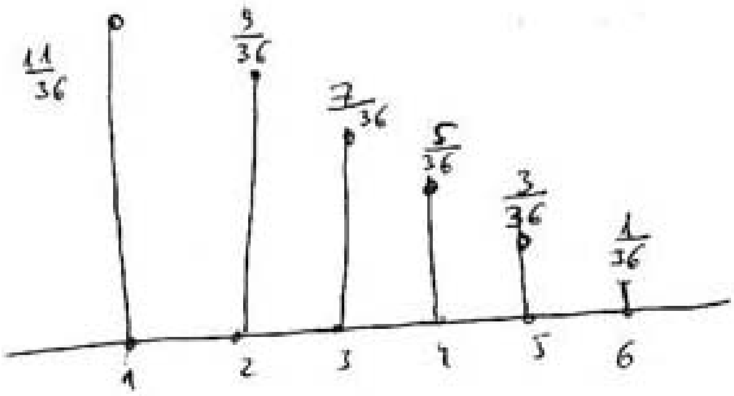

(Y)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |



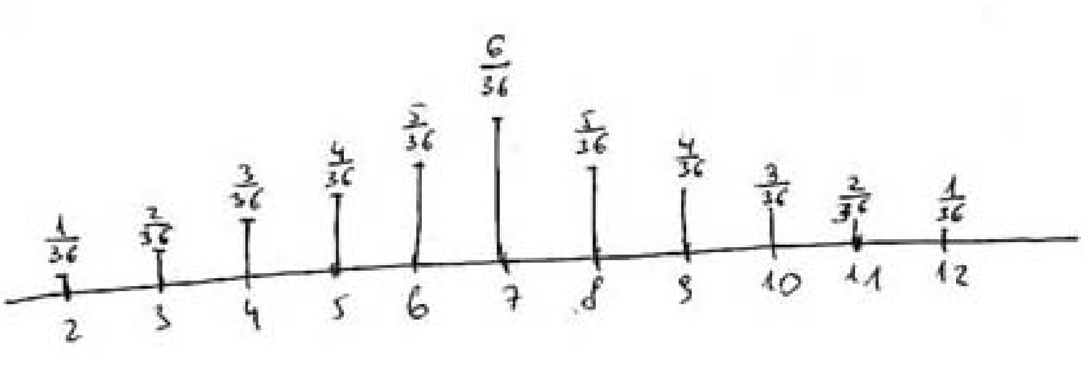

(Z)
1 2 3 4 5 6

11/36 9/36 7/36 5/36 3/36 1/36



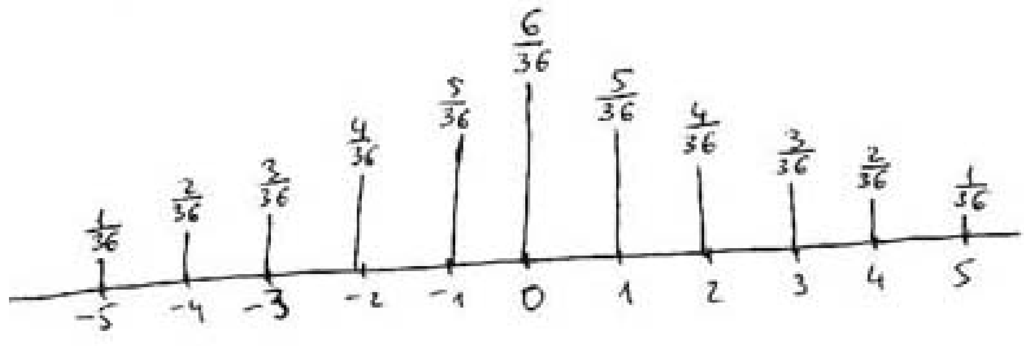

(U)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

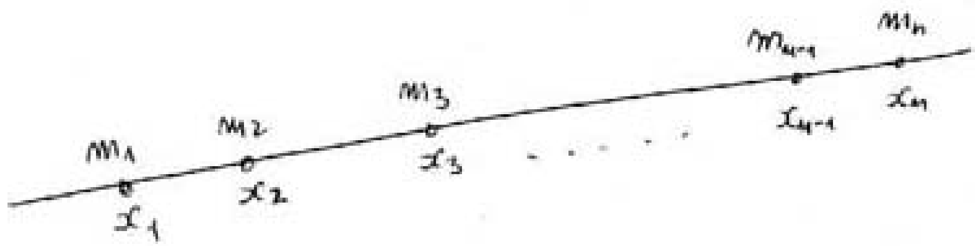


(V)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |




**Grafički prikazi** diskretnih slučajnih varijabla podsjećaju na **sustav materijalnih čestica na pravcu**.
 Podsjetimo se:
**sustav materijalnih čestica na pravcu čine čestice masa $m_1,m_2,\ldots,m_n$ smještene u točkama pravca s koordinatama $x_1,x_2,\ldots,x_n$.**
To se kraće može zapisati kao $(x_1,m_1),(x_2,m_2),\ldots(x_n,m_n)$ i predočiti kao:




Pri razmatranju sustava čestica uobičajeno je definirati **ukupnu masu**
$m := m_1+m_2+\ldots+m_n$
i **relativne mase**, brojeve:
$m_1/m,\ m_2/m,\ldots,m_n/m$.
Treba uočiti da je zbroj relativnih masa 1:

$$\begin{aligned} m_1/m+m_2/m+\ldots+m_n/m &= (m_1+m_2+\ldots+m_n)/m \\ &= m/m \\ &=1. \end{aligned}$$

Zato je tablicom

| | | |
|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_n$ |
| $m_1/m$ | $m_2/m$ | $m_n/m$ |

zadana razdioba vjerojatnosti.
Obratno, svaka razdioba vjerojatnosti diskretne slučajne varijable zadaje neki sustav čestica na pravcu (kojemu je ukupna masa 1).
Pri toj korespondenciji, vjerojatnosti $p_i$=p(X=$x_i$) korespondiraju relativnim masama mi/m.

Dvije temeljne karakteristike (značajke) sustava čestica jesu njegovo **težište** i **moment inercije oko težišta**. Sjetimo se koordinate težišta:

$$x_T = ( x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n)/m$$
$$= x_1m_1/m+x_2m_2/m+\ldots+x_nm_n/m.$$

Analogno težištu sustava čestica definira se **očekivanje** E(X) diskretne slučajne varijable X kojoj je razdioba vjerojatnosti zadana tablicom

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_n$ |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_n$ |

$$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

**Primjer 9.** Izračunajmo očekivanja slučajnih varijabla (odnosno njihovih razdioba vjerojatnosti) (X)-(V) navedenih na početku.

Prije egzaktnog rješavanja pokušajmo bar nešto reći o tim očekivanjima bez računanja. Oslanjajući se na analogiju sa sustavom čestica i na intuitivnu predodžbu o težištu, zaključujemo da trebalo biti:

E(X) = 1.5
E(U) = 7 (jer su podaci simetrično razmješteni)
E(V) = 0
Također, zaključujemo da bi E(Y) trebalo biti bliže broju 6, a E(Z) bliže broju 1 i da bi ta dva broja trebala biti simetrična s obzirom na broj 3.5. Provjerimo naše procjene računanjem.

$$E(X) = 0\cdot1/8+1\cdot3/8+2\cdot3/8+3\cdot1/8$$
$$= 12/8$$
$$= 1.5$$

$$E(Y) = 1\cdot1/36+2\cdot3/36+3\cdot5/36+4\cdot7/36+5\cdot9/36+6\cdot11/36$$
$$= 161/36$$

$$E(Z) = 1\cdot11/36+2\cdot9/36+3\cdot7/36+4\cdot5/36+5\cdot3/36+6\cdot1/36$$
$$= 91/36$$
Treba uočiti da je 3.5-E(Z)=E(Y)-3.5 što znači da su

$E(Y), E(Z)$ simetrični s obzirom na 3.5.

$$E(U) = 2\cdot 1/36+3\cdot 2/36+4\cdot 3/36+5\cdot 4/36+6\cdot 5/36+7\cdot 6/36+8\cdot 5/36+9\cdot 4/36+10\cdot 3/36+11\cdot 2/36 +12\cdot 1/36$$
$$= 252/36$$
$$= 7.$$

$$E(V) = -5\cdot 1/36+(-4)\cdot 2/36+(-3)\cdot 3/36+(-2)\cdot 4/36+(-1)\cdot 5/36+0\cdot 6/36+ 1\cdot 5/36+2\cdot 4/36+3\cdot 3/36+4\cdot 2/36+5\cdot 1/36.$$
$= 0$ (jer su to, po parovima, suprotni brojevi).

Ako diskretna slučajna varijabla postiže beskonačno mnogo, ali prebrojivo vrijednosti, očekivanje se definira analogno:

$$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ldots$$

To je **beskonačni red** i može se dogoditi da **divergira** (ili da **konvergira**, ali ne **konvergira apsolutno**). Tada slučajna varijabla **nema očekivanja** (odnosno pripadni sustav čestica nema težište).

**Primjer 10.** Bacamo kocku dok se ne pojavi 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Izračunajmo E(X).

Ta slučajna varijabla postiže beskonačno mnogo, ali prebrojivo vrijednosti; vidjeli smo da ima sljedeću razdiobu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 …………… | n……… |
| 1/6 | 5/6 1/6 | $(5/6)^2 1/6$ | $(5/6)^3 1/6$…… | $(5/6)^{n-1} 1/6$… |

Prije računanja pokušajmo predvidjeti očekivanje. Intuitivno, zbog ravnopravnosti brojeva 1,2,3,4,5,6 očekujemo da će se u 6 bacanja pojaviti jednom pojaviti 6 (slično je za ostale brojeve). Provjerimo to predviđanje računom. Koristit ćemo se formulom:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = 1/(1-x)^2, \quad -1<x<1.$$

Ta se formula dobije deriviranjem formule za zbroj geometrijskog reda:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = 1/1-x, \quad -1<x<1.$$

$$E(X) = 1\cdot 1/6+ 2\cdot 5/6 1/6+3\cdot (5/6)^2 1/6+ 4\cdot (5/6)^3 1/6+\ldots+n\cdot (5/6)^{n-1} 1/6+\ldots$$
$$=1/6(1+2\cdot 5/6+3\cdot (5/6)^2 +4\cdot (5/6)^3+\ldots+n\cdot (5/6)^{n-1}+\ldots)$$
$$=1/6\cdot 1/(1-5/6)^2$$
$= 6$ (kako smo i predvidjeli).

## Varijanca slučajne varijable.

Vratimo se na sustav čestica na pravcu. Sjetimo se momenta inercije oko težišta tog sustava.
$I_T = (x_1-x_T)^2m_1+(x_2-x_T)^2m_2+\ldots+(x_n-x_T)^2m_n$.
Po uzoru na tu formulu, definiramo **disperziju** iliti **varijancu** V(X) diskretne slučajne varijable X (odnosno razdiobe vjerojatnosti slučajne vjerojatnosti):

$$V(X) := (x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\ldots+(x_n-E(X))^2p_n.$$

Ako X postiže beskonačno mnogo (ali prebrojivo) vrijednosti, taj je red beskonačan i može biti divergentan (tada razdioba vjerojatnosti nema varijancu, odnosno pripadni sustav čestica nema moment inercije).
Treba uočiti da je varijanca V(X) pozitivna i da može biti 0 ako i samo ako postiže samo jednu vrijednost (s vjerojatnošću 1).
Za računanje varijance katkad je jednostavnija formula:

$$V(X) = (x_1^2p_1+x_2^2p_2+\ldots+x_n^2p_n) - E^2(X)$$

(slično je ako je R(X) beskonačan, prebrojiv skup). Tu je $E^2(X)$ kraća oznaka za $((E(X))^2$.

**Zadatak 3.** Izvedite gornju formulu.

**Primjer 11.** Bacamo novčić 2 puta. Slučajna varijabla X registrira koliko puta se pojavio P. Izračunajmo varijancu od X.

Vidjeli smo da X ima sljedeću razdiobu vjerojatnosti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

i da je E(X) = 1.5.

$$\begin{aligned} V(X) &= (0-1.5)^2 1/8+(1-1.5)^2 3/8+(2-1.5)^2 3/8+(3-1.5)^2 1/8 \\ &= 2.25\cdot 1/8+0.25\cdot 3/8+0.25\cdot 3/8+2.25\cdot 1/8 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

To ćemo izračunati i pomoću druge formule.

$$\begin{aligned} V(X) &= 0^2\cdot 1/8+1^2\cdot 3/8+2^2\cdot 3/8+3^2\cdot 1/8 - 1.5^2 \\ &= 3-2.25=0.75. \end{aligned}$$

**Zadatak 4.** Izračunajte varijance slučajnih varijabla (Y)-(V) iz početnog primjera.

Moment inercije je **mjera disperzije masa u odnosu na težište**; što je masa koncentriranija uz težište, moment inercije je manji i obratno. Analogno tome, varijanca slučajne varijable je mjera disperzije (raspršenosti) vjerojatnosti u odnosu na očekivanje; što je vjerojatnost koncentriranija uz očekivanje, varijanca je manja i obratno.

Ako je X diskretna slučajna varijabla i $h(x) = ax+b$, linearna funkcija, onda je slučajna varijabla $Y := h(X)$, tj. $Y := aX+b$ također diskretna. Vrijedi:

$E(aX+b) = aE(X)+b$,
$V(aX+b) = a^2V(X)$.

Te formule lako je obrazložiti pomoću fizikalne interpretacije očekivanja i varijance. Pretpostavima da se sustav čestica translatira po pravcu za $b$. Tada se i težište sustava translatira za $b$, moment inercije oko težišta ostaje isti. Prevedeno na jezik slučajnih varijabla, to znači da je
$E(X+b) = E(X)+b$ i $V(X+b) = V(X)$.
Pretpostavimo sad da se koordinte svake čestice pomnože brojem $a$ (tj. da se sustav čestica stisne ili rastegne s koeficijentom $a$). Tada se i težište pomnože brojem $a$, dok se moment inercije promijeni s faktorom $a^2$. Prevedeno na jezik slučajnih varijabla, to znači da je
$E(aX)=aE(X)$ i $V(aX)=a^2V(X)$.
Kombiniranjem tih formula dobiju se tražene formule.

**Zadatak 5.** Dokažite formule $E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$.

## Jednolika diskretna razdioba

To je najjednostavnija diskretna razdioba. Skup vrijednosti joj je neki konačan skup:

$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$,
a sve su pripadajuće vjerojatnosti jednake:
$p(X=x_i)=1/n$, za svaki $i=1,2,\ldots,n$

(odatle i naziv jednolika razdioba). Uočite da diskretna slučajna varijabla s jednolikom razdiobom nužno ima konačan skup vrijednosti (ne može imati beskonačno mnogo prebrojivo vrijednosti).
Tipični primjer takve razdiobe već smo vidjeli i on je jedan od najuobičajenijih u nastavi vjerojatnosti: to je razdioba slučajne varijable X koja registrira rezultat kod bacanja kocke. Kod nje je
$R(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$,
a sve su odgovarajuće vjerojatnosti 1/6.
Uočite da su rezultati koje postiže ova slučajna varijabla **ekvidistantno raspoređeni** (među njima su jednaki razmaci; ovaj put razmak je 1), međutim to nije općenito, tj. podatci $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ kod jednolike razdiobe nisu nužno ekvidistantni.

I slučajna varijabla koja registrira rezultat kod bacanja novčića je jednoliko distribuirana (međutim tu treba dogovor: umjesto ishoda P,G treba staviti neke brojčane vrijednosti:

najbolje je 0,1; to radimo zato što slučajna varijabla, prema definiciji prima vrijednosti u skupu realnih brojeva, simboli P,G nisu realni brojevi).

**Primjer 12.** Izračunajmo očekivanje i varijancu diskretne jednolike razdiobe.

Ako zadržimo oznake kao do sada, dobit ćemo:
$E(X)= (x_1+x_2\ldots+x_n)/n$,
$V(X)=( x_1^2+x_2^2 +\ldots+x_n^2)/n-((x_1+x_2\ldots+x_n)/n)^2$

## Binomna razdioba.

Razmotrimo pokus bacanja kocke 3 puta. Odredimo razdiobu slučajne varijable X koja registrira broj koliko se puta pojavio broj 6.
Jasno je da je
$R(X) = \{0,1,2,3\}$.
Nadalje:
p(X=0) = p(nijednom 6)
= p(prvi put nije 6, drugi put nije 6, treći put nije 6)
(zbog nezavisnosti)
= p(prvi put nije 6)·p(drugi put nije 6) ·p(treći put nije 6)
$= (5/6)^3$
p(X=1) = p(jednom 6, dvaput ne)
= p(prvi put 6, drugi i treći put ne ili prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije ili prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog disjunktnosti)
= p(prvi put 6, drugi i treći put put ne)+p(prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije) + p(prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6\cdot5/6\cdot5/6 + 5/6\cdot1/6\cdot5/6 + 5/6\cdot5/6$
$= 3\cdot1/6\cdot(5/6)^2$
Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor, možemo tumačiti kao broj na koliko načina od 3 mjesta možemo izabrati jedno mjesto za šesticu, dakle $3=\binom{3}{1}$.

p(X=2) = p(dvaput 6, jednom ne)
p(prva dva puta 6, treći put ne ili prvi i treći put 6, drugi put ne ili prvi put nije 6, drugi i treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
= p(prva dva puta 6, treći put ne)+p(prvi i treći put 6, drugi put ne) + p(prvi put nije 6, drugi treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6\cdot1/6\cdot5/6 + 1/6\cdot5/6\cdot1/6 + 5/6\cdot1/6\cdot1/6$
$= 3\cdot(1/6)^2\cdot5/6$.

Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor možemo tumačiti kao broj na koliko načina možemo od 3 mjesta izabrati dva mjesta za šestice, dakle $3 = \binom{3}{2}$.

p(X=3) = p(sva tri puta 6)
=p(prvi put 6, drugi put 6, treći put 6)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6$
$= (1/6)^3$
Zapišimo tu razdiobu.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| $(5/6)^3$ | $3 1/6(5/6)^2$ | $3(1/6)^2 5/6$ | $(1/6)^3$ |

To je primjer **binomne razdiobe**. Treba uočiti da se pokus *bacanje kocke 3 puta* sastoji od **tri uzastopna nezavisna izvođenja** pokusa *bacanje kocke 1 put.*
Također, u pokusu *bacanje kocke 1 put* treba uočiti događaj *pojavio se broj 6* kojemu je vjerojatnost p=1/6 i njemu suprotni događaj *nije se pojavio broj 6*, kojemu je vjerojatnost q=5/6.
Općenito, možemo zamisliti neki pokus i neki događaj *A* u tom pokusu kojemu je vjerojatnost p(A) = p (tada suprotni događaj događaja *A* ima vjerojatnost q=1-p). Zamislimo da taj pokus nezavisno izvodimo *n* puta i da slučajna varijabla X registrira **koliko se puta pojavio događaj** *A*. Tada je:

R(X) = {0,1,2,…,n}

(događaj *A* može se dogoditi ili nikako ili jednom ili dvaput itd. a najviše *n* puta).
Također:
p(X=i) = p(*i* puta se dogodio događaj *A*, a *n-i* puta se nije dogodio *A*)
$= \binom{n}{i}$p(prvih *i* puta dogodio se *A*, a ostalih *n-i* puta nije se dogodio *A*)
$= \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$ .

Broj $\binom{n}{i}$ koji se tu pojavljuje kao faktor može se shvatiti kao broj načina na koliko možemo od *n* mjesta izabrati *i* mjesta za događaj *A*. Treba uočiti da se taj faktor pojavljuje i za i=0, odnosno za i=n (kada je jednak 1).

To je bio **tipični primjer binomne razdiobe**. Treba uočiti da se ta razdioba opisuje pomoću **prirodnog broja** *n* (broj nezavisnih izvođenja pokusa) i **realnog broja** *p* između 0 i1 (vjerojatnost pojavljivanja događaja *A* u jednom izvođenju pokusa). Ti brojevi nazivaju se **parametrima razdiobe** (treba uočiti da je *n* **diskretan**, a *p* **kontinuiran** parametar).

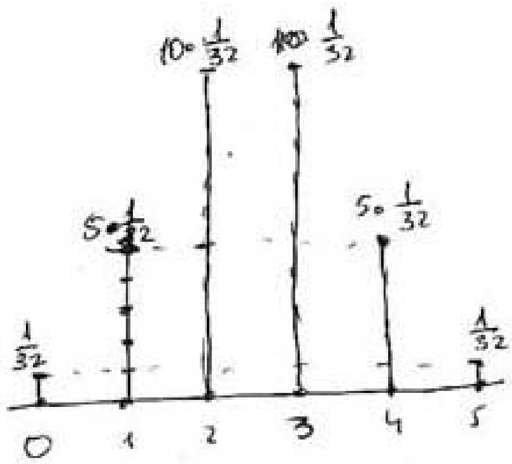
**Definicija 1.** Slučajna varijabla X distribuirana je po binomnom zakonu s parametrima *n* i *p*, ako je

$$R(X) = \{0,1,\ldots,n\} \text{ i } \quad p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \; i \in R(X).$$

Ako je tako pišemo X~B(n,p).

Uočite da X ovisi o dvama parametrima: diskretnom parametru n i kontinuiranom parametru p.

**Primjer 13.** Grafički predočimo binomne razdiobe B(5,1); B(5,1/10), B(1,1/2), B(1,9/10).


$X \sim \beta(5,1)$ ; $q=0$

$P(X=0) = q^5 = 0^5 = 0$

$P(X=1) = \binom{5}{1} q^4 p = 0$

$P(X=2) = 0$

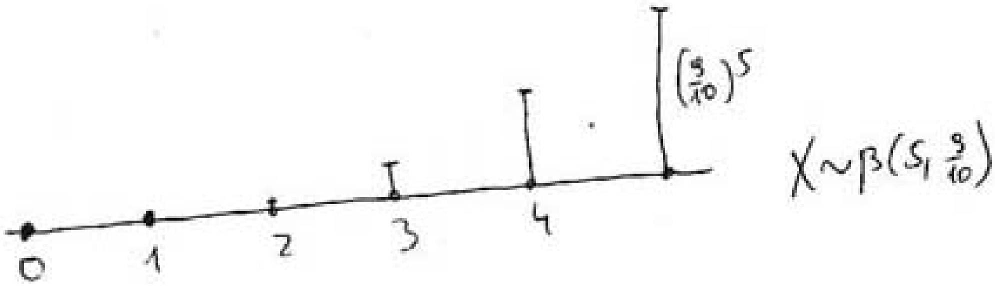
$P(X=3) = 0$

$P(X=4) = 0$

$P(X=5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 1 \cdot 1^5 \cdot 0^0$
$= 1$

$X \sim \beta(5, \frac{1}{2})$

$P(X=i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$
$= \binom{5}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$


**Primjer 14.** Odredimo očekivanje binomne slučajne varijable $X \sim B(n,p)$.

Pokušajmo najprije problem riješiti zdravorazumski. Pođimo od posebnog primjera kada je
$p=1/6$ i $n= 120$.
Možemo smatrati da je X slučajna varijabla koja broji koliko je bilo šestica pri 120 bacanja kocke. Jasno je da očekujemo 20 šestica (jednako kao i petica, četvorka itd.).
Dakle
$E(X) = 20 = 120:6 = 120 \cdot 1/6$
Analognim zaključivanjem dobili bismo:

**Ako je $X \sim B(n,p)$, onda je $E(X) = np$.**

To se može dokazati i izravnim računanjem.

**Primjer 15.** Bacamo kocku 6 puta.
a) Koliko šestica očekujemo da ćemo dobiti?
b) Koliko puta treba baciti kocku pa da vjerojatnost da bude bar jedna šestica bude veća od 0.5?

Ako slučajna varijabla registrira broj šestica, onda je $X=B(6,1/6)$.

a) Očekivani broj šestica upravo je očekivanje slučajne varijable X, dakle $E(X)=6 \cdot 1/6=1$.
b) Pretpostavimo da kocku treba baciti *n* puta. Zadatak se može zapisati kao: $p(X \geq 1) \geq 0.5$.

Međutim:

$$p(X \geq 1)=1-p(X=0)$$
$$=1-(5/6)^n .$$

Dakle, mora biti:
$1-(5/6)^n \geq 0.5$
odakle se dobije $n \geq 4$.

**Primjer 16.** Bacamo kocku 17 puta. Slučajna varijabla X registrira broj šestica. Izračunajmo E(X) i pokušajmo procijeniti pomoću toga **najvjerojatniji broj** šestica. Izračunajmo najvjerojatniji broj šestica i usporedimo s procjenom.

Tu je $X \sim B(17,1/6)$; zato je $E(X) = 17/6 = 2+5/6$.
Izračunajmo nekoliko početnih vjerojatnosti:
$p(X=0) = (5/6)^{17}$
$p(X=1) = 17 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^{16} > p(X=0)$
$p(X=2) = 8 \cdot 17 \cdot (1/6)^2 (5/6)^{15} > p(X=1)$
$p(X=3) = 5 \cdot 8 \cdot 17 \cdot (1/6)^3 (5/6)^{14} < p(X=2)$.
Zaključujemo da je najvjerojatnije da će biti dvije šestice iako je na osnovi vrijednosti očekivanja netko mogao pomisliti da je najvjerojatnije da će biti 3 šestice.

**Primjer 17.** Odredimo varijancu slučajne varijable $X \sim B(n,p)$.

Dobije se **V(X) = npq, gdje je q =1- p.**
To se može i dobiti izravnim računanjem.

**Zadatak 6.** Od svih binomnih razdioba s istim parametrom *n*, odredite onu koja ima najveću disperziju.

**Primjer 18.** Odredimo rekurzivnu vezu koja povezuje dvije uzastopne vrijednosti binomne razdiobe.

Neka je $X \sim B(n,p)$ i $p_i = p(X=i)$, $i=0,1,\dots,n$. Tada je (nakon uvrštavanja i skraćivanja)
$p_{i+1}/p_i = (n-i)p/(i+1)q$,
što se može zapisati i u obliku:
$$p_{i+1} = p_i \frac{(n-i)p}{(i+1)q}$$
Uočite da je tu izraz p/q stalan i on se na početku računanja može izračunati, a da se razlomak (n-i)/(i+1) mijenja (kako *i* raste, brojnik se smanjuje, a nazivnik povećava). Rekurzivna je formula naročito potrebna za računanje vjerojatnosti binomne razdiobe kad je *n* jako velik (već za *n* oko 100 većina kalkulatora ne može računati faktorijele pa ni binomne koeficijente). Međutim, ova formula omogućuje da se, kad se izračuna $p_0$, da se sve ostale vjerojatnosti lako izračunaju: sljedeća se vjerojatnost dobije iz prethodne množenjem s jednostavnim razlomkom.

**Primjer 19.** Neka je $X \sim B(100,0.1)$. Izračunajmo nekoliko prvih vjerojatnosti.

Tu je $p/q = 1/9.9$ pa se taj faktor u rekurzivnoj formuli može shvatiti kao dijeljenje s 9.9

$p_0=0.9^{100}=0.000026561$

$p_1= \frac{p_0}{9.9}\cdot\frac{100}{1}$ = 0.000268297 (dakle, početni rezultat koji je očitan na monitoru, prema rekurzivnoj formuli za i=0, množimo sa 100, a dijelimo s 9.9).

$p_2= \frac{p_1}{9.9}\cdot\frac{99}{2}$ = 0.001341485

$p_3= \frac{p_2}{9.9}\cdot\frac{98}{3}$ = 0.004426448

Sad uviđamo koje je pravilo: rezultat koji vidimo na monitoru množimo, odnosno dijelimo prema tom pravilu. Tako dalje dobivamo:
$p_4$= 0.010842562
$p_5$= 0.021028
$p_6$= 0.033630639
i tako dalje.
Uočite da je ova rekurzivna formula vrlo pogodna za izradu programa koji će nam davati vrijednosti vjerojatnosti u binomnoj razdiobi za različite parametre *p* i *n*.

## Razdiobe koje su bliske (približno jednake) binomnoj.

Predpostavimo da imamo *N* predmeta dviju vrsta i da iz tog skupa predmeta slučajno uzimamo, bez vraćanja, *n* predmeta.
Jasno je da će vjerojatnost da među izabranih *n* predmeta bude *i* predmeta 1. vrste (dakle *n-i* predmeta druge vrste), i=0,1,…,n
ovisiti o početnoj razdiobi predmeta 1., odnosno 2. vrste (tj. o vjerojatnosti da slučajnim biranjem izaberemo predmet 1. vrste).
Također je jasno da razdioba koja registrira koliko smo slučajno odabrali predmeta 1. vrste **nije binomna**. Pojasnimo to na konkretnim primjerima.

**Primjer 20.** Neka je u spremištu N=20 predmeta od kojih je 15 prve, a 5 druge vrste i neka slučajno biramo n=4 predmeta (bez vraćanja). Slučajna varijabla X registrira koliko je među njima predmeta 1. vrste. Odredimo razdiobu od X.

Prije rješavanja nekoliko napomena.
(i) Prema uvjetima, ako slučajno biramo jedan predmet, onda je vjerojatnost da on bude 1. vrste jednak p=15/20=0.75, a da bude druge vrste q=0.25.
(ii) Da smo izvršili pokus slučajnog biranja četiriju predmeta, jedan po jedan, ali da smo svaki put predmet vratili natrag, onda bi slučajna varijabla koja registrira koliko je bilo predmeta 1. vrste bila binomna s parametrima n=4, p=0.75 (međutim mi ne vraćamo predmete natrag, pa nije tako; vidjet ćemo kako je).
(iii) Obično je u primjeni da su predmeti prve vrste ispravni, a predmeti 2. vrste neispravni (ili da su jedni od jednog proizvođača, drugi od drugoga i sl.).

Vratimo se na rješavanje izvornog problema. Očito je da je
R(X) = {0,1,2,3,4},

što znači da
možda ni jedan izabrani predmet nije 1. vrste (tj. X=0),
možda je točno jedan 1. vrste (tj. X=1),
možda ih je točno dva 1. vrste (tj. X=2),
možda ih je tri 1. vrste (tj. X=3),
i, konačno, možda su sva četiri 1. vrste (tj. X=4).

Vidimo:
Slučajna varijabla X postiže vrijednost 0, ako prvi izabrani bude 2. vrste, potom i drugi izabrani 2. vrste itd. Vjerojatnost da prvi izabrani bude 2. vrste je 5/20, međutim, vjerojatnost da tada i drugi izabrani bude 2. vrste nije više 5/20 (jer ne vraćamo predmet natrag, pa sada imamo 19 predmeta od kojih je 4 predmeta 2. vrste), već 4/19 itd. Tako dobijemo.
$p(X=0)=(5/20)\cdot(4/19)\cdot(3/18)\cdot(2/17)$,
a ne $(5/20)^4$, što bismo dobili da smo vraćali predmet, tj. da je bila riječ o binomnoj razdiobi.

Slučajna varijabla X postiže vrijednost 1, ako izaberemo 1 predmet 1. vrste i 3 predmeta 2. vrste. Međutim, taj jedan predmet 1. vrste možemo izabrati prvi put, možemo drugi put, možemo treći put, odnosno možemo tek 4. put. To su sve **disjunktne situacije** pa pripadajuće vjerojatnosti treba zbrojiti.
$p(X=1)=$
$15/20\cdot5/19\cdot4/18\cdot3/17+5/20\cdot15/19\cdot4/18\cdot3/17+5/20\cdot4/19\cdot15/18\cdot3/17+5/20\cdot4/19\cdot3/18\cdot15/17$
$4\cdot15/20\cdot5/19\cdot4/18\cdot3/17$
Treba uočiti da su sva četiri gornja pribrojnika, iako naizgled različita, u stvari jednaka. To se vidi nakon pomljivog razmatranja njihovih brojnika i nazivnika, međutim to se moglo i očekivati i objasniti prije ikakva računanja. Naime ta su četiri pribrojnika vjerojatnosti od 4 elementarna događaja (ishoda ) u ovom pokusu, pa trebaju biti međusobno jednaki.
Također, treba uočiti da se rezultat razlikuje od onoga da smo vraćali predmete, tj. da je bila riječ o binomnoj razdiobi.

Za p(X=2), postupili bismo slično; tu bi bilo 6 (što je jednako $\binom{4}{2}$) mogućnosti jer je toliko mogućnosti da se u 2 od 4 biranja pojavi predmet prve vrste itd.

**Primjer 21.** Neka je u spremištu N=20 000 predmeta od kojih je 15 000 predmeta 1. vrste, a 5 000 je 2. vrste i neka biramo slučajno (bez vraćanja) n=40 predmeta. Neka slučajna varijabla X registrira koliko je među izabranim onih 1. vrste. Opišimo X.

Ovaj se primjer **samo po brojevima razlikuje od prethodnog** i, prema tome, mogao bi se riješiti po uzoru na taj. Međutim, **zbog velikog broja** ***N*** i **velikog broja** predmeta 1. vrste i predmeta 2. vrste, zaključujemo da se ovaj pokus **neće bitno razlikovati** od pokusa kad bismo birali 40 predmeta, jedan po jedan, i pritom uvijek predmet vraćali natrag. Naime, izborom nekoliko predmeta iz skupa od 20 000 predmeta, neće se bitno

promijeniti struktura između onih 1. i onih 2. vrste. Zato je naša slučajna varijabla **približno jednaka** binomnoj razdiobi
B(40;0.75), jer je n=40 i p=15 000/20 000 = 0.75.
Tako se i pripadajuće vjerojatnosti, koje bi bilo mukotrpno računati izravno, mogu približno, ali vrlo precizno, izračunati pomoću pripadajućih vrijednosti binomne razdiobe ( a i inače je važno da znamo da je neka razdioba bliska binomnoj, jer potonju dobro poznajemo). Očekivanje naše slučajne varijable približno je jednaka $40 \cdot 0.75 = 30$, a varijanca $40 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 7.5$.

## Poissonova razdioba.

Binomna razdioba primjer je diskretne razdiobe s konačno mnogo vrijednosti.
Poissonova razdioba također je diskretna, međutim prima beskonačno mnogo (prebrojivo) vrijednosti.
Točnije.

**Definicija 2**. Kažemo da je diskretna slučajna varijabla X distribuirana prema Poissonovu zakonu s parametrom a>0, ako je:
1. $R(X) = \{0,1,2,\ldots\}$
2. $p(X=i) = e^{-a}a^i/i!$ , $i=0,1,2,3,\ldots$

Ako je tako pišemo X~P(a).

Uočite da ta razdioba ovisi samo o jednom parametru (za razliku od binomne razdiobe koja ovisi o dvama parametrima).

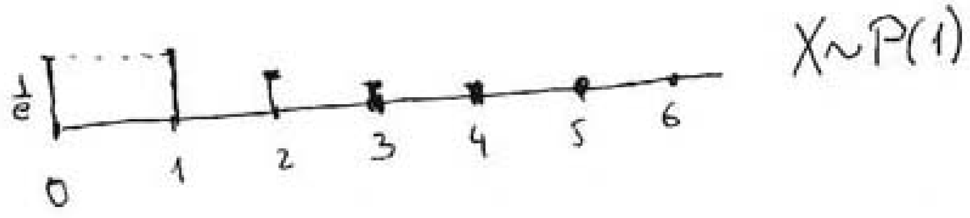
**Zadatak 7.** Pokažite da je $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+\ldots = 1$.

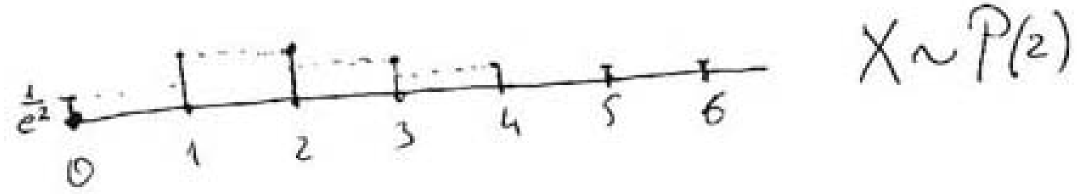
**Uputa**: Koristite se formulom za razvoj u red eksponencijalne funkcije.

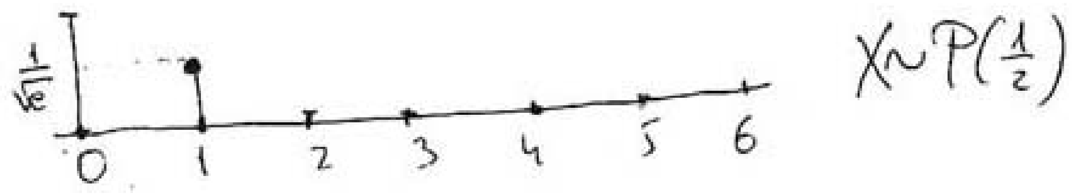
**Zadatak 8.** Provjerite da 1. i 2. zaista definiraju razdiobu vjerojatnosti.

**Uputa**: Zbog a>0, p(X=i)>0 za sve i, a iz zadatka 2. proizlazi da je zbroj tih brojeva jednak 1.

**Primjer 22.** Predočimo P(a) za a=1, a=2 i a=1/2.




**Primjer 23.** Pokažimo: ako je $X \sim P(a)$, onda je $E(X) = a$ i $V(X) = a$.

Uvrštavajući u formulu:
$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \ldots + x_i p_i + \ldots$
$x_i = i$, $p_i = e^{-a} a^i / i!$, dobit ćemo:
$E(X) = e^{-a}(0 \cdot a^0/0! + 1 \cdot a^1/1! + 2 \cdot a^2/2! + \ldots + i \cdot a^i/i! + \ldots)$
$\quad = e^{-a} \cdot a(1 + a^1/1! + a^2/2! + \ldots)$
$\quad = e^{-a} \cdot a \cdot e^a$
$\quad = a.$
Slično se izračuna $V(X)$.

Dakle:

**Ako je $X \sim P(a)$, onda je $E(X) = a$, $V(X) = a$**

Poissonova se razdioba pojavljuje na primjer kod slučajnih varijabla koje broje broj poziva u jedinici vremena na nekoj telefonskoj centrali, broj ulaza na neku adresu, broj kvarova na nekom složenom uređaju i sl. Primjenu Poissonove razdiobe pokazujemo na nekoliko primjera.

**Primjer 24.** Prosječan broj poziva u minuti na nekoj telefonskoj centrali je 8. Odredite vjerojatnost da na toj centrali u nekoj minuti bude:

a) najviše 8 poziva,
b) između 5 i 10 poziva,
c) barem 5 poziva

Prije rješavanja pokušajte procijeniti ove vjerojatnosti odoka.
Da bismo riješili zadatak, **moramo prihvatiti jedan dogovor**, a to je da se **broj poziva ponaša prema Poissonovu zakonu**. Ako je tako, onda je slučajna varijabla X koja registrira broj poziva u minuti na toj centrali, Poissonova s parametrom a=8 (naime, parametar $a$ je očekivanje, a očekivanje odgovara prosječnom broju poziva, odnosno prosječnoj vrijednosti što je postiže ta slučajna varijabla). Sad se pitanja mogu formulirati ovako:

a) $p(X\leq 8)=p_0+p_1+\ldots+p_8=e^{-8}(1+8/1!+8^2/2!+\ldots+8^8/8!)=0.5925$ (na 4 decimalna mjesta)
c) $p(5<X<10) = p_6+p_7+p_8+p_9 = e^{-8}(8^6/6!+\ldots+8^9/9!)= 0.4168$
d) $p(X>4)=1-p(X\leq 4)=1-p_0-p_1-p_2-p_3-p_4=0.9004$.

**Zadatak 9.** Predpostavimo da netko dobije prosječno 3 poruke na sat (na mobitelu).
(a) Koliko je puta vjerojatnije da tijekom sata dođe jedna poruka od toga da ne dođe ni jedna?
(b) Koji je najvjerojatnij broj poruka u jednom satu i koja mu je vjerojatnost.
(c) Kontroliranjem u 1000 sati dobiveni su rezultati o broju poruka. U koliko odprilike od tih 1000 sati neće biti ni jednog poziva, u koloko će biti točno jedan poziv itd.

**Primjer 25.** Uređaj se sastoji od dva dijela koji se nezavisno kvare jedan od drugoga. Jedan ima prosječno 3 kvara godišnje, a drugi 2. Uređaj radi ako mu oba dijela rade. Kolika je vjerojatnost da će uređaj raditi bez kvara

a) mjesec dana
g) cijelu godinu?

Prije rješavanja pokušajte provjeriti svoju intuiciju i procijeniti vremena odoka.
Neka X označava slučajnu varijablu koja mjeri broj kvarova u mjesecu prvog uređaja, a Y slučajnu varijablu koja označava broj kvarova u mjesecu na drugom uređaju (mjesec smo uzeli da bismo mogli riješiti a) zadatak, a za b) zadatak uzet ćemo da slučajne varijable registriraju broj kvarova godišnje). Da bismo mogli riješiti zadatak moramo pretpostaviti da je prosječni broj kvarova mjesečno 12 puta manji od prosječnog broja kvarova godišnje.
Zato je $X\sim P(1/4)$, $Y\sim P(1/6)$.
Budući da uređaj radi ako oba dijela rade i budući da je njihov rad, odnosno kvarenje nezavisno, imamo:

a) $p(X=0 \text{ i } Y=0)=p(X=0)p(Y=0)=e^{-1/4}e^{-1/6}=0.6592$.

b) Sad je $X\sim P(3)$, $Y\sim P(2)$ pa je
$p(X=0 \text{ i } Y=0)=p(X=0)p(Y=0)= e^{-3}e^{-2}=0.0067$.

**Primjer 26.** Riješimo prethodni primjer uz pretpostavku da uređaj radi ako mu bar jedan dio radi.

Sada je, uz iste oznake u oba slučaja:

a) p(uređaj bez prekida radi mjesec dana) = p(bar jedan od dijelova se neće kvariti mjesec dana) = $p(X=0 \text{ ili } Y=0)=p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0)$ zbog nezavisnosti
$= 0.9660$
b) $p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0)=0.1919$.

Napomena.

1. Iako je vjerojatnosti Poissonove razdiobe lakše računati nego binomne i ovdje je često dobro koristiti rekurzivnu formulu koju je lako izvesti:
   $p_{i+1}/p_i = a/(i+1)$.
2. Može se pokazati da Poissonova razdioba nastaje kao limes binomnih razdioba kod kojih parametar *n* teži u beskonačnost, a umnožak *np* je stalan broj. Tada taj niz razdioba (tj. njihovih vrijednosti i pripadnih vjerojatnosti) teži upravo k razdiobi P(np). Drugim riječima, ako želimo tako dobiti razdiobu P(a), onda parametar *n* redom uzima vrijednosti 2,3,4,…, a , parametar *p* redom uzima vrijednosti a/2, a/3, a/4,….
   Zato se nekada Poissonova razdioba koristi za aproksimaciju binomne (jer za dosta veliki *n* i ne prevelik *np*, vjerojatnosti možemo računati kao kod Poissonove razdiobe).

**Zadatak 10**. Smislite strategiju za izvođenje Poissonove razdiobe.

# Kontinuirane slučajne varijable.

Diskretne slučajne varijable povezane su s prebrojavanjem u nekom pokusu. One primaju konačan skup vrijednosti (ili možda beskonačan, ali je tada nužno prebrojiv i diskretan). Kod tih slučajnih varijabla možemo zamišljati da je jedinična masa (ukupna vjrojatnost) raspoređena na brojevnom pravcu u tih konačno točaka (odnosno prebrojivo mnogo točaka). Međutim, u pokusima se prirodno javlja i **mjerenje**. Skup brojeva kojima se (teoretski) zapisuju rezultati mjerenja nije ni konačan niti diskretan, već neki interval u skupu realnih brojeva . Pojasnimo to malo na primjerima.

1. Slučajna varijabla koja mjeri temperaturu u nekom pokusu (u stupnjevima) teoretski može primiti rezultat u intervalu [-273?, + infty>. Naravno da svaki mjerni uređaj ima diskretnu mjernu skalu, (pa bi tako mjerenje njime postizavalo samo konačan skup vrijednosti) međutim, iz teoretskih razloga mi ne možemo isključiti ni jednu međuvrijednost (koje nema na tom, ali možda ima ili će biti na nekom drugom mjernom uređaju). Pitanje mjerne skale za temperaturu nije uopće jednostavno pitanje (neke teorije prihvaćaju diskretan, a neke kontinuiran karakter temperature; u što tu ne možemo ulaziti; napominjemo samo da se mi, iz teoretskih razloga, držimo da je temperatura kontinuirana).
2. Slučajna varijabla koja mjeri postotak neke tvari u nekoj smjesi teoretski može primiti svaku vrijednost intervalu [0,100] (tu vrijedi slična napomena kao i prije, što, u sličnim prigodama nećemo više spominjati).
3. Slučajna varijabla koja mjeri relativni udio neke tvari u nekoj smjesi teoretski može primiti svaku vrijednost u intervalu [0,1].
4. Grješka pri mjerenju teoretski može biti svaki realni broj itd.

**Primjer 1.** Zamislimo da rezultati mjerenja mogu ravnopravno biti brojevi u intervalu [0,2] i da slučajna varijabla $X$ registrira taj rezultat. Tada je vjerojatnost (jedinična masa) jednoliko raspoređena na intervalu [0,2]. Naime možemo zamisliti da smo jediničnu masu razmazali jednoliko po tom intervalu.

Mora biti $p(X=a) = 0$,

za svaki *a* iz intervala [0,1] (jer kad bi za jedan *a* ta vrijednost bila pozitivna, ona bi morala biti pozitivna za sve brojeve iz intervala, jer su oni ravnopravni zbog jednolike raspoređenosti vjerojatnosti; međutim tada bi ukupna vjerojatnost bila beskonačna, a mora biti 1). Tako imamo **naizgled paradoksalnu** situaciju: vjerojatnost u svakoj točki je 0, a ukupna je vjerojatnost 1.

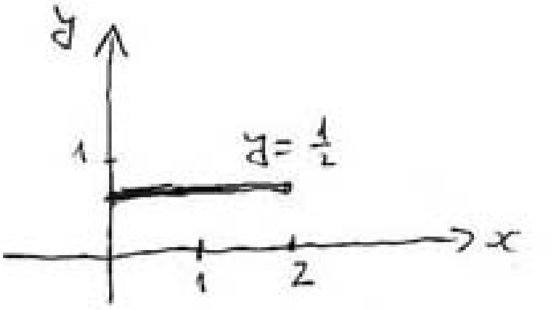
S druge strane,

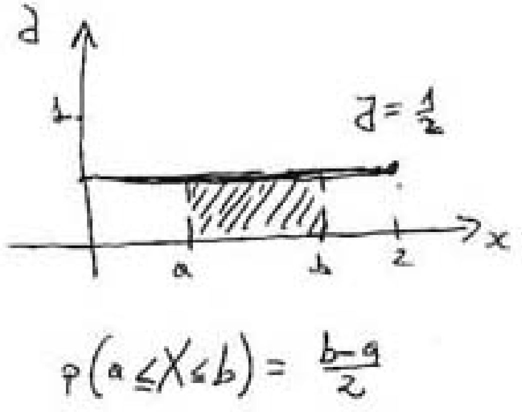
$p(a<X<b) = (b-a)/2$,

za svaka dva broja *a,b* iz intervala za koja je $a<b$. To je zato što je ukupni interval duljine 2, a interval [a,b] je duljine *b-a*, a pripada mu vjerojatnost proporcionalno duljini (intervalu duljine 1 pripada vjerojatnost 1/2).

**Matematički model** za ovakvu razdiobu vjerojatnosti jest konstantna funkcija:

$f(x):=1/2$, za x u intervalu [0,2].




Ta je funkcija **pozitivna** na tom intervalu i **površina** ispod njena grafa je 1. Da se odredi vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi rezultat između brojeva *a* i *b*, treba duljinu intervala od *a* do *b*, tj. broj (b-a) pomnožiti s 1/2 , tj. s vrijednošću funkcije, a to je isto što i izračunati površinu ispod grafa funkcije *f* od x=a, do x=b.

**Kažemo da je slučajna varijabla X neprekinuta (kontinuirana) ako prima svaku vrijednost na nekom intervalu (i svaku s vjerojatnošću 0)**.

Ta definicija nije matematički potpuno zadovoljavajuća, ali će za nas biti dovoljna.

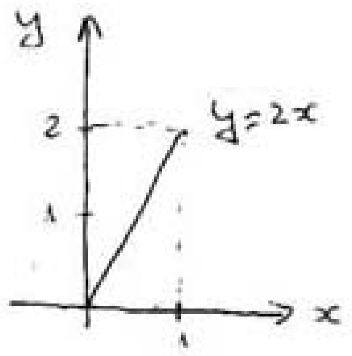
**Primjer 2**. Opišimo kontinuiranu slučajnu varijablu *X* koja prima vrijednosti u intervalu [0,1] i kojoj je vjerojatnost raspoređena proporcionalno udaljenosti od ishodišta (a ne jednoliko kao u prethodnom primjeru). Izračunajte vjerojatnost da *X* poprimi vrijednost između 0.3 i 0.7.

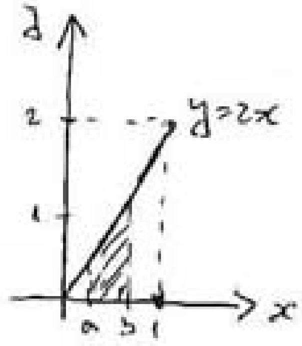
U ovom slučaju možemo zamisliti da smo jediničnu masu razmazali od x=0 do x=1, tako da se gustoća namaza povećava proporcionalno s udaljenošću od ishodišta (koja je, za svaki *x*, upravo jednaka *x*). Pripadna funkcija *f* koja to opisuje nije konstanta kao prije, već je
f(x)=cx, za x od 0 do 1,
gdje je c neka konstanta, koju ćemo odrediti ovako.
Uočimo mali interval [x,x+$\Delta$x] i zanima nas vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi rezultat na tom intervalu. Na tom intervalu funkcija *f* je približno konstantna i jednaka f(x) (na malom intervalu vrijednosti su se malo promijenile u odnosu na početnu) pa je, u skladu s prethodnim primjerom,
p(x<X<x+$\Delta$x)$\approx f(x)\cdot\Delta x = cx\Delta x$
Razmotrimo sad broj $p(0 \le X \le 1)$.
To je, s jedne strane, jednako 1 (ukupna vjerojatnost). S druge strane ta se vjerojatnost dobije kad bismo "zbrojili" sve doprinose na malim intervalima, a oni se dobiju, kako znamo, integriranjem izraza cxdx od x=0 do x=1 (tu $\Delta$x prelazi u dx). Dakle, $\int_0^1 cxdx = 1$ (opet je površina ispod grafa od *f* jednaka 1)
odakle dobijemo c=2, tj.
f(x)=2x, za x od 0 do 1.
Vjerojatnost da *X* poprimi rezultat između *a* i *b* dobije se slično, "zbrajanjem" malih doprinosa od x=a do x=b, tj. **integriranjem** od *a* do *b*, dakle:

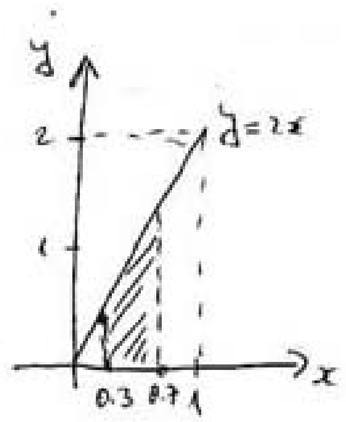
$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 2xdx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2.$$

Posebno:
p(0.3<X<0.7) = površina ispod grafa funkcije *f* od x=0.3 do x=0.7

$$= \int_{0.3}^{0.7} 2xdx = x^2 \Big|_{0.3}^{0.7} = 0.4.$$



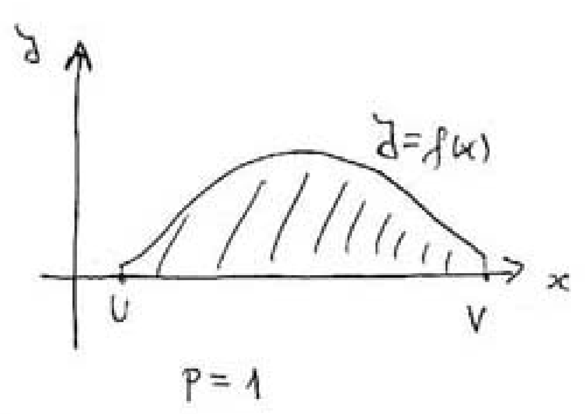

U ovim se primjerima javljala funkcija *f* koja prima vrijednosti veće ili jednake 0, koja opisuje razdiobu vjerojatnosti na intervalu.
Vidimo da je razumno definirati općenito:

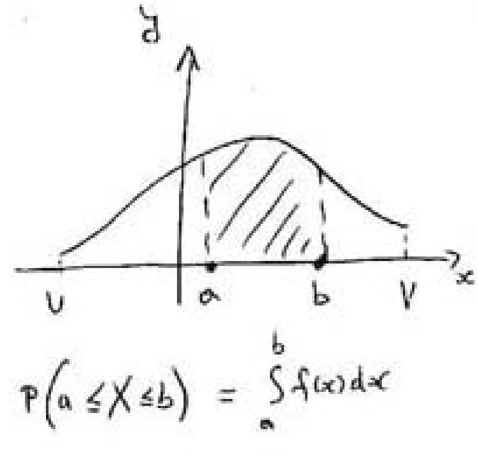
**ako kontinuirana slučajna varijabla prima rezultate na intervalu [u,v] , onda je razdioba vjerojatnosti zadana nekom funkcijom *f* definiranom na intervalu [u,v] za koju vrijedi:**

1. $f(x) \geq 0;\ x \in [u,v]$
2. $\int_u^v f(x)dx = 1$

Pri tom je vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi vrijednost u intervalu [a,b] :

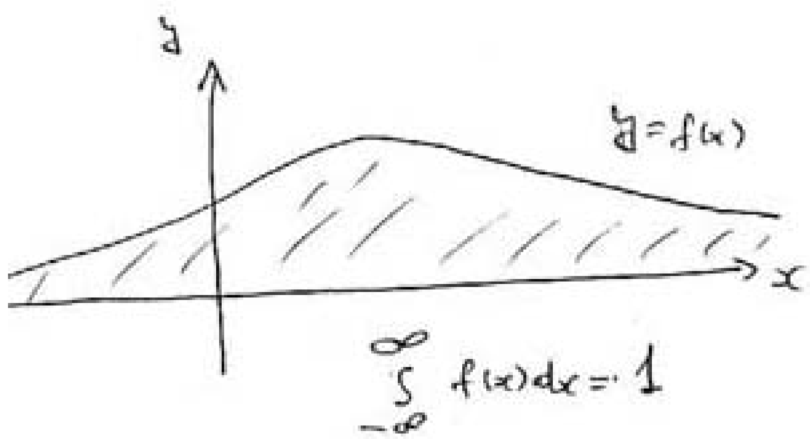
$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$



Nekoliko komentara.

1. U našim je primjerima vjerojatnost bila raspoređena prema nekom pravilu na intervalu [u,v] . To su mogli biti i otvoreni intervali i poluintervali i beskonačni intervali i, konačno, najveći interval: cijeli skup realnih brojeva. Od sada ćemo smatrati da je **uvijek tako,** tj. da je vjerojatnost na **cijelom skupu realnih brojeva** (tj. da je funkcija *f* zadana na čitavom skupu realnih brojeva; to napravimo tako da na onom dijelu gdje nema vjerojatnosti stavimo da je vrijednost funkcije *f* jednaka 0). Zato će od sada biti:




(i) $f(x) \geq 0$, za sve realne brojeve $x$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2. Funkciju *f* s ovim dvama svojstvima zovemo **funkcijom gustoće vjerojatnosti**.
   Dakle, svaka ovakva funkcija definira neku razdiobu vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable.

3. Vjerojatnost da slučajna varijabla *X*, koja ima funkciju gustoće *f*, poprimi vrijednost na intervalu [a,b], jednaka je površini ispod grafa funkcije *f* od x=a do x=b (integral).

4. Iako ima puno takvih funkcija *f*, nas će u praksi zanimati samo nekoliko takvih funkcija (odnosno nekoliko tipova ili klasa takvih funkcija, što ćemo vidjeti poslije).

5. Možemo li opravdati to da funkciju *f* možemo integrirati na svim podintervalima? Rekli smo da *f* opisuje kako je jedinična masa razmazana po *x*-osi (na početku je to bilo samo po intervalu). Razumno je pretpostaviti da dok kist vučemo neprekinuto, onda će i pripadna funkcija koja opisuje gustoću namaza biti neprekinuta. Također, razumno je pretpostaviti da ćemo, možda nekoliko puta zastati, pa potom nastaviti. Na tim mjestima funkcija *f* će možda biti prekinuta jer ćemo nastaviti razmazivanje po drugom pravilu. Tako će funkcija *f* biti **po dijelovima neprekinuta**, a kako je ukupna masa koju razmazujemo konačna, ona će imati integral na svakom podintervalu.

6. Formule 1. i 2. koje definiraju funkciju gustoće treba gledati u **analogiji s diskretnom slučajnom varijablom**. Tako je formula 1. kontinuirani analogon uvjeta:

1'. $p_i > 0$, za sve *i* (vjerojatnosti su pozitivne; eventualno se može dopustiti da budu 0),
a formulu 2. kao analogon formule

2' $\sum p_i = 1$ (ukupna vjerojatnost je 1).

Jasno je da se formula za vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost na nekom intervalu može smatrati analogijom one za diskretnu varijablu (integral od donje do gornje granice zamjenjuje prijašnje zbrajanje vjerojatnosti). Poslije ćemo vidjeti da se ta analogija provlači i dalje: na očekivanje, varijancu i sl.

Dakle, jednolika funkcija gustoće u prvom primjeru mogla bi se zapisati kao:
f(x)=1/2, za x od 0 do 2
= 0 , inače,

dok bi se linearna funkcija gustoće iz primjera 2. mogla zapisati kao:
f(x)=2x, za x od 0 do 1,
=0, inače.

Jasno je da se sve važno kod prve od ovih dviju funkcija događa na intervalu [0,2], a kod druge na intervalu [0,1].
Evo jednog primjera funkcije gustoće $f$ koja nije jednaka 0 niti za jedan $x$.

**Primjer 3**. Pokažimo da je $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable *X*.

Ta je funkcija očito definirana za svaki realni broj $x$ i također je očito da je ona strogo pozitivna (time je potvrđen prvi uvjet koji mora zadovoljavati funkcija gustoće).
Da bismo potvrdili drugi uvjet moramo izračunati površinu ispod grafa funkcije $f$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi} arctgx \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1$$

Time je pokazano da je $f$ funkcija gustoće vjerojatnosti.

Pogledajmo kako možemo računati vjerojatnosti na intervalima.

p(a<X<b)= $\int_{a}^{b} \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} = \dfrac{1}{\pi}(arctgb - arctga)$

To smo mogli ovako jer je pripadna funkcija gustoće $f$ imala **primitivnu funkciju** ( tj. funkciju kojoj je derivacija jednaka $f$) pa se računanje integrala svodi na oduzimanje dviju vrijednosti primitivne funkcije.

Zaključujemo da bi nam **bilo dobro** uvijek znati primitivnu funkciju funkcije $f$. Tako za računanje vjerojatnosti **ne bismo trebali integrirati**, već **samo oduzimati**. Kako znamo, primitivna je funkcija određena do na konstantu, što znači da kada znamo jednu, sve se ostale dobiju dodavanjem konstante. Od svih tih, **izabrat ćemo jednu** i dati joj **posebno ime**.

**Definicija 1**. **Funkcija distribucije vjerojatnosti** slučajne varijable *X* jest, prema definiciji, funkcija F: $R \to R$, zadana uvjetom:
F(x):=p(X<x)
(vrijednost te funkcije u realnom broju $x$ jest vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi rezultat manji od tog $x$).

Pokazat ćemo da je upravo ta funkcija **jedna od primitivnih funkcija** funkcije $f$. Prije toga navedimo nekoliko njenih svojstava koje proizlaze iz njene definicije.

1. očito je $F$ rastuća (jer se povećanjem broja $x$ ne može ukupna vjerojatnost do tog mjesta smanjiti),

2. očito je da $F$ prima vrijednosti između 0 i 1 (jer su njene vrijednosti neke vjerojatnosti)

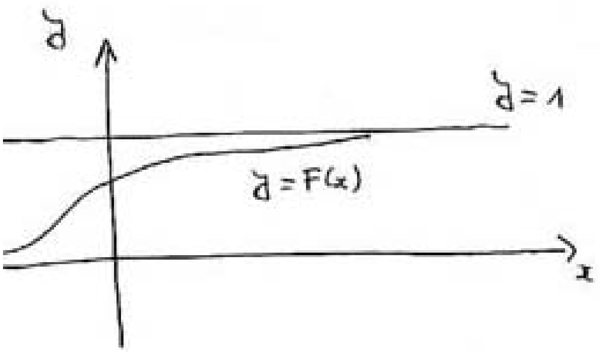
3. razumno je pretpostaviti da joj je limes kad $x$ ide u *beskonačnost* upravo 1 (jer je ukupna vjerojatnost 1), a da joj je limes kad $x$ ide u *–beskonačnost* jednaka 0.

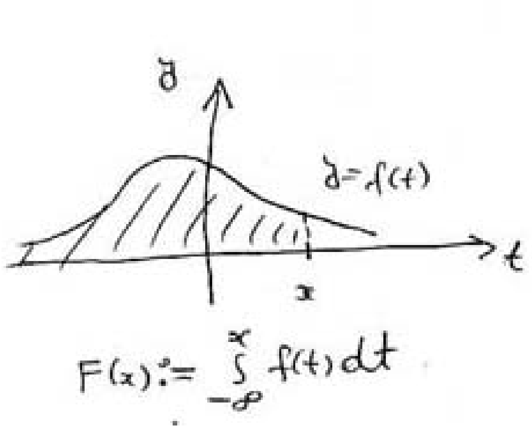
4. razumno je pretpostaviti i da je ta funkcija neprekinuta (jer malim promjenama vrijednosti $x$, malo se mijenja i vjerojatnost).

Sva ta svojstva izravno se dokazuju iz sljedeće veze:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Tu smo ispod integrala stavili varijablu $t$, jer je $x$ **gornja granica** integrala (pa da ne dođe do zabune).

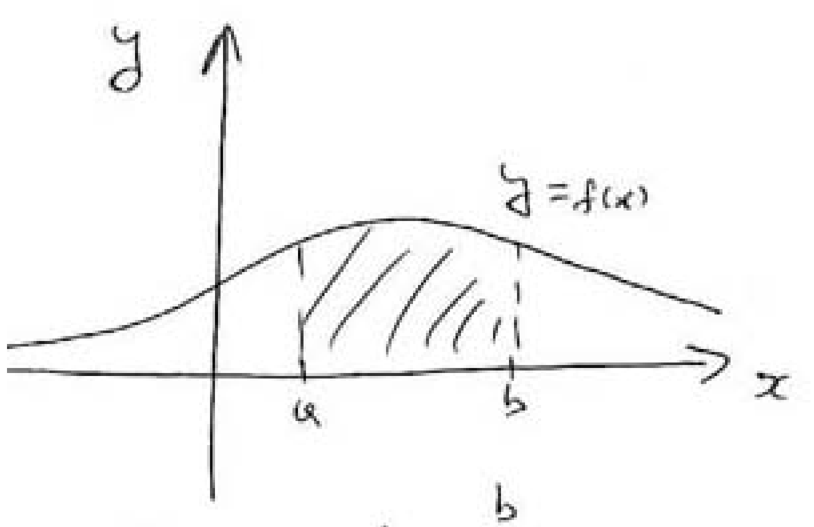


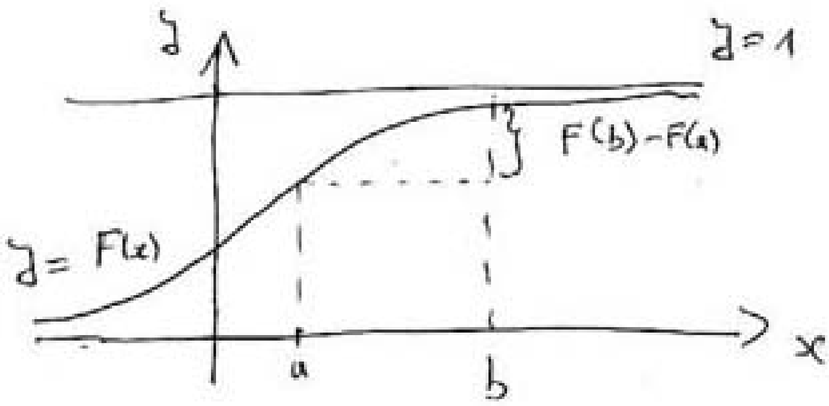

Tako smo funkciju $F$ opisali pomoću funkcije $f$. Obratno, iz definicije primitivne funkcije, sada slijedi da je:
F'(x)=f(x)
za sve $x$ osim onih u kojima funkcija $f$ ima prekid (a takvih je mjesta konačno mnogo; dopušta se i općenitija situacija, ali mi se ograničavamo na ovu).
Dakle $F$ je primitivna funkcija funkcije $f$ (odnosno to je barem po dijelovima).
Sada je.

$$p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

=F(b)-F(a).




$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$




$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

**Primjer 4**. Pokažimo da je funkcija *f* zadana s

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < -1 \\ x+1, & \text{za } -1 \le x \le 0 \\ 1/2, & \text{za } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{za } x > 1 \end{cases}$$

funkcija gustoće neke kontinuirane slučajne varijable *X*. Odredimo funkciju distribucije od *X* i nacrtajmo slike.

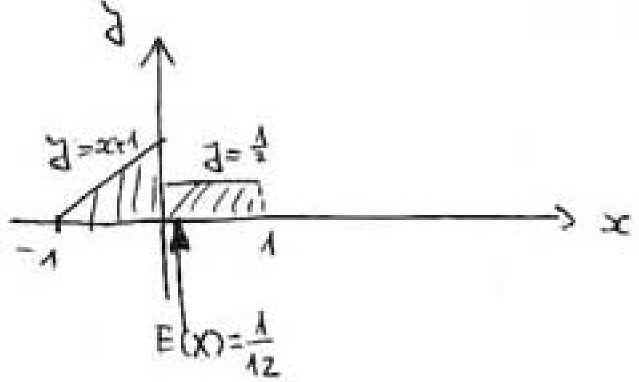
Prije rješavanja komentirajmo kako možemo zamišljati ovu funkciju. Netko je jediničnu masu razmazao po intervalu [-1,1] tako da je prvim potezom kista razmazao polovicu mase

po intervalu [-1,0] jednoliko pojačavajući gustoću namaza, potom je zastao i ostatak jednoliko razmazao po ostalom dijelu, tj. po intervalu <0,1].
Da bismo riješili problem, prvo treba pokazati da je $f(x) \geq 0$ za sve *x*, za što jedino treba provjeriti da izraz x+1 nije negativan niti za jedan *x* u intervalu [-1,0].
Kako je f(-1)=0, f(0)=1 i kako *f* raste na tom intervalu (tu je *f* linearna funkcija), *f* ne može biti negativna na tom intervalu.

Drugi je uvjet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, što u ovom slučaju postaje

$\int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx = 1$,

što se lako pokaže, pa je f funkcija gustoće.
Napomenimo da se ovaj uvjet nije morao raditi pomoću integrala, već se mogla elementarno izračunati površina ispod grafa funkcije *f*: to je zbroj površina (pravokutnog) trokuta što ga s koordinatnim osima čini pravac s jednadžbom y=x+1 (a to je jednako 1/2) i pravokutnika što ga pravac s jednadžbom y=1/2 čini s *x*-osi od x=0 do x=1 (i to je 1/2, ukupno 1).

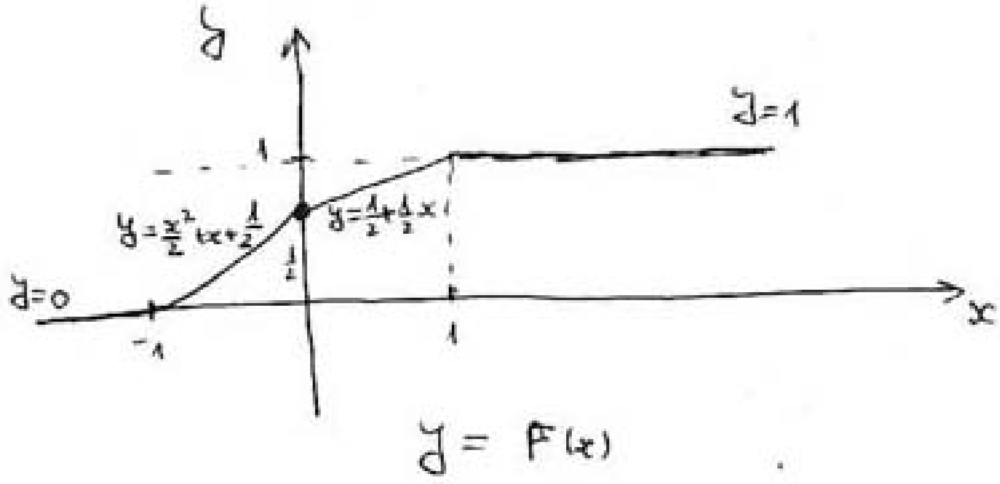



Funkciju distribucije određujemo pomoću formule $f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, a kako je *f* zadana po dijelovima, različitim načinima treba i integrirati po dijelovima (u ovom zadatku se čak ne treba ni integrirati već površine računati elementarno). Dakle:

| | | |
|---|---|---|
| F(x) = 0, | za x<-1 | (jer je tu i *f* nula pa nema površine) |
| $= \int_{-1}^{x}(t+1)dt$, | za $-1 \leq x \leq 0$ | |
| =površina do 0 + $\int_{0}^{x}\frac{1}{2}dt$, | za $0<x \leq 1$ | |
| = 1 , | za x>1, | (jer je do x=1 ukupna površina već 1) |

Nakon računanja dobijemo:

| | |
|---|---|
| F(x) = 0, | za x<-1 |
| $= x^2/2+x+1/2$ | za $-1 \leq x \leq 0$ |
| = 1/2+(1/2)x | za $0<x \leq 1$ |
| = 1 | za x>1. |




Napomene:

1. Na grafu funkcije *F* uočite da je neprekinuta, rastuća (ali ne strogo) i da su joj vrijednosti između 0 i 1.

2. *F* je derivabilna funkcija osim za konačno vrijednosti. To treba provjeriti samo za x=-1, x=0, x=1 tako da se gledaju derivacije s lijeva i s desna (koje uvijek postoje) i provjerava jesu li jednake.

   U x= -1, obje su derivacije 0 pa je *F* derivabilna i u –1.

   U x=0, derivacija s lijeva je 1, a s desna 1/2 pa *F* nije derivabilna u 0.

   U x=1, derivacija s lijeva je 1/2, a s desna 0 pa *F* nije derivabilna ni u 1.

Dakle za sve *x* osim za x=0 i x=1, *F* je derivabilna i vrijedi F'(x)=f(x).

3. Pokušajte sami obrazložiti zašto je kao u 2., pa poslije pogledajte objašnjenje.

Vrijednost funkcije *F* za neki *x*, dobije se tako da se izračuna površina ispod grafa funkcije *f* do toga *x*. Dokle je *f* neprekinuta, površina ispod nje se također neprekinuto mijenja, štoviše mijenja se glatko (tj. *F* ima prvu derivaciju, tj. brzinu promjene, ali ne nužno svuda i drugu derivaciju), međutim tamo gdje *f* ima prekid (skok), površina će se neprekinuto nastaviti povećavati (sa slike je jasno da površina nema skok), ali neće biti derivabilna u toj točki.

## Očekivanje i varijanca kontinuirane slučajne varijable.

Ove dvije važne karakteristike definiramo **prema uzoru na diskretan slučaj**. Tamo je razdioba vjerojatnosti bila u analogiji sa sustavom čestica na pravcu, očekivanje je odgovaralu težištu sustava čestica, a varijanca momentu inercije oko težišta. Sad umjesto sustava čestica imamo jediničnu masu raspoređenu po pravcu (skupu realnih brojeva), a način kako je ona raspoređena zadan je funkcijom gustoće *f* ( koja se inače, obično u mehanici, označava slovom $\rho$ ). Dakle:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

(u usporedbi s diskretnim slučajem, suma se zamjenjuje integralom, $x_i$ s $x$, a $p_i$ s f(x)dx).

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

U ovim formulama, a i inače kad je riječ o slučajnim varijablama, treba lučiti oznaku $X$ (za slučajnu varijablu) od oznake $x$ (za realnu varijablu tj. bilo koji realni broj).

Napomene:

1. Kao i prije, očekivanje ima značenje točke u kojoj je ravnoteža. Taj broj može biti i pozitivan i negativan.

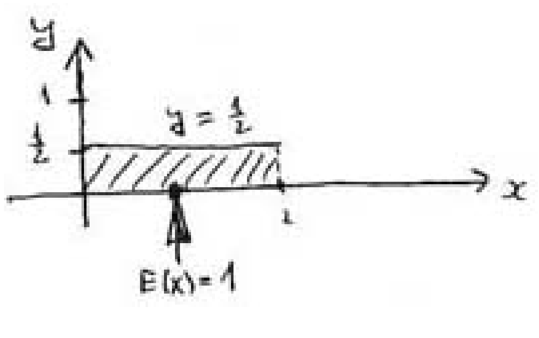
2. Varijanca, kao i prije, mjeri stupanj rasipanja oko očekivanja. Iz formule se vidi da je uvijek pozitivna (jer integriramo funkciju koja je umnožak jedne funkcije koja je kvadrat i druge koja je pozitivna, prema definiciji, tj. računamo površinu ispod grafa funkcije koji je iznad osi $x$). Zato, kao i prije, možemo definirati **standardnu devijaciju** slučajne varijable X:
   s(X) = $\sqrt{V(X)}$ .

3. Za računanje u konkretnim slučajevima pogodnija je druga formula za varijancu (a dobije se lako iz ove, kao i prije):
   $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - E^2(X) .$$

Tu, kao i obično, $E^2(X)$ znači $(E(X))^2$.

**Primjer 5**. Izračunajmo očekivanja i varijance slučajnih varijabla iz prethodnih primjera.

1. f(x) := 1/2, za $x$ iz [0,2]
   := 0, inače.




Na osnovi slike (jednolika razdioba), odmah nam mora biti jasno da je očekivanje 1. Ipak izračunajmo.

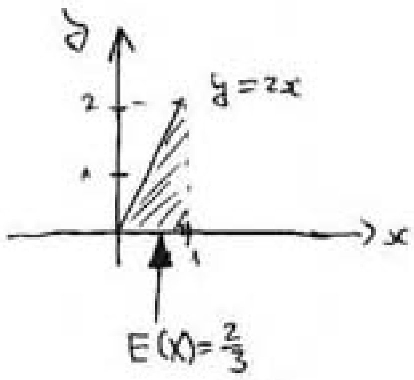
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{4}{4} = 1$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X)$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx - 1^2 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{1}{3}$$

2. f(x) := 2x ,   za  x iz [0,1]
   := 0,      inače.



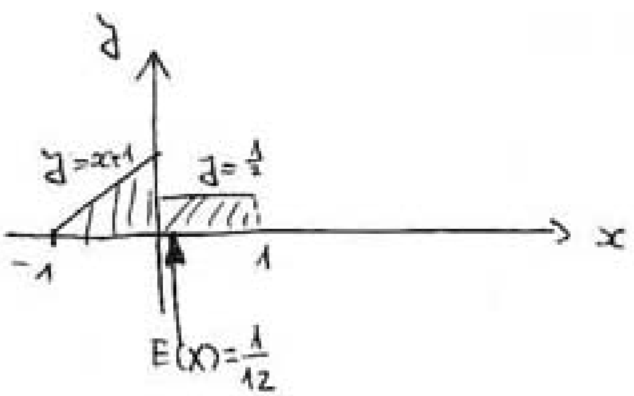

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}.$$

Iz slike je jasno zašto je očekivanje bliže 1 nego 0.

$$V(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Pokušajte dati fizikalne razloge zbog kojih je u ovome slučaju varijanca bitno manja nego u prethodnom.

3. f(x) := x+1,    za $x$ između –1 i 0
   :=  1/2,    za  $x$ između 0 i 1
   :=   0  ,     inače.



Prije računanja pokušajte odoka ocijeniti hoće li očekivanje biti pozitivno ili negativno.

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(x+1)dx+\int_{0}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=(0+1/3-1/2)+1/4=\frac{1}{12}.$$

$$V(X)=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}dx-\frac{1}{144}=(-1/4+1/3)+1/6-1/144=\frac{35}{144}.$$

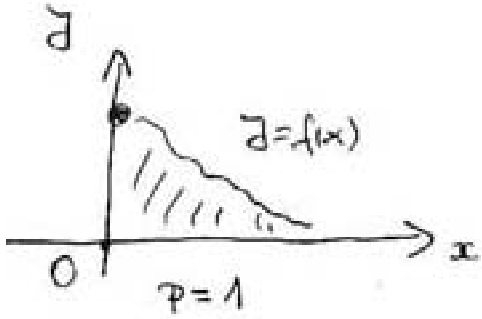
## Eksponencijalna razdioba.

Vrijeme izmedju dvaju kvarova na nekom uređaju ili stroju, nije egzaktno određeno (odnosno mi, sa sadašnjim znanjem, nismo sposobni to odrediti), već je slučajno. Slično je s vremenom izmedju dvaju posjeta neke adrese, poziva na nekom telefonu, izmedju dvaju radioaktivnih raspada, vremenom rada do kvara neke žarulje i sl. Zato ima smisla govoriti o slučajnoj varijabli koja registrira vrijeme izmedju dvaju kvarova, trajanja neke žarulje i sl.. Kad se kaže *neke*, onda to treba pojasniti. Vrijeme trajanja ovisi o mnogim faktorima. Da bismo imali određeniju situaciju pretpostavimo da razmatramo žarulje istog proizvođača, koje su proizvedene istom tehnologijom od istog proizvođača. Ipak neke od njih imaju kraće, a neke duže vrijeme trajanja koje ne možemo lako dokučiti.  ato je vrijeme trajanja slučajno izabrane takve žarulje slučajna varijabla. Da bismo sebi malo situaciju pojasnili možemo testirati mnogo takvih žarulja i tako doći do predodžbe o **prosječnom** vijeku trajanja takvih žarulja, a i o distribuciji vremena trajanja (time se bavi **statistika** i o tome ćemo više govoriti poslije).

Neka je $X$ slučajna varijabla koja registrira vrijeme trajanja žarulje. Intuitivno je jasno da će se vjerojatnost da žarulja traje smanjivati tijekom vremena, pa je razumno pretpostaviti da je funkcija gustoće vjerojatnosti $f$ slučajne varijable $X$ padajuća (za pozitivne $x$, a za negativne, prirodno, jednaka je 0). Dakle:

f(x) je padajuća za x>0
= 0 za x<0.

Znademo još da će površina ispod grafa te funkcije biti 1.




Ima jako puno funkcija koje to zadovoljavaju, međutim, iz konkretnih ispitivanja (o kojima ćemo više govoriti u statistici), ali i iz razumnih fizikalnih pretpostavaka (o kojima nećemo govoriti), može se prihvatiti ne samo to da funkcija $f$ pada već i da *eksponencijalno pada* (za pozitivne $x$). To znači da je:

$f(x) = ae^{-\lambda x}$,  za  $x>0$

gdje je $e$ baza prirodnog logaritma, a $\lambda$ i $a$ pozitivni realni brojevi ( drugi zato da $f$ bude pozitivna, a prvi zato da $f$ bude padajuća). Vezu između tih brojeva dobit ćemo ako uzmemo u obzir da je pripadna površina jednaka 1. Jednadžba:

$$a\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = 1,$$

postaje $a \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$, tj. $a=\lambda$.

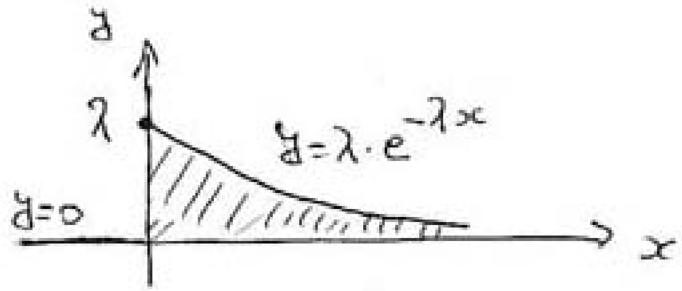
To nas upućuje na sljedeću definiciju.

**Definicija 2**. Kažemo da slučajna varijabla $X$ ima **eksponencijalnu** razdiobu s **parametrom** $\lambda>0$, ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x>0$

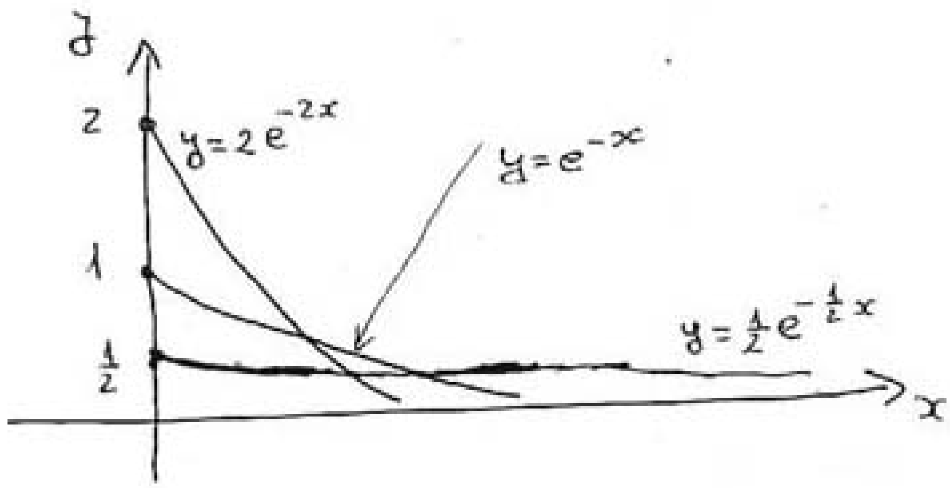
$= 0$,   inače.

Ako je tako, pišemo $X \sim E(\lambda)$.




Dakle, ima beskonačno mnogo eksponencijalnih razdioba (čak neprebrojivo mnogo), ali sve su slične i parametrizirane su pozitivnim parametrom $\lambda$. Nabrojili smo više različitih (ali sličnih) pojava koje se približno ponašaju prema eksponencijalnom zakonu. Parametar $\lambda$ Razlikuje medjusobno te pojave (žarulje različitih kvaliteta, stranice različitih posjećenosti, rzličite radioaktivne materije i sl.).

**Primjer 6.** Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu i uočimo međusobni odnos funkcija gustoće eksponencijalnih razdioba za $\lambda=1$, $\lambda=1/2$, $\lambda= 2$.



Uočavamo da je krivulja to strmija što je parametar $\lambda$ veći, tj. brže se približava *x*-osi. Ako to primijenimo na činjenicu da *X* registrira vrijeme trajanja, zaključujemo da bi vrijeme (dakle i prosječno vrijeme) trajanja moglo biti obrnuto proporcionalno s $\lambda$. To ćemo sada i dokazati tako što ćemo pokazati da je,
ako je X~E($\lambda$), onda je
E(X) = 1/$\lambda$.
Naime:

$$E(X)=\int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=(-xe^{-\lambda x}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda})\Big|_0^\infty=0-(-0-1/\lambda)=\frac{1}{\lambda}.$$

(pažljivo provjerite preskočene korake u gornjem računu; uputa: riječ je o parcijalnoj integraciji i L'Hospitalovu pravilu; gdje se u računu primjenjuje da je $\lambda$>0?).
Slično, ali tehnički nešto teže dobije se:

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

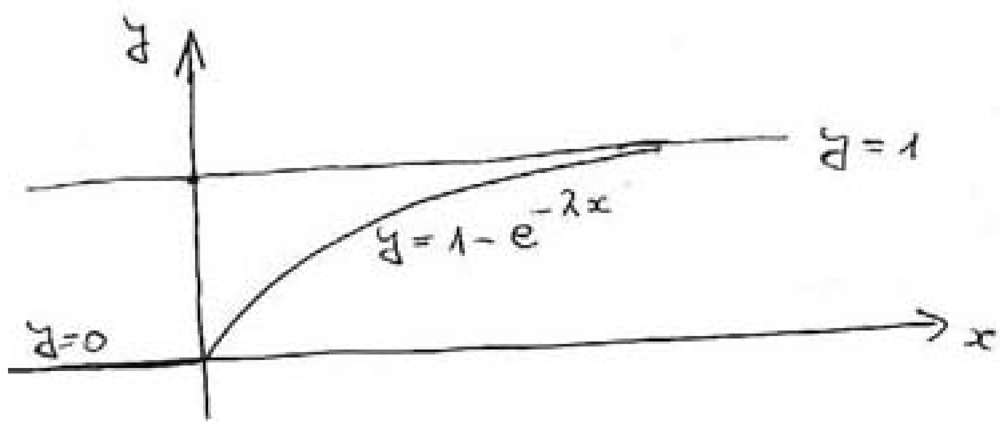
Prije računanja vjerojatnosti odredimo funkciju distribucije *F* eksponencijalne razdiobe.
F(x) = 0, za nepozitivne *x*

$$=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$=1-e^{-\lambda x}$$

Dakle, za pozitivne *x* je
F(x) = 1 – $e^{-\lambda x}$.

Nacrtajmo sliku.




Vidimo da graf funkcije na početku naglo raste, a poslije se smiruje. To znači da se vjerojatnost dosta rano potroši (objasnite što to praktički znači).

**Primjer 7**. Prosječno vrijeme rada žarulje je 800 sati. Odredimo vjerojatnost:
a) da žarulja radi bar 800 sati
b) da žarulja radi manje od 600 sati.

c) da žarulja radi između 500 i 1 000 sati.

Prije rješavanja pokušajte na ova pitanja odgovoriti odoka.
Da bismo riješili ovaj problem prihvatit ćemo pretpostavku da je vrijeme trajanja žarulje eksponencijalno distribuirano. Dakle, ako slučajna varijabla $X$ registrira vrijeme trajanja žarulje, onda je:

X~E(1/800).

Tu smo izabrali $\lambda$=1/800 jer prosječno vrijeme trajanja 800 (sati), a taj broj odgovara očekivanju slučajne varijable $X$, a ono je $1/\lambda$.
Sad se problemi mogu shvatiti ovako:

a) $p(X \geq 800) = p(800<X<\infty) = 1-F(800) = 1-(1-e^{-800/800}) = 0.3679$ (na 4 decimalna mjesta)
b) $p(X<600) = p(-\infty<X<600) = F(600)-0 = 1-e^{-600/800} = 0.5276$
c) $p(500<X<1\,000) = F(1\,000)-F(500) = (1-e^{-1000/800})-(1-e^{-500/800}) = 0.2488$.

## Normalna (Gaussova) razdioba.

To je najvažnija razdioba u teoriji, ali i u primjeni vjerojatnosti. Tu razdiobu (približno) imaju mnoge slučajne varijable koje nastaju u praksi, primjerice slučajna varijabla koja

a) registrira grješku pri mjerenju
b) registrira rezultat mjerenja (na pr. mase, visine, postotka, inteligencije, …)
c) registrira rezultate pri dobro odmjerenom pismenom ispitu itd.

S druge strane, do ove razdiobe može se doći statistički (o čemu će više biti riječ poslije). Naime kad se izvodi veći broj nezavisnih mjerenja neke veličine, pa se gleda prosječan rezultat, dolazi se do normalne razdiobe (približno, a u limesu točno; to se može točno matematički opisati).

Razmotrimo nekoliko **heurističkih razloga** koji nam daju naslutiti da će se grješke pri mjerenju ponašati prema normalnom zakonu (poslije ćemo točno reći o kakvoj je razdiobi riječ).
Neka slučajna varijabla $X$ registrira grješku pri mjerenju (koju ne možemo egzaktno opisati jer nastaje slučajno, čak i kod najpreciznijih instrumenata) i neka je $f$ funkcija gustoće od $X$. Tada je prirodno, uz činjenicu da je površina ispod grafa od $f$ jednaka 1, predpostaviti sljedeće:

1. grješke teoretski mogu biti po volji velike, pa je $f$ definirana i pozitivna za sve realne brojeve $x$.

2. grješke su simetrično raspoređene oko 0, pa je $f$ **parna funkcija**.

3. najvjerojatnije su grješke oko nule, a kako idemo dalje vjerojatnost da greška bude u nekom malom intervalu stalne duljine, smanjuje se. Zato je $f$ padajuća funkcija za x>0.

4. Trebala bi postojati familija takvih *f*, ovisnih o nekom parametru, koje bi opisivale grješke (jer jedna je funkcija za instrument koji radi male, a druga za neki koji radi velike grješke; ipak te funkcije trebaju biti slične).

Ako bismo tome dodali neke druge razumne uvjete ili da smo (zbog zdravog razuma, ali i statističkih razloga) pretpostavili da $f$ za x>0 eksponencijalno opada, ostale bi nam, kao najjednostavnije, mogućnosti tipa:

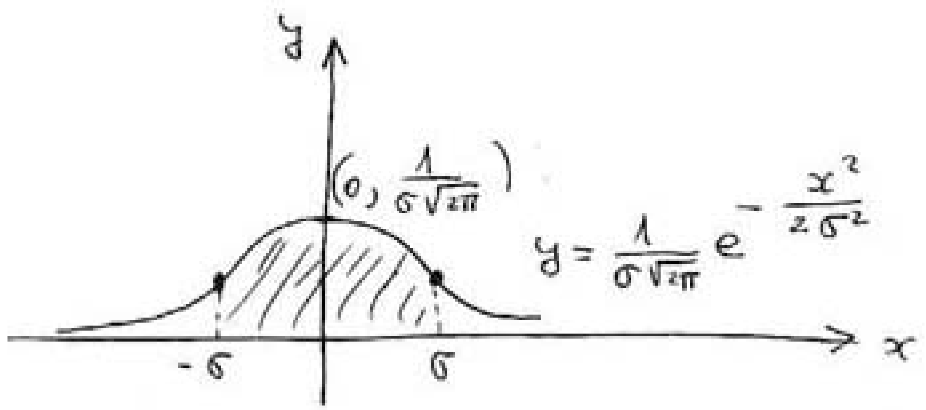
$f(x) = ae^{-bx^2}$ , gdje su *a,b* neki pozitivni realni brojevi ( $x^2$ smo stavili radi parnosti, a predznak *minus* da bi funkcija bila padajuća).

Koristeći poznatu činjenicu da je:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1 \quad (*)$$

lako bismo došli do veze između parametara *a i b*, i do toga da se $f$ može zapisati kao:

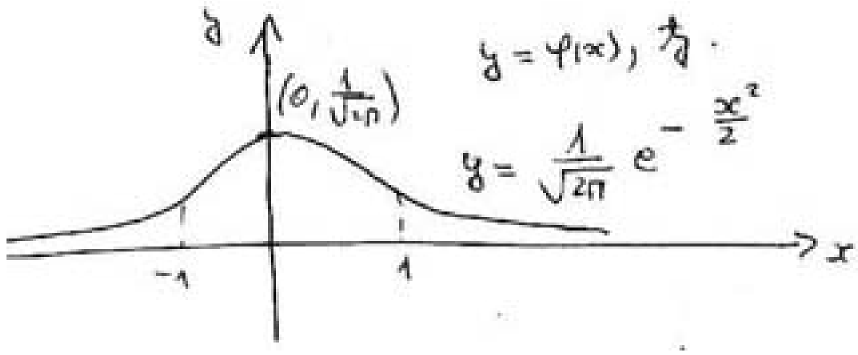
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0 \quad (**)$$




Graf te funkcije zove se **gaussova krivulja**; ona je

1. **zvonolika** oblika s tjemenom u x=0.
2. simetrična s obzirom na y-os,
3. ima točke infleksije u x= $\pm\sigma$ .
4. Odoka vidimo da je površina između tih dviju vrijednosti veća od 1/2, poslije ćemo to izračunati preciznije.
   To ćemo približiti na primjeru.
   Pretpostavimo da je grješka pri očitavanju rezultata na nekom mjernom istrumentu normalno distribuirana uz $\sigma$ =0.001. Tu činjenicu možemo tumačiti kao: vjerojatnost da grješka bude između –0.001 i 0.001 je veća od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 2/3). To znači da je vjerojatnost da grješka bude veća od 0.001 ili manja od –0.001, manja od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 1/3).
5. Što je $\sigma$ veći, krivulja je spljoštenija (površina je rasturenija); to govori o tome da su grješke raspršenije, dakle veće. Obratno, što je $\sigma$ manje, krivulja je uža i viša; znači grješke su manje, koncentrirane su oko 0.

6. Za slučajnu varijablu $X$ koja ima ovakvu funkciju gustoće kažemo da je **normalna** i pišemo: X~N(0, $\sigma^2$).
   Specijalno, ako je $\sigma$=1, kažemo da je razdioba **jedinična normalna (**ili **standardna)** i tada pišemo:
   X~N(0,$1^2$).
   Često jediničnu razdiobu označavamo s $T$, a njenu funkciju gustoće s $\varphi$. Dakle:
   $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$




   Da je sa (**) zadana funkcija gustoće (tj. da je površina ispod krivulje 1) proizlazi iz (*), samo se kod integriranja primjeni očita zamjena varijable.
   Također je očito da sve ove razdiobe imaju očekivanje 0 (zbog simetričnosti); tko hoće to može i dokazati (izravno ili korištenjem svojstva neparnosti).
   Lako se može dokazati (parcijalna integracija, zamjena varijable i formula (*)) da je varijanca ove razdiobe $\sigma^2$.

Dakle:
Ako je X~N(0, $\sigma^2$), onda je
E(X) = 0, i
V(X) = $\sigma^2$.

Napomena.

1. Ako graf funkcije $f$ pomaknemo za $\mu$ onda se tjeme pomakne za taj isti $\mu$ (pomak će biti udesno ako je $\mu$>0, u suprotnom bit će ulijevo). Pomicanjem za $\mu$ funkcija postaje:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
2. Ovako pomaknuta funkcija također je funkcija gustoće (pomakom se površina ne mijenja). Slučajnu varijablu $X$ koja ima takvu funkciju gustoće pišemo kao:
   X~N($\mu,\sigma^2$).
   Pritom se očekivanje također pomakne za $\mu$ pa je.
   E(X) = $\mu$.
   Varijanca se ne mijenja (krivulja po izgledu ostaje potpuno ista) pa je:
   V(X) = $\sigma^2$.

Sve se to može potvrditi i računom.

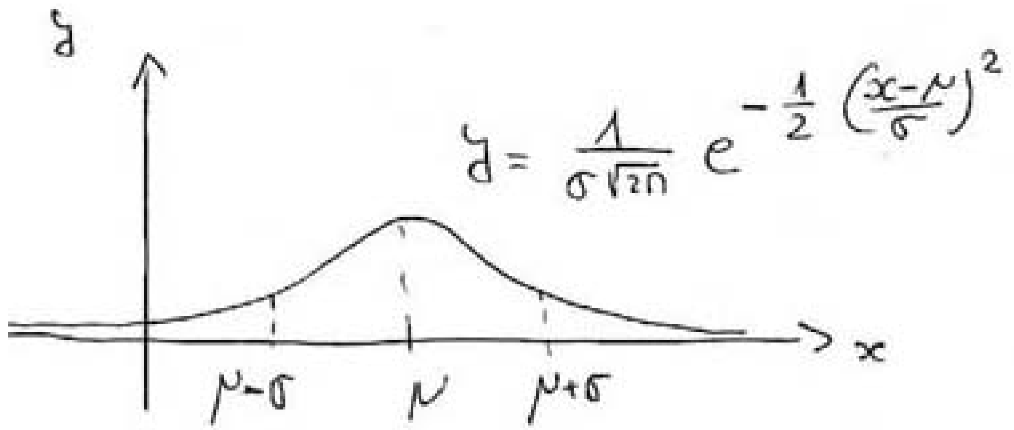
3. Pomaknuta krivulja ima slična svojstva kao i ona početna, samo što je os simetrije pravac s jednadžbom x= $\mu$ (a ne više x-os).

Sada imamo konačnu definiciju.

**Definicija 3.** Kažemo da kontinuirana slučajna varijabla $X$ ima normalnu razdiobu s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$, ako joj je funkcija gustoće:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Pri tom je parametar $\mu$ očekivanje, a parametar $\sigma^2$ varijanca te slučajne varijable.




## Računanje vjerojatnosti kod normalne razdiobe.

Već smo vidjeli da se vjerojatnost kod kontinuirane razdiobe najlakše računa ako nam je poznata funkcija distribucije (tada se vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi rezultat na nekom intervalu svodi na oduzimanje vrijednosti te funkcije u rubovima tog intervala).
U slučaju normalne razdiobe **ne može se funkcija distribucije zapisati** pomoću poznatih elementarnih funkcija (već samo pomoću beskonačnih redova potencija ili nekih drugih funkcija čije se vrijednosti ne mogu lako računati, na primjer, nisu dostupne na svakom kalkulatoru; jasno je da se, koristeći na primjer Simphsonovu metodu, može napraviti program koji će po volji precizno računati vrijednosti te funkcije).
Zato su obično vrijednosti funkcije distribucije normalne razdiobe **tabelirane**. Tu je dobra vijest da **ne treba tabelirati te vrijednosti za sve** normalne razdiobe (kojih ima neprebrojivo mnogo i ovisni su o dvama spomenutim parametrima), već je **dovoljno** tablicu načiniti za jediničnu normalnu razdiobu.
Kako je jedinična normalna razdioba simetrična s obzirom na *y*-os, dovoljno će biti tabelirati vrijednosti **za pozitivne** *x*. Sad ćemo pobliže to objasniti.

Kako je poznato, funkciju distribucije *F*, neke slučajne varijable *X*, definirana je kao:
F(x) = p(X<x)
i ona je primitivna funkcija funkcije gustoće *f* i može se zapisati i kao:

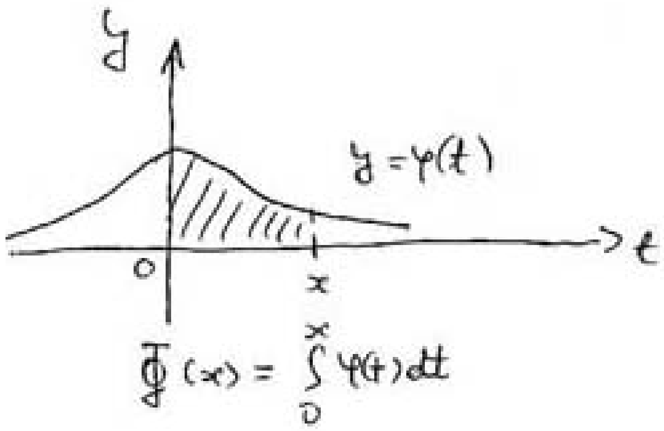
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
(što je površina ispod grafa od *f* do *x*).
U slučaju jedinične normalne razdiobe, površina do 0 je 1/2 pa možemo pisati:

$F(x) = 1/2 + \int_{0}^{x} \varphi(t)dt$ ,

gdje smo uvažili činjenicu da funkciju gustoće jedinične normalne razdiobe pišemo oznakom $\varphi$
(gornja je jednakost geometrijski jasna za x>0, međutim ona vrijedi i za x<0; onda je vrijednost integrala negativna).
Označimo;

$\Phi(x) := \int_{0}^{x} \varphi(t)dt$

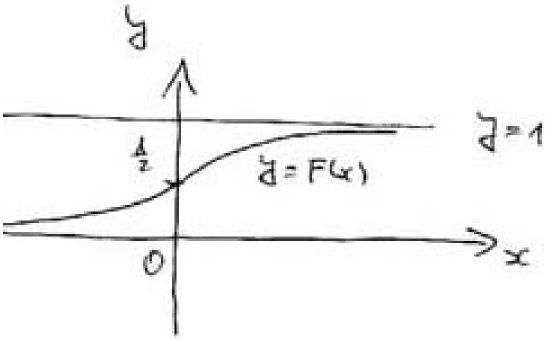
(površina ispod grafa funkcije $\varphi$ od 0 do x).

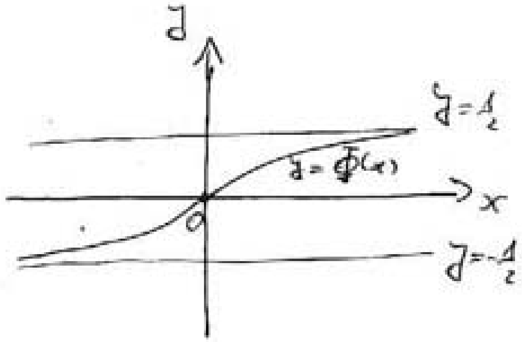



Dakle:
F(x) = 1/2 + Φ (x), odnosno Φ (x)=F(x)-1/2
(to vrijedi za sve x).
Kako je *F* primitivna funkcija od $\varphi$, a Φ se od nje razlikuje **samo za konstantu** ( za 1/2), onda je i Φ primitivna funkcija od $\varphi$, pa se i pomoću nje mogu računati vjerojatnosti kod jedinične normalne razdiobe.
Dakle, neka je *T* jedinična normalna razdioba i a,b bilo koja dva realna broja takva da je *a*<*b*.
Tada je.

$p(a<T<b) = \int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ (prema definiciji vjerojatnosti kod kontinuirane razdiobe)
= F(b)-F(a) (gdje je *F* pripadna funkcija distribucije)
= (1/2 + Φ (b)) – (1/2 + Φ (a))
= Φ (b) - Φ (a).

Funkcija Φ zove se **Laplaceova funkcija**.






Zašto nam je $\Phi$ zgodnija od $F$ za računanje vjerojatnosti?
Zato što je ona neparna funkcija:
$\Phi(-x) = \Phi(x)$ ,
za sve $x$ (to proizlazi iz njene definicije, ali i iz geometrijske interpretacije),
pa, kad tabeliramo njene vrijednosti za pozitivne $x$, pripadajuće vrijednosti za negativne $x$ odmah dobivamo. To bismo mogli i za $F$, ali bi tada formula bila drukčija:
$F(-x) = 1-F(x)$,
što je, svakako, teže uvijek računati nego samo staviti negativni predznak. Treba ipak napomenuti da je u mnogim tablicama tabelirana $F$, a ne $\Phi$.
Osnovna geometrijska razlika između tih dviju funkcija jest da je graf od $F$ između 0 i 1, a graf od $\Phi$ između $-1/2$ i $1/2$. Jednakostima:

$F(\infty)=1$, $F(-\infty)=0$, $F(0)=1/2$

Odgovaraja redom

$\Phi(\infty)=1/2$, $\Phi(-\infty)=-1/2$, $\Phi(0)=0$

Jasno je da ne možemo tabelirati svaku vrijednost za pozitivne $x$, već samo neke (dovoljno gusto), pa ostaje problem dokle ćemo daleko raditi. Tu imamo sreću što funkcija $\varphi$ eksponencijalno opada pa će vrlo brzo ispod nje ostati beznačajno malo površine. Tako se obično tabelira do x=4 (a može i do x=3). Sad je jasno da će se rezultati za iste vjerojatnosti razlikovati ovisno o tome kako su precizno tablice izrađene (danas uglavnom svi bolji kalkulatori mogu računati vrijednost funkcije $F$, a katkad i Laplaceove funkcije).

Pokažimo na nekoliko primjera kako se koristi Laplaceova funkcija za računanje vjerojatnosti.

**Primjer 8**. Neka je $X$ slučajna varijabla s jediničnom normalnom razdiobom. Odredimo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | $p(0<X<1.42)$ | (v) | $p(-1.79<X<-0.54)$ | (ix) | $p(-5<X<1.42)$. |
| (ii) | $p(-0.73<X<0)$ | (vi) | $p(X>1.13)$ | | |
| (iii) | $p(-1.37<X<2.01)$ | (vii) | $p(\|X\|<0.5)$ | | |
| (iv) | $p(0.65<X<1.26)$ | (viii) | $p(X<1.42)$ | | |

(i) $p(0<X<1.42) = \Phi(1.42) - \Phi(0) = \Phi(1.42) = 0.4222$

(ii) $p(-0.73<X<0) = \Phi(0) - \Phi(-0.73) = 0-(-(\Phi(0.73)) = \Phi(0.73) = 0.2673$

(iii) $p(-1.37<X<2.01) = \Phi(2.01)- \Phi(-1.37) =\Phi(2.01)+ \Phi(1.37)=0.8925$

(iv) $p(0.65<X<1.26) = \Phi(1.26)- \Phi(0.65) = 0.3962-0.2422=0.1540$

(v) $p(-1.79<X<-0.54) = \Phi(-0.54) - \Phi(-1.79) = \Phi(1.79) - \Phi(0.54) = 0.2579$

(vi) $p(X>1.13) = \Phi(1.13<X<\infty) = 0.5 - \Phi(1.13) = 0.1292$

(vii) $p(|X|<0.5) = p(-0.5<X<0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5)=2\Phi(0.5)=0.3830$

(viii) $p(X<1.42) = p(-\infty<X<1.42) = \Phi(1.42)-(-0.5) = \Phi(1.42)+0.5 = 0.9222$ (vidi a))

(ix) Tu je rezultat kao i u prethodnom primjeru (približno) jer je $\Phi(-5)$ praktično jednako –0.5. Slično, ako je a>4, onda je $\Phi(a) = 0.5$ (uz veliku točnost).

Napomena.
1. Svi bi rezultati bili ostali isti da smo umjesto znakova <, > stavili na nekim (ili svim) mjestima znakove $\leq, \geq$ . To je zato što je riječ o kontinuiranoj razdiobi.
2. Svaki od ovih rezultata i pojedini brojevi koji u njima sudjeluju imaju geometrijske interpretacije koje bi trebalo razumjeti.

Pokazali smo kako se računa vjerojatnost standardne normalne razdiobe. Sad ćemo vidjeti kako se računa vjerojatnost bilo koje normalne razdiobe.
Neka je $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, i neka su *a, b* realni brojevi takvi da je *a<b*. Tada je:

$$p(a<X<b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \text{(nakon zamjene varijable } \frac{x-\mu}{\sigma} = t \text{)}$$

$$= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{(ispod integrala je funkcija } \varphi \text{)}$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Dakle, računanje vjerojatnosti po volji odabrane normalne razdiobe, svodi se na računanje vjerojatnosti jedinične normalne razdiobe tj. do oduzimanja vrijednosti funkcije $\Phi$ . Ovaj smo rezultat izveli pomoću zamjene varijable u određenom integralu, međutim on ima i druga objašnjenja, na primjer geometrijska (lako se vidi da bilo koja normalna razdioba pomakom suprotno od očekivanja, potom dijeljenjem sa standardnom devijacijom postaje jedinična normalna razdioba; to grafovi funkcija gustoće lijepo prate).

Pokažimo to na primjeru.

**Primjer 9**. Težina neke populacije normalno je distribuirana s prosječnom težinom 66 kg i standardnom devijacijom 5kg. Odredimo vjerojatnost da slučajno odabrani predstavnik te populacije ima:
a) težinu između 65 i 70 kilograma.
b) težinu veću od 72 kg.

Neka slučajna varijabla *X* registrira težinu slučajno odabranog predstavnika te populacije. Iako je ovo situacija iz života na nju ćemo primjeniti normalnu razdiobu (koja odgovara idealnim uvjetima). Zato je

X~N(65,$5^2$),

jer očekivanje treba biti prosječna vrijednost, a standardna je devijacija propisana u zadatku (poslije ćemo, u statistici, vidjeti kako se u takvim praktičnim slučajevima određuje standardna devijacija).

Zadatke možemo shvatiti ovako:

a) $p(65<X<70) = \Phi(\frac{70-66}{5}) - \Phi(\frac{65-66}{5})$

$= \Phi(0.8) - \Phi(-0.2)$

$= 0.3674$

b) $p(X>72) = 0.5 - \Phi(\frac{72-66}{5})$

$= 0.5 - \Phi(1.2)$

$= 0.1151.$

Tu smo 0.5 uzeli jer je tu gornja granica beskonačna, a $\frac{\infty - 66}{5} = \infty$ (ta se jednakost ispravno shvaća pomoću limesa).

## Pravilo "tri sigme".

Najvažnije svojstvo normalne razdiobe u primjenama, jest to da interval unutar kojega se nalazi gotovo 100% svih vrijednosti slučajne varijable, **ovisi samo o očekivanju i standardnoj devijaciji** (to je za po 3 standardne devijacije lijevo i desno od očekivanja). Preciznije, neka je X~N($\mu,\sigma^2$). Tada je

$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

Također je.

$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$

$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$

Znači s 95% sigurnošću možemo tvrditi da se neka veličina normalno distribuirana nalazi za najviše 2 standardne devijacije lijevo ili desno od očekivanja (to znači da je u tom intervalu više od 95% površine ispod pripadne krivulje.

Slično, vidimo da za 1 standardnu devijaciju lijevo i desno od oćekivanja ima oko 2/3 površine ispod te krivulje (to je ono što smo ranije odoka procjenjivali da je više od jedne polovine).

**Primjer 10**. Odredimo interval unutar kojeg se nalazi težina slučajno odabrane osobe iz Primjera 9:

(i) s vjerojatnošću oko 0.68
(ii) s vjerojatnošću oko 0.95
(iii) gotovo 100%

U Primjeru 9 je riječ o normalnoj razdiobi s $\mu$=66 i $\sigma$=5, pa je, prema pravilima "jedan sigma", "dva sigma" i "tri sigma":

(i) [66-5,66+5]=[61,71], tj.

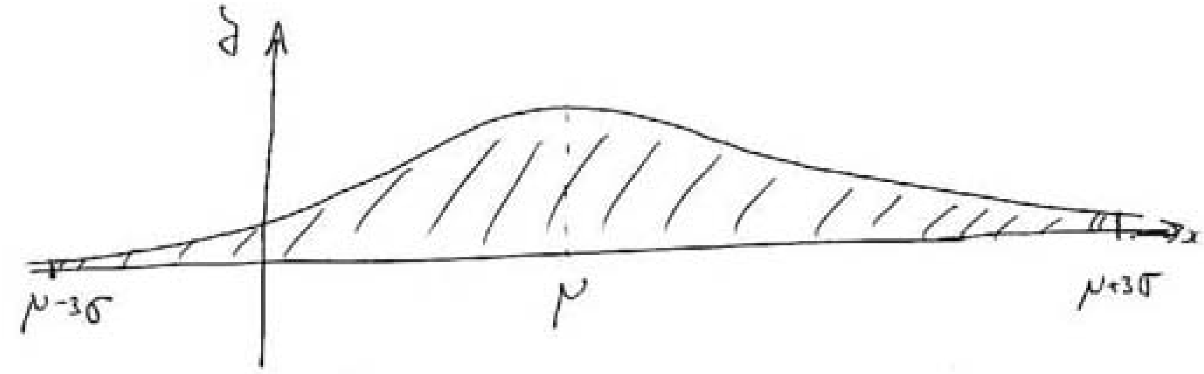
p(težina slučajno izabrane osobe je između 61 i 71) $\approx$ 0.68

(ii) $[66-2\cdot 5,\ 66+2\cdot 5]$=[56, 76], tj.

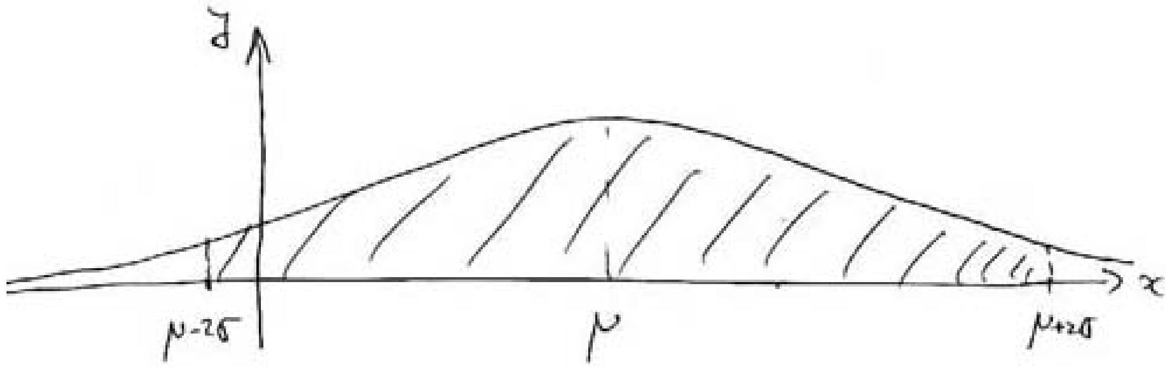
p(težina slučajno izabrane osobe je između 56 i 76) $\approx$ 0.95

(ii) $[66-3\cdot 5,\ 66+3\cdot 5]$=[51, 81], tj.

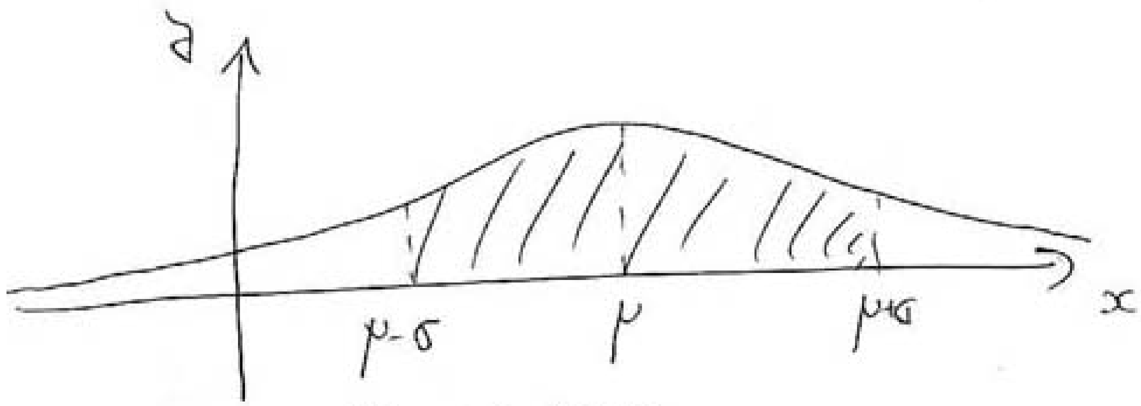
gotovo sve osobe imaju težinu izmedju 51 i 81.




$P \approx 0.9973$




$P \approx 0.9544$




$P \approx 0.6826$

## Dodatci:

### 1. Funkcija slučajne varijable

S funkcijom slučajnih varijabla već smo se susretali pri razmatranju slučajne varijable $Y=aX+b$, posebice kod normalnih razdioba. Općenito, ako je X slučajna varijabla i $h$ realna funkcija realne varijable, onda definiramo slučajnu varijablu $Y:=h(X)$ zahtjevom:

**Ako X postigne vrijednost *x*, onda h(X) postigne vrijednost h(x)**.

Treba razlikovati slučaj diskretne od kontinuirane varijable, takodjer slučaj injektivne funkcije $h$ od one ne injektivne.

**Razdioba diskretne slučajne varijable Y:=h(X)**.
Neka je razdioba diskretne slučajne varijable zadana tablicom.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | ....... |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | ....... |

Tada se razdioba slučajne varijable $Y:=h(X)$ može zadati ovako

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $h(x_1)$ | $h(x_2)$ | $h(x_3)$ | $h(x_4)$ | ....... |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | ....... |

Tu treba biti oprezan.
Naime, ako je $h$ injektivna, tj. različitim argumentima pridružuje različite vrijednosti, onda su svi $h(x_i)$ međusobno različiti, i ta tablica zaista jest tablica razdiobe slučajne varijable h(X). To je, posebice, ispunjeno ako je $h$ linearna funkcija, tj. $h(x):=ax+b$, za $a\neq 0$.
Ako $h$ nije injektivna , onda se **može dogoditi** (ali ne mora) da neki od brojeva u prvom redku budu jednaki. Tada sve takve smatramo jednim, a pripadna je vjerojatnost zbroj pojedinih vjerojatnosti. To pokazujemo primjerom gdje je $h$ kvadratna funkcija, što se često javlja i u vjerojatnosti i u statistici.

**Primjer 1**. Neka X registrira razliku rezultata kod dvaju uzastopnih bacanja kocke i neka je $h(x):=x^2$. Opišimo slučajnu varijablu $Y=h(X)$, tj. $Y=X^2$.

Već smo se upoznali s razdiobom od X.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Da odredimo razdiobu od $X^2$, najprije prvi red kvadriramo, a drugi ostavimo na miru:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Uočavamo da su neki brojevi u prvom redku jednaki; njih pišemo kao jedan, pripadne vjerojatnosti zbrojimo. Na primjer, $p(X^2=25)=p(X=-5 \text{ ili } X=5)=1/36+1/36=2/36$. Dakle,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| 6/36 | 10/36 | 8/36 | 6/36 | 4/36 | 2/36 |

je razdioba slučajne varijable $X^2$. Uvjerite se da je zbroj vjerojatnosti 1.

Sjetimo se da je $E(aX+b)=aE(X)+b$, i $V(aX+b)=a^2V(X)$. Tako nešto slično ne vrijedi za druge funkcije koje nisu linearne. Dakle, općenito je $E(h(X)) \neq h(E(X))$. Na primjer, očito je da za X iz Primjera 1. vrijedi
$E(X) = 0$. Takodjer, lako je izračunati da je $E(X^2)=210/36$, dok je $E(X)^2=0$.

**Razdioba kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).**

Da bismo opisali razdiobu slučajne farijable h(X), treba joj opisati funkciju gustoće i funkciju distribucije. Radi toga neka je:
f - funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X.
F - funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable X.
g - funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).
G - funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).
Treba opisati *g* pomoću *f* i *h*, odnosno *G* pomoću *F* i *h*.
Pokazuje se da je, općenito, bolje poći od opisa funkcije distribucije *G* pomoću *F* i *h*.
Problem ćemo riješiti za **rastuće** funkcije *h*, te za kvadratnu funkciju *h* (to su u prasksi najčešći slučajevi).

1. Slučaj rastuće funkcije *h*.

Vrijedi $G(x)=F(h^{-1}(x))$, i $g(x)=f(h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)$, gdje je $h^{-1}$ inverzna funkcija od *h*.
Dokaz:
$G(x):=p(Y<x)=p(h(X)<x)=p(X<h^{-1}(x)):=F(h^{-1}(x))$.
Sad, koristeći se formulom za derivaciju složene funkcije, dobijemo da je (za gotovo sve *x*):
$g(x):=G'(x)=F'((h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)= f(h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)$.

Kao primjer, izvest ćemo funkciju gustoće log-normalne razdiobe koja je naročito važna u opisu bioloških fenomena.

**Primjer 2. (log-normalna razdioba $Y:=e^X$, gdje je X normalna razdioba).**
Neka je $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ i $h(x)=e^x$; tada je $h^{-1}(x)=\ln(x)$, pa za funkciju gustoće *g* slučajne varijable $Y:=e^X$ vrijedi:

$g(x)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, za x>0 (sl.1.).

2. Slučaj funkcije $h(x):=x^2$.
Tu je, za x>0:
$G(x):=p(Y<x)=p(h(X)<x)=p(X^2<x)=p(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x})=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})$
Zato je
$g(x):=G'(x)=(1/2\sqrt{x})f(\sqrt{x})+(1(2\sqrt{x})f(-\sqrt{x})$

To ćemo ilustrirati na primjeru kvadrata jedinične normalne razdiobe, koja je vrlo važna u statistici.

**Primjer 3**. Neka je $X\sim N(0,1)$ jedinična normalna razdioba i neka je $h(x):=x^2$.

Odredimo distribuciju slučajne varijable Y:=h(X), tj. Y:=$X^2$.

Iz prethodne formule dobijemo:

$g(x)=(1/2\sqrt{x})f(\sqrt{x})+(1/2\sqrt{x})f(-\sqrt{x})=(1/\sqrt{x})f(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}$, za x>0 (sl.2.)

**Primjer 4**. (formula za $E(X^2)$ –očekivanje kvadrata slučajne varijable).
Ako zadržimo prijašnje oznake (tj. da je $f$ funkcija gustoće od *X*, a $g$ funkcija gustoće od $X^2$) imamo:

$E(X^2) := \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_{0}^{\infty} xg(x)dx$, jer je g(x)=0, za x<0.

Odavde se dobije

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

Sjetimo se da za kontinuiranu slučajnu varijablu X vrijedi.

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - E^2(X)$.

Kombinirajući s predhodnom formulom, dobijemo važnu formulu za varijancu:
$V(X)= E(X^2) - E^2(X)$,
koju često pišemo i koristimo u obliku
$E(X^2) = E^2(X) + V(X)$.
Taj je oblik važan i zbog toga što je u njemu očekivanje kvadrata slučajne varijable izraženo pomoću očekivanja i varijance od X.

## 2. Linearna kombinacija slučajnih varijabla

U teoriji i u praksi često je potrebno razmatrati linearnu kombinaciju slučajnih varijabla, napose normalnih. Već smo se susretali sa zbrojem i razlikom dviju varijabla, a i sa nekim složenijim primjerima. Općenito:
Ako su $X_1,X_2,\ldots,X_n$ slučajne varijable i $a_1,a_2,\ldots,a_n$ realni brojevi onda se definira **linearna kombinacija** – nova slučajna varijabla:

$X=a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$

Smisao je: ako $X_1$ poprimi vrijednost $r_1$, $X_2$ vrijednost $r_2,\ldots$, $X_n$ rezultat $r_n$, onda $a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$ poprimi rezultat $a_1r_1+a_2r_2+\ldots+a_nr_n$.

Na primjer, prema uzoru na aritmetičku sredinu $\bar{x}$ podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definira se aritmetička sredina $\overline{X}$ slučajnih varijabla $X_1, X_2, \ldots, X_n$; to je varijabla

$$\overline{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots + \frac{1}{n}X_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

i vrlo je važna u teoriji vjerojatnosti i u matematičkoj statistici.

Nije teško vidjeti da vrijedi (bez obzira jesu li varijable diskretne ili kontinuirane),

$E(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n)= a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\ldots+a_nE(X_n)$

To je naročito jasno ako se pozovemo na fizikalnu interpretaciju očekivanja kao težišta (i za diskretne slučajne varijable).

Općenito, ne postoji jednostavna formula za varijancu linearne kombinacije slučajnih varijabla. Međutim, **ako su** slučajne varijable $X_i$ **međusobno nezavisne**, onda vrijedi:

$$V(a_1X_1 + a_2X_2 + ...a_nX_n) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + ...a_n^2V(X_n)$$

Nezavisnost dviju slučajnih varijabla grubo bi se (i matematički donekle neprecizno) mogla definirati ovako:

**Diskretne slučajne varijable X,Y su nezavisne ako vjerojatnost da Y poprimi neku vrijednost, ne ovisi o tome koju je vrijednost poprimila X (i obratno) .**

Za kontinuirane slučajne varijable sve su pojedinačne vjerojatnosti jednake nuli, pa se nezavisnost može ovako definirati:

**Kontinuirane slučajne varijable X,Y su nezavisne ako vjerojatnost da Y poprimi vrijednost u nekom intervalu, ne ovisi o tome u kojem je intervalu vrijednost poprimila X (i obratno) .**

Nezavisnost više slučajnih varijabla definirala bi se analogno.

Sada vidimo da vrijedi.
Ako su $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1,2,...,n$ nezavisne normalne slučajne varijable, onda je i
$X := a_1X_1 + a_2X_2 + ...a_nX_n$
normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu = \mu_1 + ... + \mu_n$ i $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$

Sljedeća dva primjera imaju veliku primjenu u statistici.

**Primjer 5**. Odredimo očekivanje i varijancu aritmetičke sredine $n$ nezavisnih normalnih slučajnih varijabla jedanako distribuiranih s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$ .

$E(\overline{X}) = \mu$ , $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , drugim riječima $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{n}})$ .

**Napomena**: Da slučajne varijable nisu bile normalno distribuirane, ali da su bile nezavisne, s medjusobno jednakim očekivanjima i medjusobno jednakim varijancama, onda bi $\overline{X}$ imao to isto očekivanje, a varijancu $n$ puta manju. Ako bi, dodatno, $n$ bio dovoljno velik (bar 30), onda bi $\overline{X}$ bio **približno** normalno distribuiran (to je pojednostavljena formulacija **centralnog graničnog teorema**).

Prema uzoru na varijancu $(s')^2$ i korigiranu varijancu $s^2$ (iz deskriptivne statistike) definiraju se $(S')^2$ i $S^2$ kao:

$(S')^2 := \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+...+(X_n-\overline{X})^2}{n}$

$S^2 := \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+...+(X_n-\overline{X})^2}{n-1}$.

Uočite da vrijedi

$S^2 = \dfrac{(X_1^2+X_2^2+...+X_n^2)-n\overline{X}^2}{n-1}$

**Primjer 6**. Pokažimo da je $E(S^2) = \sigma^2$, ako su $X_i$ medjusobno nezavisne slučajne varijable svaka s očekivanjem $\mu$ i varijancom $\sigma^2$ (ne moraju biti normalno distribuirane).

Koristeći se svojstvima očekivanja i formulom iz Primjera 4, dobijemo:

$$E(S^2)= \frac{(X_1^2+X_2^2+...+X_n^2)-n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{E(X_1^2)+E(X_2^2)+...+E(X_n^2)-nE(\overline{X}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{E^2(X_1)+V(X_1)+E^2(X_2)+V(X_2)+...+E^2(X_n)+V(X_n)-n(E^2(\overline{X})+V(\overline{X}))}{n-1}$$

$$= \frac{n\mu^2+n\sigma^2-n\mu^2-n\dfrac{\sigma^2}{n}}{n-1} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

U sljedećem primjeru pokazujemo da se zavisne slučajne varijable vrlo često pojavljuju, te ilustriramo ponašanje varijance.

**Primjer 7**. Bacamo kocku dva puta. Slučajna varijabla X registrira veći od rezultata, a slučajna varijabla Y manji.

(i) Pokažimo da su te dvije slučajne varijable zavisne.
(ii) Odredimo varijance od X, Y i X+Y.

(i) Vidimo da vrijedi:
p(X=1)=1/(36) jer se to moze dogoditi ako i samo ako oba puta bude 1.
S druge strane
P(X=1|Y=2)=0
jer, ako je 2 minimalni rezultat, onda X ne može poprimiti rezultat 1.

(iii) Razdiobe ovih dviju varijabla već smo razmatrali. Vidjeli smo da je

| X: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |

| Y: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11/36 | 9/36 | 7/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 |

Zato je (na tri decimalna mjesta)
E(X)=161/36 = 4.472 ; V(X) = $1.424^2$ E(Y)=91/36 = 2.528; V(Y) = $1.424^2$

Vidimo dalje da je X+Y slučajna varijabla koja zbraja rezultate, dakle

X+Y: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36

jer je:
p(X+Y=2)=p(X=Y=1)=p(na obje kocke 1)=1/36
p(X+Y=3)=p(X=2 i Y=1)=p(na jednoj kocki 1, na drugoj 2)=2/36
p(X+Y=4)=p[X=Y=2 ili (X=3 i Y=1)]=1/36+2/36=3/36 itd.
Zato je:
E(X+Y)=252/36=161/36+91/36=E(X)+E(Y),
Međutim,
$V(X+Y) = 2.449^2$, dok je $V(X)+V(Y) = 2\cdot 1.424^2 = 2.014^2$.

**Hi kvadrat razdioba** $\chi^2(n)$.
Ta razdioba ima važnu primjenu u statistici (pri testiranju) . Dobije se ovako.
Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ međusobno nezavisne jedinične normalne razdiobe.
Tada je **hi kvadrat razdioba** s *n* **stupnjeva slobode** (n=1,2,...) definirana kao
$\chi^2(n) := X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$
Znači, jedinične se normalne varijable najprije kvadriraju, potom zbroje (sl.3.).

## Studentova t-razdioba t(n) s *n* stupnjeva slobode

Ta se razdioba prirodno pojavila u statistici. Studentove se razdiobe razlikuju prema stupnju slobode n=1,2,3,.... Kako se *n* povećava tako se t-razdioba približava jediničnoj normalnoj i za n=30 praktično joj je jednaka (sl.4).

Definicija t-razdiobe:

$$t(n)=\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

gdje su X~N(0,1) i $Y \sim \frac{\chi^2(n)}{n}$ nezavisne razdiobe. Dakle,

$$Y \sim \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots X_n^2}{n}$$

gdje su $X_i$ nezavisne jedinične normalne razdiobe (a taj se izraz vrlo često pojavljuje u statistici).

## F-razdioba.

I ta razdioba ima važnu primjenu u testiranju.

Fischerova razdioba F(r,s) sa (r,s) stupnjeva slobode (sl.5.) definira se kao:

$$F(r,s) := \frac{s\chi^2(r)}{r\chi^2(s)}$$

Tu oznaku $F$ ne treba brkati sa standardnom oznakom za funkciju distribucije.

## 3. Izvodi nekih teoretskih distribucija

Binomnu razdiobu već smo izveli. Drugim riječima, izveli smo da ako teoretska razdioba *X* registrira koliko se puta dogodio događaj *A* pri *n* nezavisnih izvođenja nekog pokusa, onda je X~B(n,p), gdje je *p* vjerojatnost da se *A* dogodi u svakom pojedinačnom pokusu. Slično ćemo provesti za Poissonovu, eksponencijalnu i normalnu razdiobu. Postupak će u svim slučajevima biti analogan: najprije ćemo opisati pokus i slučajnu varijablu, potom ćemo, uz prihvaćanje nekih razumnih predpostavaka, dokazati da ta slučajna varijabla ima određenu teoretsku razdiobu.

**Poissonova razdioba**.

Neka slučajna varijabla *X* opisuje broj poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu. Već smo rekli da pokusi pokazuju da se ta slučajna varijabla ponaša prema Poissonovu zakonu (isto vrijedi za slične slučajne varijable). To ćemo izvesti uz neke predpostavke. Recimo da želimo odrediti p(X=i), za neki *i*.

1. predpostavka. Poruka ravnopravno može doći u svakom trenutku u tom intervalu.

Zamislimo da smo zadani interval podijelili na veliki broj *n* (u usporedbi s *i*) vrlo malih intervala, za koji zahtijevamo sljedeću prirodnu pretpostavku:

2. predpostavka. U svakom od tih malih intervala mogu nastupiti samo dvije mogućnosti – ili je poruka došla ili nije.

Neka je *a* prosječan broj poruka u zadanom vremenskom intervalu. Tada možemo smatrati da slučajna varijabla registrira koliko se puta pojavila poruka u *n* nezavisnih izvodjenja pokusa pri kojemu poruka dolazio s vjerojatnošću a/n (jer ima *n* ravnopravnih intervala intervala i prosječno *a* poruka). Zato je približno
X~B(n,a/n)
pa je, opet

$$p(X=i)\approx\binom{n}{i}\left(\frac{a}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-i}=$$

$$\frac{a^{i}}{i!}1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{i-1}{n})\frac{(1-\frac{a}{n})^{n}}{(1-\frac{a}{n})^{i}}\approx$$

$$\frac{a^{i}}{i!}e^{-a}$$

To je zato što za velike *n,* u usporedbi s *i*, vrijedi
$(1-\frac{a}{n})^{n}\approx e^{-a}$, $(1-\frac{a}{n})^{i}\approx 1$, $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{i-1}{n})\approx 1$.

**Eksponencijalna razdioba.**

Predpostavimo da slučajna varijabla *X* mjeri vrijeme rada neke žarulje do kvara (ili nešto analogno, poput vremena izmedju dviju poruka na nekoj adresi i sl.). Treba obrazložiti zašto je ta slučajna varijabla eksponencijalno distribuirana. Zamislimo da imamo veliki broj žarulja koje su počele gorjeti u trenutku t=0, i neka je y(t) broj žarulja u trenutku *t* koje i dalje gore. Intuitivno je jasno, može se provjeriti pokusom, da postoji pozitivna konstanta *k* (koja ovisi o kvaliteti proizvedenih žarulja), tako da bude:
$y(t+\Delta t)-y(t) \approx -ky(t)\,\Delta t$
(to znači da je broj stradalih žarulja u nekom relativno malom vremenskom intervalu, proporcionalan duljini tog intervala i količini žarulja na početku tog intervala – predznak minus je zato što je lijeva strana negativna). Prelaskom na kontinuirane funkcije, naslućujemo da je pripadna diferencijalna jednadžba
$dy(t) = -ky(t)dt$
koju rješavamo separacijom varijabla
$dy(t)/y(t) = -kdt$
i lako dobijemo
$y(t)=y(0)e^{-kt}$
gdje je y(0) količina žarulja na početku (uočite analogiju s opisom radioaktivnog raspada)..
Sad dobijemo za funkciju distribucije *F* od *X*:
F(t)=p(X<t)= vjerojatnost da slučajno odabrana žarulja strada do vremena *t* =
$1-p(X>t)=1-\frac{y(t)}{y(0)}=1-e^{-kt}$, za t>0.
(to je zato jer je y(t) količina žarulja koje su preživjele vrijeme *t*).
Sad za funkciju gustoće slučajne varijable *X*, dobijemo
$f(t)=F'(t)=ke^{-kt}$, za t>0,
što smo i trebali pokazati.

**Normalna razdioba**.

Neka slučajna varijabla *X* registrira grješku pri mjerenju. Već smo obrazložili zašto bi njena funkcija gustoće *f* trebala biti parna funkcija, padajuća za pozitivne *x*, a rastuća za negativne. Sad ćemo pokazati kako se, uz još neke prirodne pretpostavke, može doći do

tražene formule. Metoda je mala modifikacija metoda koje su još sredinom 19. st. predložili astronom John Herschel, i matematičar, fizičar i kemičar James Maxwell.
Zamislimo da smo izvršili dvije velike serije mjerenja. Statistički bismo približno mogli odrediti vjerojatnost da grješka u prvoj seriji mjerenja padne u interval $[x,x+\Delta x]$, a jednako tako da grješka u drugoj seriji mjerenja upadne u interval $[y,y+\Delta y]$.

1. predpostavka. Razumno je predpostaviti da se grješke u tim dvjema serijama mjerenja pojavljuju nezavisno, tj., ako te grješke označimo kao $e_1$, $e_2$ onda je:

$p(e_1$ je u $[x,x+\Delta x]$ i $e_2$ je u $[y,y+\Delta y])=$
$p(e_1$ je u $[x,x+\Delta x]$ ) $p(e_2$ je u $[y,y+\Delta y])\approx$
$f(x)\Delta x\cdot f(y)\Delta y$
$f(x)f(y)\Delta x\Delta y$.

S druge strane, ako je □ mali pravokutnik sa stranicama $\Delta x$, $\Delta y$, onda se možemo pitati kolika je vjerojatnost da uređeni par grješaka $(e_1, e_2)$ upadne u takav pravokutnik postavljen tako da mu jedan vrh bude u točki $(x,y)$ kao na slici. Uočimo dvije takve točke $(x,y)$ i $(x',y')$ obje na udaljenosti $r$ od ishodišta, samo na različitim smjerovima. Uočimo i pravokutnik □ smješten u tim točkama. Nema nikakvog razloga da neki od tih smjerova bude povlašten, tj. da se u njegovu pravokutniku češće pojavljuje uređeni par grješaka nego u nekom drugom. Zato je razumno (iako ne očito) prihvatiti sljedeću predpostavku.

2. predpostavka. Vjerojatnost pojavljivanja uređenog para grješke ne ovisi o smjeru, već samo o udaljenosti od ishodišta, tj.

$f(x)f(y)=g(\sqrt{(x^2+y^2)})$, za neku funkciju $g$.
Ako stavimo $y=0$, dobit ćemo $g(x)=f(x)f(0)$ (najprije za pozitivne $x$, potom i za sve jer $g$ treba biti parna funkcija, kao i $f$). Zato je:
$f(x)f(y)=f(\sqrt{(x^2+y^2)})f(0)$, za sve $x,y$, pa možemo staviti $y=x$ i dobiti
$f(x)^2=f(0)f(x\sqrt{2})$, za sve $x$. To logaritmiramo i dobijemo
$2\ln f(x)=\ln f(0)+\ln f(x\sqrt{2})$.
Stavimo sad $h(x):=\ln f(x)$ pa ćemo dobiti:
$2h(x)=h(0)+h(x\sqrt{2})$.
Razvijmo sad funkciju $h$ oko ishodišta:
$h(x)=a+bx+cx^2+dx^3+rx^4+...$
uvrstimo u gornju relaciju i izjednačimo koeficijente. Dobit ćemo:
$2a=h(0)+a$, $2b=b\sqrt{2}$, $2c=2c$, $2d=2d\sqrt{2}$, $2r=4r$ itd.
Vidimo da mora biti: $a=h(0)$ i $b=d=e=...=0$, pa ostaje
$h(x)=h(0)+cx^2 = \ln f(0)+cx^2$, za neki realan broj $c$. Zato je
$f(x)=e^{h(x)}= f(0)\,e^{cx^2}$.
Sad iskoristimo sljedeće dvije činjenice:

(i) Mora biti $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(ii) Vrijedi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 1$,

Iz kojih odmah dobijemo da je $c=-\frac{1}{2\sigma}$ za neki $\sigma > 0$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$.

# Procjenjivanje i testiranje

## 1. Uvod

Ponovimo neke pojmove iz deskriptivne statistike.
**Populacija** je skup svih entiteta koje razmatramo, na primjer svi studenti nekog sveučilišta čine populaciju.
Razmatramo neko statistističko obilježje populacije, na primjer visinu. Visina je slučajna veličina.
**Uzorak** je neki podskup populacije slučajno odabran, na primjer slučajno odabranih 300 studenata.
Neka je **n** duljina uzorka, na primjer n=300.
Mjerenjem slučajne veličine X na uzorku dobijemo *n* podataka:
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ .
Interpretiramo ih kao n slučajnih vrijednosti slučajne varijable X.

**Primjer 1**. Da bismo procijenili količinu kemikalije u posudama koje se automatski pune, izaberemo slučajno 10 posuda i provjeravamo količinu kemikalije u njima. Dobivamo podatke koji (nakon sređivanja, od manjeg prema većem) možemo zapisati ovako:
0.98, 0.98, 0.98, 0.99, 0.99, 1.00, 1.01, 1.01, 1.01, 1.02.
Tu slučajna veličina X mjeri količinu kemikalije u posudi,
uzorak čine odabrane posude,
n=10,
$x_1$, do $x_{10}$ jesu podatci 0.98,…, 1.02; to su vrijednosti slučajne veličine X na uzorku.

Neka slučajna veličina X (u primjeru ili općenito) ima očekivanje $\mu$ i varijancu $\sigma^2$:
$E(X) = \mu$
$V(X) = \sigma^2$
(takve ćemo oznake imati i onda ako X nema normalnu razdiobu – približno normalnu razdiobu, već neku drugu, iako u pravilu razmatramo samo slučajne veličine normalno distribuirane).
Ta su nam dva parametra od X nepoznata pa ih **procjenjujemo** na osnovi mjerenja.

Očekivanje E(X) procjenjujemo aritmetičkom sredinom podataka

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

V(X) procjenjujemo izrazom

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1},$$ (u nazivniku je *n*-1, a ne *n*)

U gornjem je primjeru:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 0.98 + 2 \cdot 0.99 + 1.00 + 3 \cdot 1.01 + 1.02}{10}$$
$$= 0.997$$

$$s^2 = \frac{3(0.98-0.997)^2 + 2(0.99-0.997)^2 + (1.00-0.997)^2 + 3(1.01-0.997)^2 + (1.02-0.997)^2}{10-1}$$

$= 0.000233$

$s = 0.014944$

# Dodatak. **Načela na kojima se zasniva procjenjivanje**.

**Slučajne vrijednosti slučajne veličine X**.

Slučajna veličina X može postići bilo koju svoju vrijednost.

Neka je $x_1, x_2, ..., x_n$ nekih n slučajnih vrijednosti slučajne veličine X. Postavlja se pitanje približne rekonstrukcije slučajne varijable X iz ovih *n* slučajnih vrijednosti. Općenito, pitanje slučajnih vrijednosti slučajne varijable je vrlo važno i teško praktično i teoretsko pitanje. Postoje algoritmi za približno određivanje slučajnih vrijednosti, koje se obično nazivaju **pseudoslučajne vrijednosti**. Na primjer, u programskom paketu Mathematica, pseudoslučajne vrijednosti dobivaju se naredbom `RandomArray`.

Primijenom te naredbe na normalnu distribuciju s očekivanjem $\mu = 175$ i standardnom devijacijom $\sigma = 5$, za 100 slučajnih vrijednosti dobilo se:

```
{172.245,171.528,175.126,181.414,170.207,178.076,172.062,172.4
66,163.106,172.987,178.936,170.424,188.639,174.808,172.607,170
.222,176.149,171.733,179.166,172.677,169.084,179.869,179.148,1
63.325,174.914,170.227,170.328,173.236,169.499,183.918,177.506
,174.083,179.498,163.901,181.032,178.373,180.085,162.944,172.3
93,176.77,183.359,175.51,165.857,175.806,173.678,173.769,170.8
66,165.969,180.366,169.439,178.993,178.954,166.12,173.062,176.
924,179.091,173.304,165.135,181.489,179.646,183.993,169.244,17
2.846,169.152,177.249,173.359,177.106,182.76,174.611,177.011,1
65.135,173.365,170.879,177.681,170.9,177.904,179.597,170.347,1
75.311,176.744,179.578,181.396,178.267,178.185,175.475,184.13,
166.898,178.865,170.939,181.221,175.353,176.94,181.164,177.516
,173.84,171.767,173.072,172.221,172.539,183.831}
```

Da bismo bolje uočavali ove podatke primijenimo naredbu **Sort**, kojom dobijemo uređenu listu:

```
{160.234,163.649,164.078,165.826,165.905,166.895,166.908,166.9
87,167.01,167.226,167.259,167.604,168.073,168.17,168.684,168.6
88,169.749,170.298,170.31,170.398,170.43,170.622,170.778,170.8
34,171.,171.227,171.446,171.549,171.694,171.72,171.758,171.832
,172.038,172.323,172.38,172.81,172.889,173.16,173.194,173.255,
173.357,173.514,173.662,173.858,173.93,173.95,174.034,174.073,
174.115,174.171,174.336,174.545,174.621,174.627,174.713,174.78
1,175.104,175.376,175.571,175.579,175.631,175.714,175.771,176.
047,176.069,176.296,176.332,176.477,176.485,176.56,176.572,176
.632,176.995,177.663,178.582,178.625,178.67,178.718,179.48,179
```

.74,179.778,179.884,179.887,180.1,180.169,180.585,180.62,180.749,180.927,180.994,181.07,181.334,181.863,181.93,182.203,182.534,183.427,184.706,185.716,187.524}

Sad se možemo uvjeriti u funkcioniranje pravila *tri sigme*. Naime, prebrojavanjem dobijemo:
u intervalu <170,180> je 66 podataka (idealno bi trebalo biti 68)
u intervalu <165,185> je 95 podataka (idealno bi trebalo biti također 95)
u intervalu <160,190> je svih 100 podataka (kako bi trebalo biti i idealno).

U ovom primjeru pošli smo od poznate slučajne varijable (tj. poznate distribucije). U praksi se pojavljuje situacija da znademo samo podatke, a da ne znamo izvornu distribuciju.

Tada očekivanje $\mu$ procjenjujemo aritmetičkom sredinom podataka $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

To se zasniva na sljedećem razmišljanju. Uz slučajnu varijablu X razmatramo ***n*** **nezavisnih** slučajnih varijabla $X_1, X_2, ..., X_n$ **jednako distribuiranih kao i X**.
Uz takvo razmišljanje na *n* slučajnih vrijednosti $x_1, x_2, ..., x_n$ slučajne varijable X možemo gledati ovako:
$x_1$ je slučajna vrijednost od $X_1$
$x_2$ je slučajna vrijednost od $X_2$
.
.
.
$x_n$ je slučajna vrijednost od $X_n$.

Sad se $\bar{x}$ može interpretirati kao slučajna vrijednost od $\bar{X} := \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.

Kako je $E(\bar{X}) = \mu$, tj. očekivana vrijednost od $\bar{X}$ je $\mu$, kažemo da je $\bar{x}$, kao slučajna vrijednost od $\bar{X}$, **nepristrana procjena** od $\mu$.
U ovom slučaju, primjenom naredbe **Mean**, dobijemo (na jednu decimalu)
$\bar{x}$=**176.0**
Zaključimo: $\mu$ = **175**, a procjenom iz 100 slučajno odabranih vrijednosti dobili smo $\bar{x}$=**176.0**, pa procjenjujemo $\mu \approx 176.0$.
Dakle, iako je broj podataka bio relativno velik, pri procjenjivanju je došlo do grješke.

Slično postupamo pri procjeni varijance, odnosno standardne devijacije. Kako smo vidjeli u Dodatku, ako je:

$$S^2 := \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + ... + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Onda je $E(S^2) = \sigma^2$.

Zato je $s^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$

**nepristrana procjena** varijance $\sigma^2$. Time se objašnjava činjenica što je u nazivniku *n-1* (korigirana varijanca uzorka), a ne *n* (varijanca uzorka).
Nastavljajući s početnim primjerom, koristeći se naredbom **Variance[data]**,

dobivamo, približno na dvije decimale,
$s^2 = 23,80$
odnosno,
$s = 4.88$,
što je vrlo dobra procjena stvarne standardne devijacije $\sigma=5$.
Ovim načelom, koje smo ilustrirali na primjeru procjene očekivanja i varijance iz uzorka, koristimo se općenito pri procjenjivanju. Ubuduće nećemo izvoditi formule koje dobijemo ovim načelom, već ćemo ih samo napisati.

## 2. Interval pouzdanosti za očekivanje – prava vrijednost mjerene veličine.

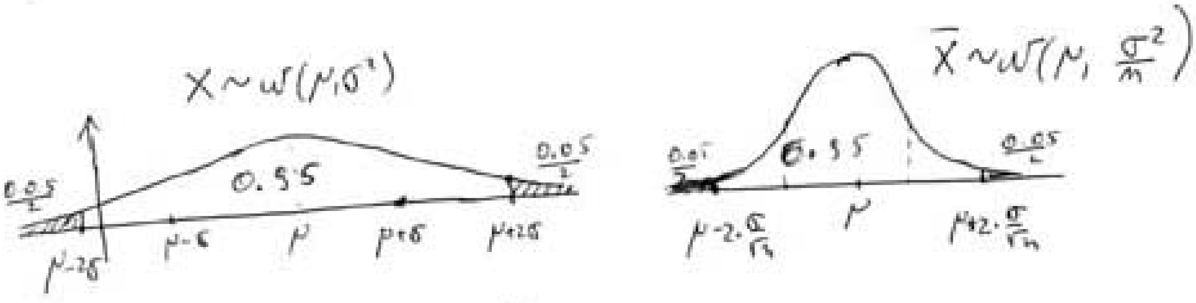
Očekivanje procjenjujemo aritmetičkom sredinom podataka, ali aritmetička sredina ne mora biti (i u pravilu nije) jednaka (nepoznatom) očekivanju. Zato nas zanima **interval** oko $\bar{x}$ unutar kojega će, uz određenu sigurnost, biti očekivanje $\mu$. To je **interval pouzdanosti**.
Jasno je da širina intervala pouzdanosti ovisi o razini sigurnosti da se očekivanje nađe u njemu (što je ta razina veća, interval pouzdanosti je širi).
Interval pouzdanosti se određuje na osnovi sljedećih važnih činjenica (koje se mogu strogo matematički formulirati i dokazati).

Ako je X normalno distribuirana onda je i $\bar{X}$ normalno distribuirana s parametrima $\mu$ i $\frac{\sigma^2}{n}$, gdje je $\bar{X} := \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ i gdje su $X_1,...,X_n$ nezavisne slučajne varijable (što aludira na *n* nezavisnih mjerenja) jednako distribuiranih kao i X (što aludira na to da smo svaki put mjerili vrijednost slučajne veličine X).
dakle:

$$\bar{X} \sim N(\mu, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2).$$

Zato se $\bar{x}$ može shvatiti kao slučajna vrijednost normalne slučajne varijable s distribucijom $N(\mu, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$.
Vrijedi i više, naime
$\bar{X}$ ima očekivanje $\mu$ i varijancu $\frac{\sigma^2}{n}$, bez obzira kako je X bila distribuirana . Razlika je u tome što za opću X, aritmetička sredina ne mora biti normalno distribuirana.
Veličina $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ zove se **standardna grješka**. Ona je to manja što je *n* veći ( što je prirodno, jer što je broj mjerenja veći sigurnost prosjeka treba biti veća).
Kako je $\bar{X}$ normalno distribuirana (sl.1.) ona, prema pravilu "dvije sigme", postiže, s vjerojatnošću većom od 0.95 sve vrijednosti u intervalu $\pm$ *dvije sigme oko sredine*, specijalno, i očekivanje $\mu$ bi se tu trebalo naći s tom vjerojatnošću. Zaključak:

$$P(\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) > 0.95$$




Sl. 1

Zato je, uz 95% vjerojatnost, interval pouzdanosti

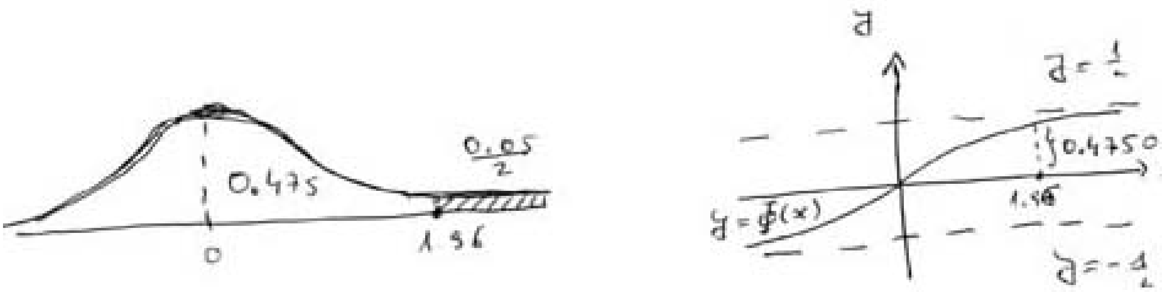
$$< \bar{x} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} >$$

Smisao intervala pouzdanosti nije da se očekivanje $\mu$ u njemu nalazi s vjerojatnošću 0.95 (naime $\mu$ nije slučajna veličina i nalazi se ili ne nalazi u tom intervalu). Taj se smisao može interpretirati na primjer tako da bi se odprilike u 95 od 100 ponavljanja ovih *n* mjerenja, aritmetička sredina $\bar{x}$ našla u intervalu

$< \mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} >$ (što bismo mogli provjeriti da znamo $\mu$ i $\sigma$),

a to je isto kao da kažemo da bi se odprilike u 95 od 100 ponavljanja, očekivanje $\mu$ našlo u intervalu $< \bar{x} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} >$ (što bismo opet mogli provjeriti da znamo $\mu$ i $\sigma$).

Umjesto broja 2, za vjerojatnost 0.95, mogli bismo u tablici normalne razdiobe naći precizniji podatak: 1.96. Naime,
P(0<T<1.96) = 0.4750 (broj 0.4750 dobije se kao 0.95/2), gdje je T jedinična normalna razdioba. Dakle $\Phi(1.96) = 0.4750$, odnosno $\Phi^{-1}(0.4750) = 1.96$ (sl.2.).




Sl. 2.

Treba napomenuti da bismo slično mogli odrediti simetrične intervale oko aritmetičke sredine za druge vjerojatnosti, a ne samo za 0.95 .

1. Ako je *n* velik (obično se uzima ako je n>30), onda je veličina $\overline{X}$ približno normalno distribuirana s parametrima $\mu$ i $\frac{\sigma^2}{n}$, bez obzira je li X bila normalno distribuirana,dakle:

   $\overline{X} \sim N(\mu, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$ (približno, ako X nije normalno distribuirana)

Zato u ovom slučaju možemo postupiti kao u 1.

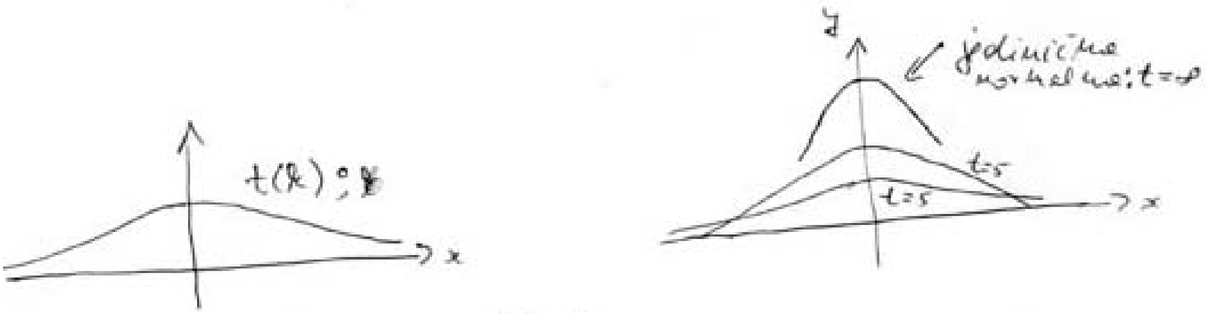
2. Treba napomenuti da je predpostavka da znamo $\sigma$ (a da $\mu$ procijenjujemo iz *n* mjerenja) nerealna, iako nije nemoguća. U praksi smo gotovo uvijek prisiljeni procijeniti $\sigma$ pomoću *s*. Tada se situacija usložnjava, medjutim za parametre normalne razdiobe, tj. ako predpostavimo da je X normalno distribuirana, problem se može riješiti. Formula iz 1. može se napisati kao

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1^2),$$

medjutim, ako $\sigma$ zamijenimo sa *S* (slučajna varijabla kojoj je očekivana vrijednost poribližno jednaka *s*), tada jediničnu normalnu razdiobu na desnoj strani treba zamijeniti sa Studentovom t-razdiobom, preciznije:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

gdje je t(n-1) Studentova razdioba s k=n-1 stupnjeva slobode (sl.3.)

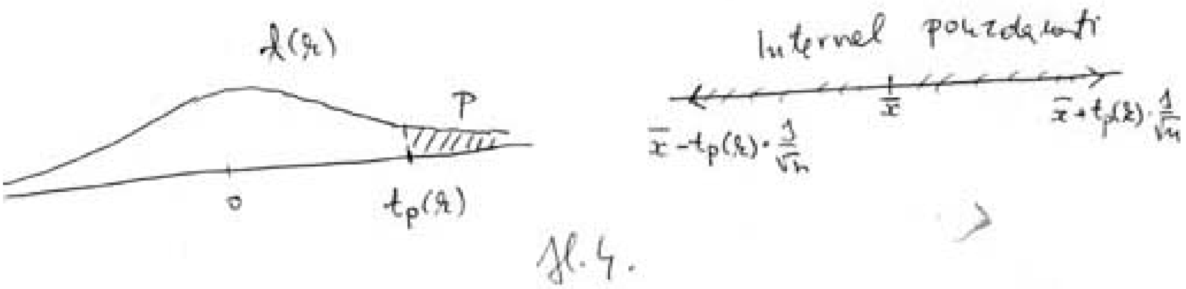



Sl. 3.

Zato je (sl.4.):

$$p(\overline{X} - t_p(k)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_p(k)\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - 2p$$

gdje je značenje broja $t_p(k)$ objašnjeno na sl. 4.




Sl. 4.

Tu treba biti pažljiv jer se u literaturi katkad pojavljuju i tzv. dvostrane tablice, uz uobičajene jednostruke.

Interval pouzdanosti, uz vjerojatnost 1-2p, sad je $< \bar{x} - t_p(k)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_p(k)\dfrac{s}{\sqrt{n}} >$.

**Ako je *n* dovoljno velik**, recimo oko 30, onda je t(n-1) praktično jednaka jediničnoj normalnoj razdiobi, pa postupamo kao u primjeru.

**Primjer 2**. U 40 mjerenja neke normalno distribuirane veličine, dobiveno je $\bar{x}$ =32.45 i s=2.44. Nađite interval pouzdanosti za očekivanje te slučajne veličine, uz vjerojatnost:

a) 0.95

b) 0.90

Tu je n=40 što je dovoljno veliko da koristimo normalnu razdiobu.

a) Interval pouzdanosti je $< 32.45 - 1.96\dfrac{2.44}{\sqrt{40}}, 32.45 + 1.96\dfrac{2.44}{\sqrt{40}} >$

$$= < 31.69; 33.21 >$$

b) Faktor kojim ćemo sad množiti (umjesto s faktorom 1.96) naći ćemo u tablici normalne razdiobe kao broj $\Phi^{-1}(0.45) = 1.645$ (sl.5.). Dakle, sad je interval pouzdanosti uži:

$$< 32.45 - 1.645\frac{2.44}{\sqrt{40}}, 32.45 + 1.645\frac{2.44}{\sqrt{40}} >$$

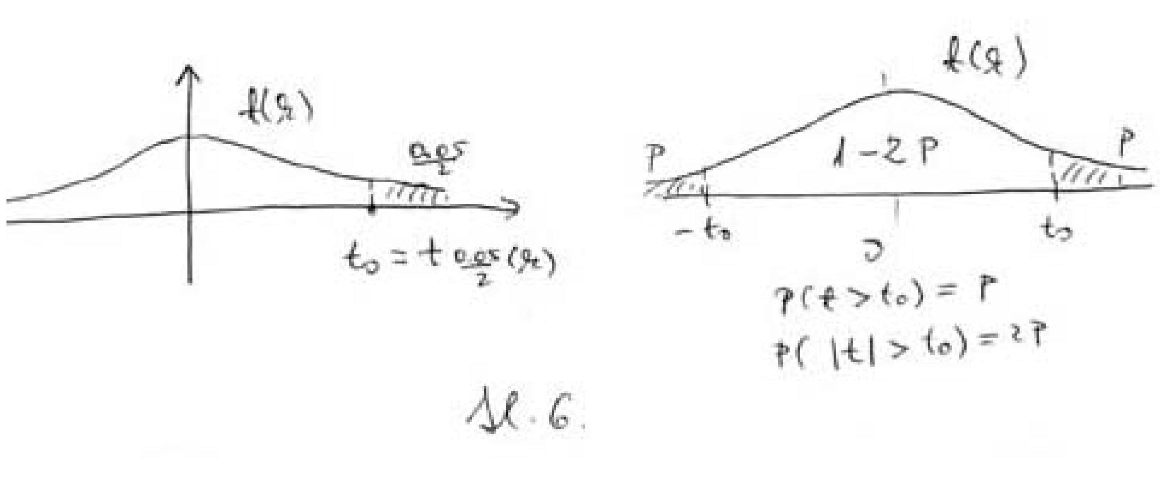
$$= < 31.82; 33.08 >$$

Rezultati su interpretirani geometrijski na slici.


sl. 5.

**Ako je *n* mali (do 30)**. Tada, uz pretpostavku da slučajna veličina X ima normalnu razdiobu, interval pouzdanosti određujemo ovako.

Faktor kojim ćemo množiti standardnu grješku (točnije, njenu procjenu) određujemo, za vjerojatnost 0.95, iz tablica Studentove (t-razdiobe) s k=n-1 stupnjeva slobode kao broj $t_{0.05/2}(k)$ za kojega vrijedi $P(|t|> t_{0.05/2}(k))<0.05$ , a broj 0.05 dobije se kao 1-0.95 (sl.6.).




sl. 6.

Opet ponavljamo da kod uporabe tablica t-razdiobe treba paziti jer su u nekima tabelirane vrijednosti $t_0$ za koje je $P(|t|>t_0) = p$, gdje je p=0.05 ili 0.025 ili 0.01 itd.,
a u nekima su tabelirane vrijednosti $t_0$ za koje je $P(t>t_0)=p$ (tu nema apsolutne vrijednosti) pa su vrijednosti u prvim tablicama za, recimo p=0.05, iste kao i u drugim tablicama za p=0.025 (naravno uz isti broj stupnjeva slobode *k*).
Naravno, ako se služimo određenim statističkim paketom, onda interval pouzdanosti dobijemop izravno.

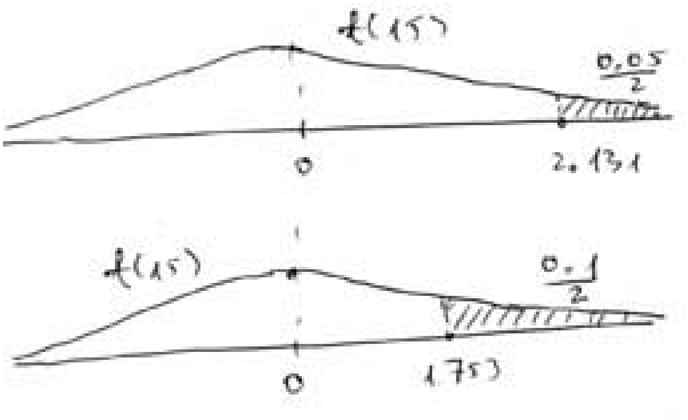
**Primjer 3**. Iz n=16 mjerenja dobiveno je $\bar{x} = 12.44, \quad s = 1.54$ .
Odredimo interval pouzdanosti za vjerojatnost:
a) 0.95
b) 0.90

k=16-1 = 15

a) Tu je, prema prihvaćenim oznakama, 2p=0.05 , $t_{0.05/2}(15)=2.131$, $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.54}{4}$

Interval pouzdanosti je:
$$< 12.44 - 2.131\frac{1.54}{4}, 12.44 + 2.131\frac{1.54}{4} >$$
= <11.62; 13.26>.

b) 2p=0.1, $t_{0.1/2}(15) = 1.753$ (sl.7.).



sl.7.

Interval pouzdanosti je
$$< 12.44 - 1.753\frac{1.54}{4}, 12.44 + 1.753\frac{1.54}{4} >$$
= <11.77; 13.11>.

Taj je interval uži nego prethodni (što je jasno jer je sad vjerojatnost manja)

Da je bilo n=4, a ostali podatci isti kao i prije, intervali pouzdanosti, uz istu vjerojatnost bili bi dva puta širi (jer bismo u standardnoj grješki dijelili s 2 umjesto s 4). To je prirodno (jer interval pouzdanosti treba biti to uži što je broj mjerenja veći).

# 3. Testiranje varijance i očekivanja

Skicirat ćemo postupak testiranja očekivanja i varijance normalno distribuiranih slučajnih varijabla. U mnogim slučajevima u praksi važno je da varijanca ne bude prevelika (jer to znači preveliko rasipanje). Zato bi, pri ozbiljnom poslu, testiranje varijance u pravilu trebalo prethoditi testiranju očekivanja.

### 3.1. Testiranje varijance.

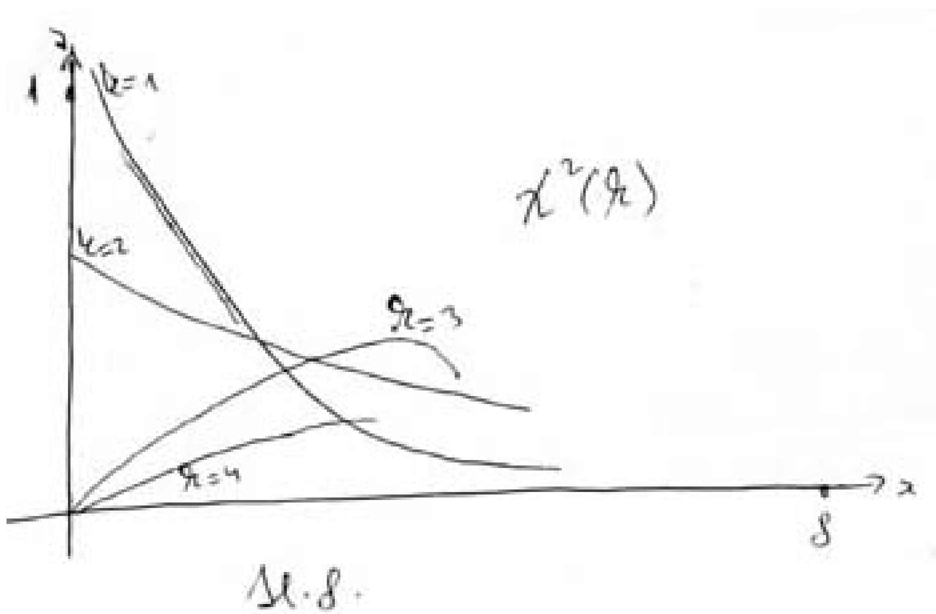
A. Predpostavimo da je X normalno distribuirana slučajna veličina s nepoznatom varijancom $\sigma^2$.

Nepoznatu varijancu procijenili smo sa $s^2$ na osnovi $n$ mjerenja.

Testiramo hipotezu:
H$_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$,
za neku deklariranu vrijednost $\sigma_0^2$.
Testiranje se zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti da je:

$$k\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(k),$$

gdje je $\chi^2(k)$ hi-kvadrat razdioba s k:=n-1 stupnjeva slobode (sl.8.) i ona se zove **test-statistika**. Zato $k\frac{s^2}{\sigma^2}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne veličine $\chi^2(k)$.




Sl.8.

To znači, ako je $H_0$ istinita hipoteza (slutnja), onda je $k\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ slučajna vrijednost slučajne veličine $\chi^2(k)$ (dodali smo indeks 0), pa se lijeva strana, kao pozitivan broj ponaša prema njoj.

Postoje dvije mogućnosti.

(I) $s^2 > \sigma_0^2$ (koja je u praksi češća). Tada je, u pravilu, kontrahipoteza $\sigma^2 > \sigma_0^2$, dakle imamo:

$H_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

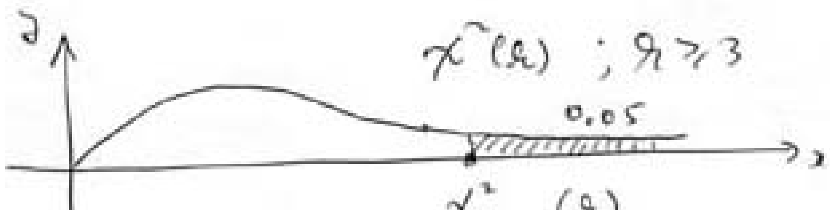
$H_a$: $\sigma^2 > \sigma_0^2$,

Tada računamo:

$$W_{\exp} = k\frac{s^2}{\sigma_0^2}, \text{ gdje je } k=n-1.$$

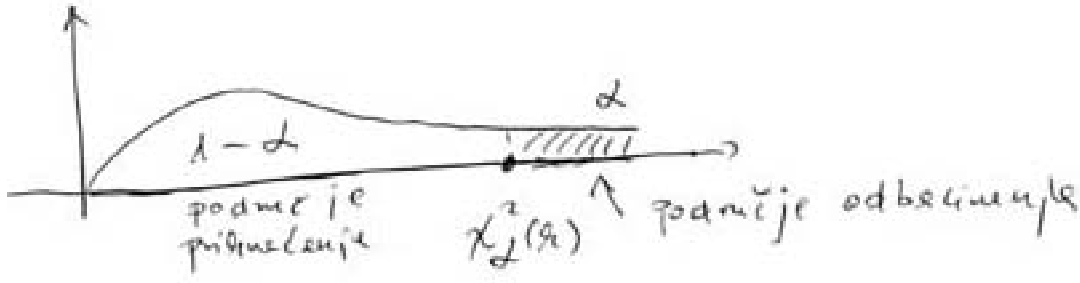
Ako je $W_{\exp} < (Hi)^2_{0.05}(k)$ hipoteza se prihvaća, inače se odbacuje (sl.9.).

Broj na desnoj strani dobije se iz tablica "hikvadrat" razdiobe za *k* stupnjeva slobode i smisao je da je vjerojatnost da ta razdioba poprimi rezultat veći od tog broje jednaka 0.05 ( tako bi bilo i za neki drugi nivo signifikantnosti).




sl. 9

**Nivo signifikantnosti (razina značajnosti)**. Broj $\alpha$ =0.05 zove se nivo signifikantnosti. To je općeprihvaćena vrijednost, medjutim, ona može biti, ovisno o problematici, 0.1, 0.01, 0.025 itd. Područje ispod grafa funkcije gustoće test-statistike (u ovom slučaju $(Hi)^2$ razdiobe), dijeli se na dva dijela (sl.10.), jedan manji površine $\alpha$ (to je područje odbacivanja), jedan veći površine $1-\alpha$ (to je područje prihvaćanja).




sl. 10.

Smisao je, za $\alpha$ =0.05 sljedeći:
**Ako je nula hipoteza istinita** onda će se, odprilike, u 95 od 100 ponavljanja po $n$ mjerenja, eksperimentalni podatak $W_{exp}$ naći u području prihvaćanja, a oko 5 puta u području odbacivanja.
Općenito, $\alpha$ **je pogrješka prve vrste**, tj.
$\alpha$ := vjerojatnost da hipotezu $H_0$ odbacimo pod uvjetom da je istinita.
Analogno:
1-$\alpha$ := vjerojatnost da hipotezu $H_0$ prihvatimo pod uvjetom da je istinita.
Dakle, **pogrješno je shvaćanje**, inače široko rasprostranjeno, da je to vjerojatnost da je nulta hipoteza istinita. Naprotiv, ako je $\alpha$ manje, tj. 1-$\alpha$ veće, onda ćemo biti tolerantniji prema razlici. Konkretno, na razini značajnost $\alpha$ =0.01, možda nećemo odbaciti nula hipotezu, koju smo odbacili za $\alpha$ =0.05.

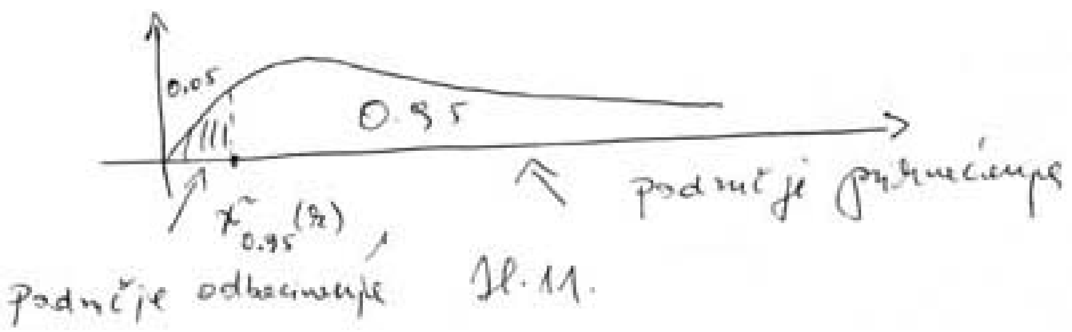
(II) $s^2<\sigma_0^2$

Tada je, u pravilu, kontrahipoteza $\sigma^2 < \sigma_0^2$, dakle imamo:

$H_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_a$: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Tada hipotezu prihvaćamo ako je $W_{exp} > (Hi)^2_{0.95}(k)$
(znak nejednakosti se mijenja i umjesto 0.05 stavljamo 0.95).
Geometrijsko je tumačenje dano slikom 11.




**(B) Testiranje hipoteze $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ( F-test)**

Predpostavimo da imamo dvije normalno distribuirane slučajne veličine:

X s očekivanjem $\mu_1$ i varijancom $\sigma_1^2$

Y s očekivanjem $\mu_2$ i varijancom $\sigma_2^2$.

Očekivanja i varijance tih slučajnih varijabla su nam nepoznate i procjenjujemo ih redom:

Za X iz $n_1$ mjerenja s $\bar{x}_1$ , odnosno s $s_1^2$,

Za Y iz $n_2$ mjerenja s $\bar{x}_2$, odnosno s $s_2^2$.

Testiramo hipotezu o jednakosti tih varijanca. Pri tom predpostavimo da su indeksi odabrani tako da bude $s_1^2 > s_2^2$ i da smo za kontrahipotezu odabrali $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Dakle imamo:

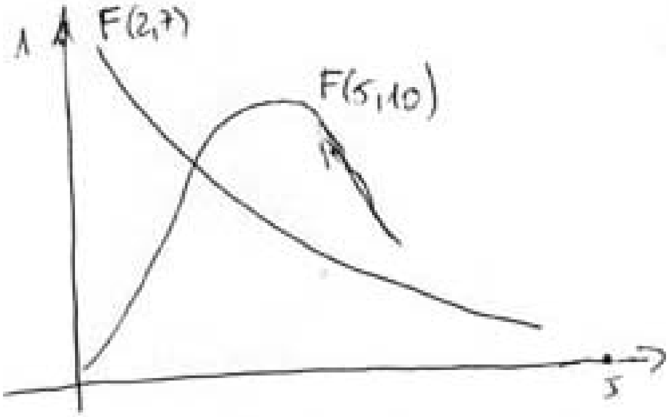
$H_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_a$: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Testiranje se zasniva na činjenici, da je, uz pretpostavku da je nulta hipoteza istinita:

$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(k_1,k_2)$,

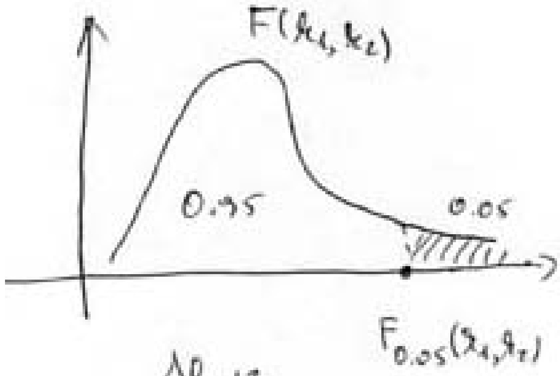
Fisherova razdioba s $(k_1,k_2)= (n_1-1,n_2-1)$ stupnjeva slobode (sl.12.). Tu velika slova primijenjujemo, kao i prije, za odgovarajuće slučajne varijable.




Sl. 12.

Hipotezu, primjenom F-testa (u pojednostavljenom obliku), provjeravamo ovako:

1. Računamo $F_{\exp} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
2. U tablici $F$ razdiobe očitavamo broj $F_{0.05}(k_1,k_2)$, gdje je $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$ (sl.13.).




Sl. 13

3. Ako je $F_{\exp} < F_{0.05}(k_1,k_2)$ hipotezu o jednakosti prihvaćamo, a u suprotnome odbacujemo (tj. smatramo da je razlika među njima bitna).

Napominjemo opet da je postupak testiranja varijance sofisticiraniji od ovog pojednostavljenog pristupa.

### 3.2. Testiranje očekivanja

**(A) Testiranje hipoteze $\mu = \mu_0$ (t-test)**

Predpostavimo da je X normalno distribuirana slučajna veličina s očekivanjem $\mu$ i varijancom $\sigma^2$.

Neka smo na osnovi $n$ mjerenja dobili procjene:
$\bar{x}$ za njeno očekivanje $\mu$,
$s^2$ za njenu varijancu $\sigma^2$.

Testiramo hipotezu:

$H_0$: $\mu = \mu_0$,
gdje je $\mu_0$ neka deklarirana vrijednost.
Napominjemo da bismo prije toga trebali provjeriti hipotezu o bliskosti varijanca (koju treba formulirati), a nakon što testiranje varijanaca pozitivno prođe, možemo pristupiti testiranju očekivanja.

Testiranje nulte hipoteze zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti, da je
$\dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$~t(n-1), Studentova razdioba s k:=n-1 stupnjeva slobode. Zato je, uz predpostavku

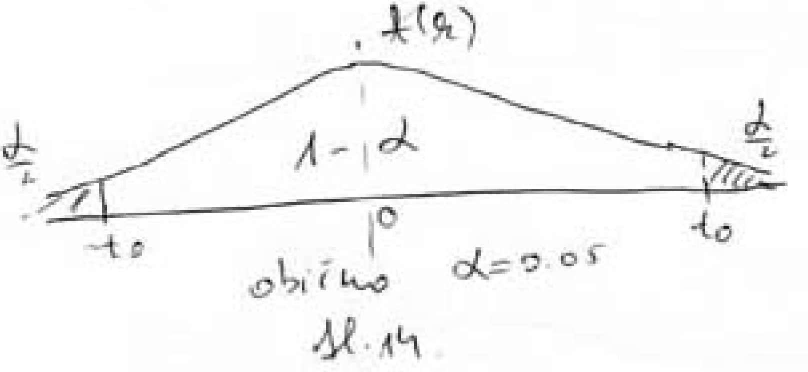
da je nulta hipoteza istinita ispunjeno $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$~t(n-1).

Zato broj $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne varijable t(n-1).

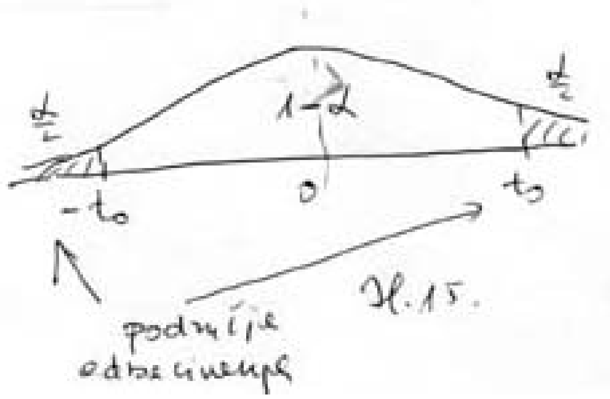
Postupak opisujemo uz kontrahipotezu $\mu \neq \mu_0$, dakle imamo:

$H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_a$: $\mu \neq \mu_0$

1. Računamo $|t_{\exp}| = \dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.
2. U tablici t-razdiobe određujemo kritičnu vrijednost $t_0$ (analogno kao i prije, ovisno o broju stupnjeva slobode k=n-1, nivou signifikantnosti što je obično 0.05 i kontrahipotezi koja je, ako drukčije ne specificiramo $\mu \neq \mu_0$)
3. Ako je $|t_{exp}| < t_0$ hipotezu prihvaćamo, inače je odbacujemo (sl.14.).




**Napomena o razini značajnosti i području odbacivanja**.
Za razliku od testiranja varijance gdje se područje odbacivanja sastoji od jednog dijela, ovdje područje odbacivanja ima dva simetrična dijela, svaki površine $\frac{\alpha}{2}$, gdje je $\alpha$ nivo signifikntnosti (sl.15.). To je zato što je kontrahipoteza oblika $\mu \neq \mu_0$, pa se dopuštaju otkloni na obje strane. Dakle, u slučaju $\alpha$ =0.05, broj $t_0$, označava broj iza kojega je ispod grafa t-razdiobe površina jednaka 0.025.




**Primjer 4**. Proizvođač kemikalija je deklarirao na svojim proizvodima da sadrže 1 litru kemikalije uz maksimalnu pogrješku $\pm 0.09$ litara. Kupac mjerenjem uzorka od 12 posuda ustanovio prosječni rezultat 0.97 uz standardno odstupanje 0.04. Jesu li rezultati u skladu s deklaracijom?

Tu je, prema pravilu «tri sigme», $\sigma_0$ =0.03, jer je 3·0.03 = 0.09. Zato je:
$\mu_0 = 1.00, \quad \sigma_0^2 = 0.03^2, \quad n = 12, \quad \bar{x} = 0.97, \quad s^2 = 0.04^2$.

Prvo treba testirati hipotezu o jednakosti varijanca:
$H_0$': $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
Dobivamo:
k=n-1 = 11

$$W_{\exp} = k\frac{s^2}{\sigma_0^2}$$
$$=19.5556$$

U tablici “hikvadrat” razdiobe za k=11, i nivo signifikantnosti 0.05 dobivamo pripadajuću kritičnu vrijednost 19.6751.
Kako je 19.5556 < 19.6751
hipotezu o jednakosti varajanca prihvaćamo (ali jedva).

Sad prelazimo na testiranje očekivanja.

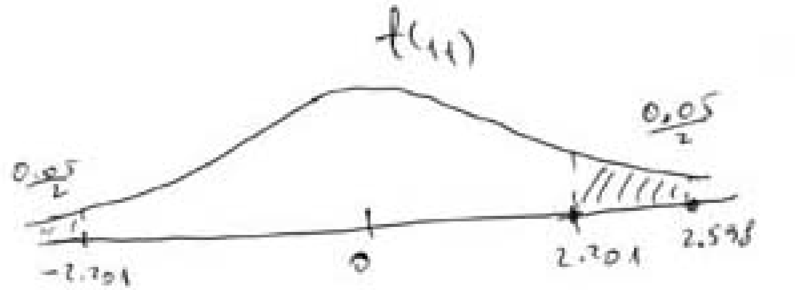
$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu \neq \mu_0$

$$|t_{\exp}| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$= 2.598$

Pripadna kritična vrijednost u t-razdiobi (za kontrahipotezu $\mu \neq \mu_0$, uz k=11 i nivo signifikantnosti $\alpha = 0.05$)
$t_0$ =2.201 (sl.16.).




Sl.16.

Kako je 2.598 > 2.201,
hipotezu o jednakosti očekivanja odbacujemo (tj. smatramo da se one bitno razlikuju).
Tako smo odbacili deklaraciju.

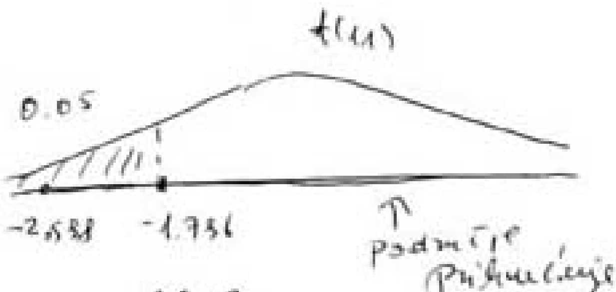
**Napomene**.
1. Da smo umjesto kontrahipoteze $\mu \neq \mu_0$, uzeli kontrahipotezu $\mu < \mu_0$
(što bismo napravili da su, na primjer, svi rezultati mjerenja ili gotovo svi, bili manji od deklarirane, što ovdje vjerojatno nije slučaj), hipotezu o jednakosti bismo još uvjerljivije odbacili jer bi nam kritična vrijednost ispala 1.796, jer je P(t>1.796)=0.05
Naime, tada bismo imali:

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_a$: $\mu < \mu_0$

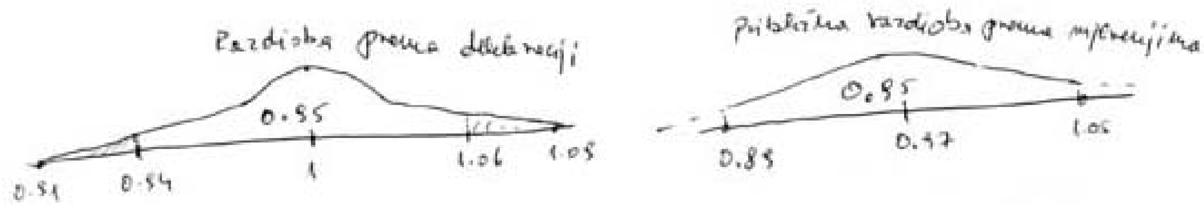
pa bismo gledali (sad bez apsolutne vrijednosti)

$t_{\exp:=} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ = - 2.598, što je u kritičnom području (sl.17.).




Sl. 17.

2. Uz pretpostavku normalne distribucije sadržaja posuda (što je prirodna predpostavka i već smo je prihvatili), prema pravilu “tri sigme”:
prema deklaraciji je sadržaj između 0.91 i 1.09 (između 0.94 i 1.06 uz vjer. 0.95)
prema mjerenjima je sadržaj (približno jer nije riječ o normalnoj razdiobi) između 0.85 i 1.09 (između 0.89 i 1.05 uz vjer. 0.95)
odakle možemo dobiti intuitivnu predodžbu o tome zašto smo odbacili hipotezu, ali i o tome da smo je umalo prihvatili. Vidimo da je nismo prihvatili jer je vrijednost $\mu_0=1$ ispala izvan intervala pouzdanosti uz vjerojatnost 0.95 koji je $0.97 \pm 0.0254$ (sl.18.).




Sl. 18.

4. U deklaraciji bi pisalo da je sadržaj posude $1 \pm 0.09$ (odakle smo zaključili da je standardno odstupanje, prema pravilu *tri sigme* trećina od 0.09, tj. 0.03). Napominjemo da se u deklaricijama u pravilu koristi pravilo «dvije sigme», pa bi, ako bi tako nešto prihvatili trebali uzeti $\sigma_0=0.045$.

**Primjer 5**. Možemo li prihvatiti da je sadržaj posude u Primjeru 1 jednak $1 \pm 0.015$?

U primjeru je bilo n = 10, $\bar{x} = 0.997$, $s = 0.014944$, a prema deklaraciji je
$\mu_0 = 1$, $\sigma_0 = 0.005$ (opet smo išli prema pravilu «tri sigme»)
$W_{exp} = 80.396 > 16.919$ pa se varijance bitno razlikuju. Zato odbacujemo deklaraciju. Razlog ovog drastičnog odbacivanja jest u tome što početni podatci nisu bili približno normalno distribuirani (što je pretpostavka za važenje testa).

**Testiranje hipoteze $\mu_1 = \mu_2$ (t-test).**
Tom testu u pravilu predhodi F-test. Nakon što taj prođe nastavlja se s t-testom (testiranju očekivanja), tj. s testiranjem hipoteze:

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$ (nulta hipoteza)

Hipoteza se, primjenom t-testa, provodi ovako:

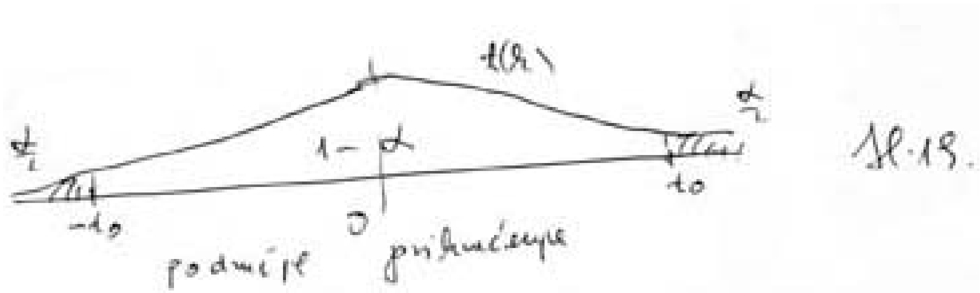
1. Izračuna se:

$$t_{\exp} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\ s_1^2 + (n_2 - 1)\ s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

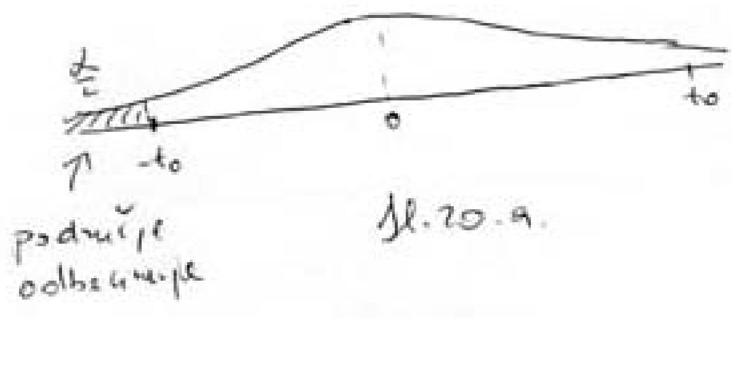
gdje obično označavamo: $s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\ s_1^2 + (n_2 - 1)\ s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

2. Odredi se broj stupnjeva slobode $k = n_1 + n_2 - 2$.
3. Prihvati se neki nivo signifikantnosti $\alpha$ (obično $\alpha$ =0.05, ali može i $\alpha$ =0.01 ili $\alpha$ =0.1) Smisao nivoa signifikantnosti u testiranju je sljedeći:
   *P*(Postavljena se hipoteza odbacuje| postavljena je hipoteza istinita) = $\alpha$ .
4. Iz tablica t-razdiobe izračuna se kritična vrijednost pomoću koje odredjujemo upada li izračunata vrijednost $t_{exp}$ u kritično područje. Kritična vrijednost ovisi o nivou signifikantnosti $\alpha$ , o broju stupnjeva slobode (dakle o broju mjerenja), ali i o našoj kontrahipotezi koja može biti:

a) $\mu_1 \neq \mu_2$ (kad testiramo jesu li te dvije veličine jednake ili različite). Tada kritična vrijednost $t_0$ ima značenje: $P(|t|>t_0) = \alpha$ (sl.19.), gdje *t* označava Studentovu (t-razdiobu).
Hipotezu prihvaćamo ako je $|t_{exp}|<t_0$ (inače je odbacujemo).
Ako izričito drukčije ne kažemo uvijek smatramo da je kontrahipoteza takva.



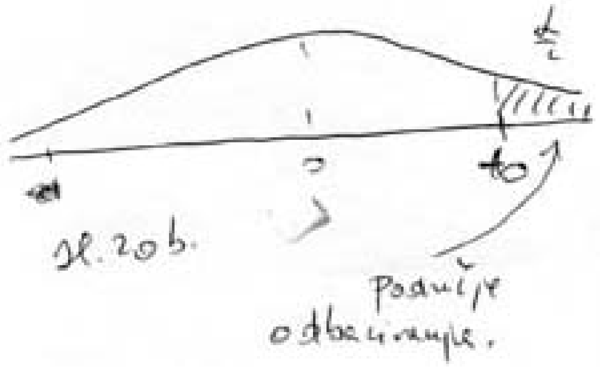

b) $\mu_1 > \mu_2$ (koja ima smisla samo ako je $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ ) .
Tada kritična vrijednost $t_0$ ima značenje: $P(t>t_0) = \alpha$ ($t_0$ je drukčiji od onog iz a)).
Hipotezu prihvaćamo ako je $t_{exp}<t_0$, inače je odbacujemo (sl.20a).



c) $\mu_1 < \mu_2$ (koja ima smisla samo ako je $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$) .

Tada kritična vrijednost $t_0$ takodjer ima značenje: $P(t>t_0) = \alpha$ .

Hipotezu prihvaćamo ako je $t_{exp} > - t_0$, inače je odbacujemo (sl.20b).




Da se bolje uvidi razlika između a) , b) i c), neka je $\alpha = 0.05$ ; k = 8.

Tada je u a) $t_0 = 2.306$, a u b) i c) $t_0 = 1.860$.

**Primjer 6**. Neka je iz 8 mjerenja neke normalne slučajne veličine dobiven prosjek 12.56 uz standardno odstupanje 1.36; a iz 11 mjerenja druge normalne slučajne veličine prosjek 13.01 uz standardno odstupanje 0.84. Razlikuju li se bitno te veličine?

Podatci se mogu zapisati ovako:

$n_1 = 8, \quad \bar{x}_1 = 12.56, \quad s_1 = 1.36$

$n_2 = 11, \quad \bar{x}_2 = 13.56, \quad s_2 = 0.84$

$k_1 = 7, \quad k_2 = 10, \quad k = 17.$

**1.** F-test.

$H'_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F_{\exp} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$=2.6213$

$F_{0.05}(k_1, k_2) = 3.14.$

Kako je 2.6213 < 3.14 hipotezu prihvaćamo, tj. smatramo da varijance tih slučajnih veličina nisu bitno različite.

**2.** t-test. Testiramo:

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$

$H_a$: $\mu_1 \neq \mu_2$

Dobijemo:

$s_d = 0.504035$

$t_{exp} = - 1.984$, $|t_{exp}| = 1.984$

Kritična vrijednost (za nivo signifikantnosti 0.05 i za k=17) je $t_0 = 2.110$, jer je $P(t>2.110)=0.025$ (polovica od vjerojatnosti 0.05).

Kako je 1.984 < 2.110, hipoteza se prihvaća pa se smatra da se dvije mjerene veličine bitno ne razlikuju.

Sljedeće napomene upozoravaju na relativnost zaključka pri testiranju u odnosu na male promjene podataka ili na odabir kontrahipoteze i razine značajnosti.

**Napomena 1**. Da smo u podatcima imali $\bar{x}_2 = 13.66$, a da su ostali podatci ostali isti, sve bi bilo isto osim završnog rezultata $t_{exp}$. Naime, bilo bi:
$t_{exp}$= - 2.1824, $|t_{exp}|$= 2.1824
a kako je 2.2419 > 2.110, hipotezu o jednakosti očekivanja bismo odbacili.
**2**. Da smo u izvornom zadatku odabrali kontrahipotezu $H_a$: $\mu_1 < \mu_2$
(što načelno ima smisla jer je $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$), hipotezu o jednakosti očekivanja takodjer bismo odbacili. Naime, tada bi kritična vrijednost bila $t_0$ = 1.740, jer je, za k=17, P(t>1.740)=0.05 . Kako je 1.984>1.740 nula hipotezu bismo odbacili.
**3.** Da smo imali sve kao u izvornom zadatku i izvornom rješenju, sam da smo odabrali razinu značajnosti $\alpha$ = 0.1, tada bismo hipotezu takodjer odbacili, jer bi tada kritična vrijednost bila kao i u 2., tj. bilo bi $t_0$ = 1.740.

# **4.** Testiranje teoretskih razdioba ($\chi^2$ - test)

Jedno od najčešćih pitanja u statistici jest ponašaju li se mjereni podatci prema nekom teoretskom zakonu (razdiobi) ili se bitno od njega razlikuju.

**Primjer 7**. Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 ili više |
| 16 | 16 | 36 | 15 | 10 | 7 |

Dakle, u 16 mjerenja nije bila ni jedna poruka, u 16 mjerenja točno jedna, u 36 mjerenja točno 2 itd. Formulacija u zadnjem stubcu je takva jer je, možda bilo i 6 ili 7 poziva koji put, pa smo to skupili u jedan podatak. Ukupno je bilo n=100 mjerenja, koje smo svrstali u L=6 grupa.
Postavlja se pitanje ponašaju li se ti podatci prema Poissonovu zakonu ili, možda, bitno odudaraju od njega. O tome je zaista teško odgovoriti samo uvidom u podatke.

Odgovor na pitanje pomoću $\chi^2$-testa (predloženog Karlom Pearsonom 1900) zasniva se na sljedećem razmišljanju.
Brojevi u drugom redku tablice zovu se **eksperimentalne frekvencije** $f_i$, dakle:
$f_0$=16, $f_1$=16, $f_2$=36, $f_3$=15, $f_4$=10, $f_5$=7.
Prosječan broj poruka, dobije se kao:

$$a=\frac{0 \bullet 16 + 1 \bullet 16 + 2 \bullet 36 + 3 \bullet 15 + 4 \bullet 10 + 5 \bullet 7}{100}=2.08$$

Jasno je da je $a$ procjena za očekivanje slučajne varijable X koja registrira broj poruka u fiksiranom vremenskom intervalu, a ako se podatci zaista ponašaju prema Poissonovu zakonu onda je, približno, $X \sim P(a)$, tj. $X \sim P(2.08)$.
U nastavku ćemo izračunati pripadne **teoretske vjerojatnosti** $p_i$, i=0,1,2,... te razdiobe, prema formuli

$$p_i := e^{-a}\frac{a^i}{i!}, \quad \text{tj.} \quad p_i := e^{-a}\frac{2.08^i}{i!}$$

i pripadne **teoretske frekvencije** prema formuli

$f_{ti} := n \cdot p_i$ , tj. $f_{ti} := 100 \cdot p_i$. Imamo, dakle:

$p_0 = e^{-2.08} =$ 0.124930 $\qquad f_{t0} = 12.4930$

$p_1 = e^{-2.08}\frac{2.08}{1!} = 0.259855$ $\qquad f_{t1} = 25.9855$

$p_2 =$ 0.270249 $\qquad f_{t2} = 27.0249$

$p_3 =$ 0.187373 $\qquad f_{t3} = 18.7373$

$p_4 =$ 0.097434 $\qquad f_{t4} = 9.7434$

$p_5 := 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$
$= 0.060159$ $\qquad f_{t5} = 6.0159$

Tu smo, umjesto pravog $p_5$ stavili zbroj svih vjerojatnosti od pete na dalje, tako da ukupan zbroj vjerojatnosti bude 1; slično tako smo dobili da je ukupan zbroj teoretskih frekvencija jednak 100.
Sljedeći je korak uvodjenje **mjere udaljenosti** eksperimentalnih i teoretskih frekvencija:

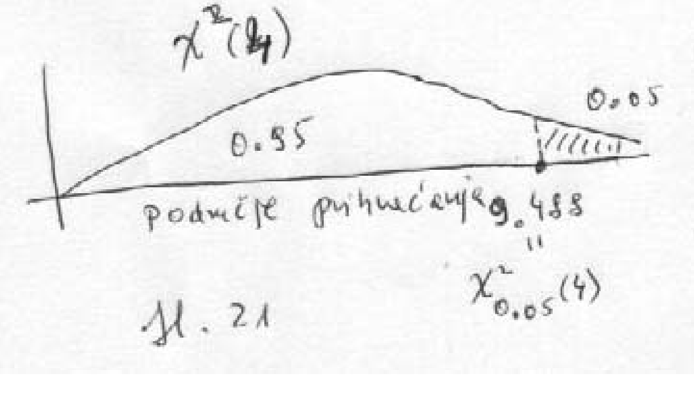
$$\chi^2_{\exp} := \frac{(f_0 - f_{t0})^2}{f_{t0}} + \frac{(f_1 - f_{t1})^2}{f_{t1}} + \frac{(f_2 - f_{t2})^2}{f_{t2}} + \frac{(f_3 - f_{t3})^2}{f_{t3}} + \frac{(f_4 - f_{t4})^2}{f_{t4}} + \frac{(f_5 - f_{t5})^2}{f_{t5}}$$

$$+ \frac{(16-12.4930)^2}{12.4930} + \frac{(16-25.9855)^2}{25.9855} + \frac{(36-27.0249)^2}{27.0249} + \frac{(15-18.7373)^2}{18.7373}$$

$$+ \frac{(10-9.7434)^2}{9.7434} + \frac{(7-6.0159)^2}{6.0159}$$

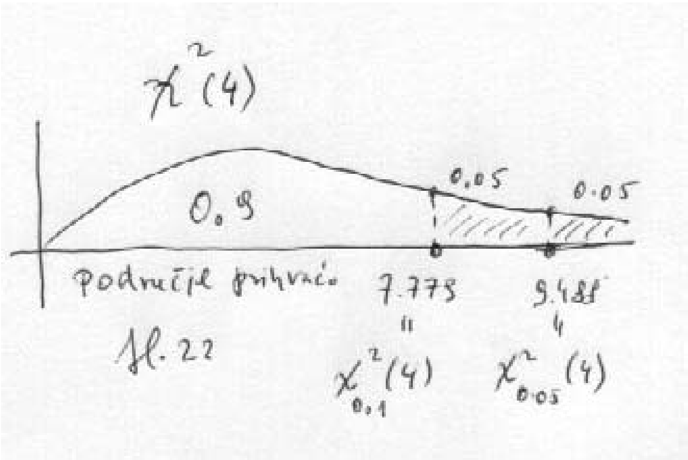
$= 8.715$

Završni je korak prihvaćanje ili odbacivanje hipoteze o Poissonovoj razdiobi. Taj se kriterij zasniva na činjenici, da je, **ako je ispunjena nulta hipoteza**:
$H_0$ : podatci se ponašaju prema Poissonovoj razdiobi
onda broj $\chi^2_{\exp}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne varijable koja **približno** ima hi-kvadrat razdiobu s k:=L-2 = 6-2 = 4 stupnjeva slobode (sl.21.).



Sl. 21

Iz tablica vidimo da je $\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$, što je veće od broja $\chi^2_{\exp}$, pa, uz razinu značajnosti $\alpha$ =0.05, hipotezu o Poissonovoj razdiobi prihvaćamo (iako ne sasvim uvjerljivo).
Takodjer vidimo da je $\chi^2_{0.1}(4) = 7.779$, pa na razini značajnosti $\alpha$ =0.1 tu hipotezu odbacujemo, tj. smatrama da postoji bitno odstupanje od Poissonove razdiobe (sl.22.).



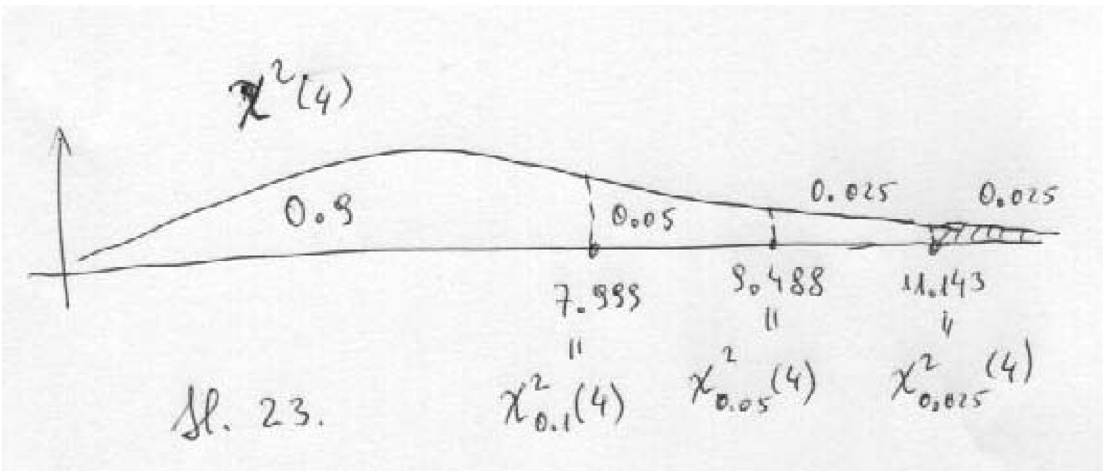

U sljedećem ćemo primjeru dodatno ilustrirati zašto je spomenuta razdioba rubno Poissonova, tako što ćemo samo malo promijeniti podatke.

**Primjer 8**. Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 ili više |
| 16 | 16 | 37 | 14 | 9 | 8 |

Treba testirati predpostavku o Poissonovoj razdiobi.

Lako se vidi da je tu, kao i u Primjeru 7. ispunjeno:
n=100, L=6, k=4, a=2.08 pa su i odgovarajuće teoretske frekvencije jednake. Medjutim, tu je $\chi^2_{\exp}$ =10.412, pa hipotezu o Poissonovoj razdiobi odbacujemo na razini značajnosti $\alpha$ =0.05.
Treba napomenuti da bismo predpostavku prihvatili na razini značajnosti $\alpha$ =0.025, jer je $\chi^2_{0.025}(4) = 11.143$ (sl.23.).



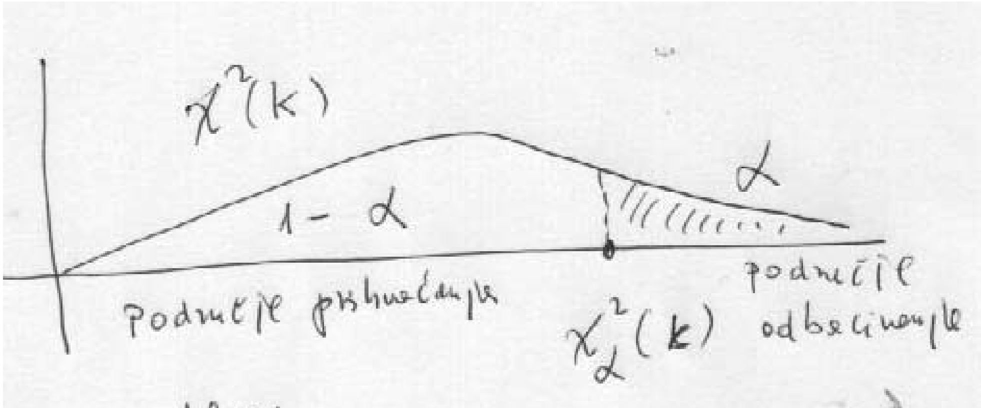
Općenito, a ne samo za Poissonovu razdiobu, imamo:

$\chi^2_{\exp} := \sum \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$, $k := L\text{-}l\text{-}1$, gdje je $l$ broj parametara o kojima ovisi teoretska razdioba, tj. $l$=2 za normalnu i binomnu

$l$=1 za Poissonovu i eksponencijalnu

$l$=0 za jednoliku.

Hipotezu o suglasnosti s teoretskom razdiobom prihvaćamo na razini značajnosti $\alpha$ (u pravilu je $\alpha$ =0.05)
ako je $\chi^2_{\exp} < \chi^2_{\alpha}(k)$, inače je odbacujemo (sl.24.).




sl.24.

# Metoda najmanjih kvadrata

**Inženjerski problem**.
Predpostavimo da imamo dvije veličine: x i y ( na primjer, masa i temperatura, tlak i obujam, prva i druga koordinata točke u ravnini itd.).
Tada postoje dvije mogućnosti. Prva je da su te veličine (u određenim uvjetima) nezavisne, a druga je da su zavisne.
Nezavisnost znači da uz svaku očitanu vrijednost veličine x teoretski možemo očitati bilo koju vrijednost veličine y (takve su, na primjer, masa zlata i temperatura zlata pri uobičajenim masama i temperaturama; očitana masa zlata ne daje nam nikakvu informaciju o temperaturi).
Zavisnost pak znači da očitana vrijednost veličine x potpuno određuje (ili ograničuje) vrijednost veličine y.
Na primjer, ako se točka giba po kružnici u koordinatnoj ravnini, onda očitana vrijednost varijable x općenito uvjetuje dvije moguće vrijednosti varijable y.
Da bi bili još konkretniji zamislimo da se točka giba po jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu. Predpostavimo da smo očitali prvu koordinatu i da smo dobili x=0.8.
Tada postoje dvije mogućnosti za vrijednost veličine y: 0.6 i -0.6.
Općenito, u ovim okolnostima veličina x može poprimiti bilo koju vrijednost između -1 i 1 (uključujući i njih). Isto je s veličinom y. Međutim, te su dvije veličine povezane relacijom:

$x^2 + y^2 = 1$ (jednadžba kružnice).

Zato je $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ pa svakoj vrijednosti veličine x odgovaraju dvije vrijednosti veličine y (osim ako je x=1 ili x=-1; tada je y=0).

U inženjerstvu je važan slučaj kad **svaka vrijednost veličine x, uvjetuje točno jednu vrijednost veličine y**. To se kraće zapisuje pomoću funkcija:

$y = f(x)$,

gdje je $f$ pravilo prema kojemu y ovisi o x.

**Najjednostavnija pravila zavisnosti (funkcije)**

1. linearna zavisnost $y = ax + b$ (to je $f(x):= ax+b$, a grafički je prikaz te zavisnosti pravac)

2. kvadratna zavisnost $y = ax^2+bx+c$ (grafički prikaz je parabola) .

3. kubna zavisnost $y = ax^3+bx^2+cx+d$

4. recipročna zavisnost (obrnuta proporcionalnost) $y = a/x$ (grafički prikaz je hiperbola)

4. eksponencijalna zavisnost $y = ae^{bx}$

5. potencijska zavisnost $y=a\cdot b^x$
itd.

Uočite da ima više linearnih zavisnosti (kvadratnih zavisnosti i sl.). Linearna je zavisnost poznata (određena) onda ako znamo realne brojeve a,b (koeficijente) itd. Da naglasimo kako linearna funkcija zavisi o svojim koeficijentima pišemo:
$f(x,a,b):= ax + b$.

Slično, za kvadratnu funkciju:
$f(x,a,b,c):=ax^2+bx+c$.

Brojeve a,b odnosno a,b,c zovemo i **parametrima**. To je i općenito, a ne samo za linearne ili kvadratne veze. Na primjer,
$f(x,a,b) := a \cdot e^{bx}$
je familija funkcijskih veza (eksponencijalnog tipa) ovisna o parametrima a,b.

Zamislimo pokus u kojemu mijenjamo po volji **obujam** plina, a pri svakoj konkretnoj vrijednosti obujma očitavamo **tlak**. Tu je uobičajeno da veličina x bude obujam (nezavisna veličina, veličina koju po volji mijenjamo) a da veličina y bude tlak (zavisna veličina, veličina koju dobijemo mjerenjem).

**Primjer 1**. Predpostavimo da smo mijenjali veličinu x i pri tom mjerili odgovarajuće vrijednosti veličine y. Rezultate zapišimo u obliku tablice.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x\| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y\| | 2.1 | 5.1 | 8.2 | 11.0 | 14.5 | 17.4 |

Iz prvog pogleda na tablicu uočavamo da se povećavanjem veličine x, povećava i veličina y. Nas zanima pravilo prema kojem se to događa. Brzo uočavamo da smo veličinu x povećavali za jednu mjernu jedinicu. Pri tom se veličina y povećavala redom za:

3.0 pa za 3.1 pa za 2.8 pa za 2.5 pa za 2.9.
(vidimo da su te promjene, iako različite, ipak prilično bliske).

**Kad god pri jednakim promjenama jedne veličine uočimo odprilike jednake promjene druge veličine, moramo posumljati u linearnu vezu među njima**. Dakle:

y = ax + b .

Drugi je način uočavanja možebitne linearne veze grafički. U tu svrhu podatke zapišimo u obliku uređenih parova i ucrtajmo ih u koordinatni sustav kojemu je x horizontalna os, a y vertikalna:

(1; 2.1) , (2; 5.1), (3; 8.2), (4; 11.0), (5; 14.5), (6; 17.4)

Uočavamo da su točke odprilike na pravcu. Grafički uvid u oblik zavisnosti možemo provesti i onda ako razmaci među vrijednostima veličine x nisu jednaki (nisu ekvidistantni), dok je takav uvid računanjem promjene veličine y otežan (iako se i on može provesti).

Sjetite se da su za crtanje pravca potrebne samo dvije točke, a mi ih imamo 5. Lako se vidi da ne postoji pravac koji prolazi kroz sve te točke. Zato od svih pravaca treba izabrati onaj koji *najbolje* prolazi pokraj tih točaka. Kriterij odabiranja tog pravca, tj. pripadajućih koeficijenata a,b daje *metoda najmanjih kvadrata*. Tako je i općenito, samo što je onda kad uočena zavisnost odudara od linearne, otežano biranje tipa zavisnosti. Često to i nije problem. Naime tip veze je u mnogim primjerima predviđen pripadajućim teorijama. Na primjer, veza između obujma i tlaka plina pri fiksiranoj temperaturi predviđena je u obliku Van-der- Wallsove jednadžbe, Peng-Robinsonove jednadžbe i sl. (a mi samo moramo odrediti parametre koji se pojavljuju u tim jednadžbama).

Općenito imamo n vrijednosti veličine x i n vrijednosti zavisne veličine y. To zadajemo tablicom:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x\| | $x_1$ | $x_2$ | .... | $x_n$ |
| y\| | $y_1$ | $y_2$ | ..... | $y_n$ |

**Načelo na kojemu se zasniva metoda najmanjih kvadrata**.
Metoda najmanjih kvadrata zasniva se na načelu da su najbolji oni pararametri a,b za koje je suma kvadrata razlika između mjerenih vrijednosti $y_i$, i=1,2,...,n i izračunatih vrijednosti $f(x_i, a, b)$ minimalna.
Ima više matematičkih razloga za prihvaćanje ovog načela, a tu ih nećemo spominjati.
Napomenimo da nije dobro razmatrati zbroj razlika eksperimentalnih i teoretskih podataka jer se pozitivne i negativne razlike (**odstupanja**) poništavaju. Da bi uzeli u obzir i pozitivna i

negativna odstupanja, matematičari su na početku razmatrali apsolutne vrijednosti razlika i tražili da njihova suma bude minimalna. To nije loš kriterij, ali su apsolutne vrijednosti nepogodne jer se ne mogu općenito derivirati. Taj, ali i neki drugi razlozi, prevagnuli su u korist sume kvadrata.

**Postupak odredjivanja parametara metodom najmanjih kvadrata**.

Označimo i-to odstupanje kao $D_i := y_i - f(x_i, a, b)$

To je razlika izmedju mjerene (eksperimantalne) vrijednosti $y_i$ i teoretske vrijednosti $f(x_i, a, b)$, tj. vrijednosti funkcije f(x,a,b) za $x=x_i$ .

Prema metodi najmanjih kvadrata, parametre odredjujemo tako da suma

$$D_1^2 + D_2^2 + ... + D_n^2$$

bude minimalna.

Taj izraz ovisi o nepoznatim parametrima a, b. Zato pišemo:

$$F(a,b) := [y_1 - f(x_1, a, b)]^2 + [y_2 - f(x_2, a, b)]^2 + ... + [y_n - f(x_n, a, b)]^2$$

ili, kraće

$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)]^2$$

(*F* ovisi i o vrijednostima $x_i$, $y_i$, za i=1,2,...n, međutim te su vrijednosti poznate). Funkcija F često se naziva **funkcija cilja** (općenito, funkcija cilja može biti i neka druga pogodna funkcija, na primjer, odstupanja se mogu množiti nekim težinama).

Treba odrediti parametre a,b u kojima funkcija cilja *F* postiže minimum.

Uvjeti lokalnog ekstrema (pomoću parcijalnih derivacija) za funkciju F jesu:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

Dakle

$$\frac{\partial (\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)]^2)}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial (\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)]^2)}{\partial b} = 0$$

Koristeći svojstva derivacija (derivacija zbroja je zbroj derivacija) dobijemo:

$$\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - f(x_i, a, b)] \cdot (-\frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial a}) = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i} 2[y_i - f(x_i, a, b)] \cdot (-\frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial a}) = 0$$

Nakon sređivanja dobijemo sustav dviju jednadžba s dvjema nepoznanicama a,b.

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)] \cdot \frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial a} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)] \cdot \frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial b} = 0 \quad (*)$$

Iz tog sustava odredjujemo nepoznate parametre a,b . Općenito sustav može imati više rješenja. Takodjer može se dogoditi da neka rješenja odgovaraju maksimumu ili sedlastoj točki, a ne minimumu. Može se dogoditi i to da neka rješenja nemaju fizikalna značenja. Na sreću, u najvažnijem slučaju, slučaju linearnih veza i njima srodnih, rješenje tog sustava je jedinstveno, tj. parametri se mogu odrediti jednoznačno.

**Linearna regresija.**
**Određivanje parametara a,b za linearnu vezu (određivanje regresijskog pravca).**

Tu je $f(x,a,b) := ax+b$, pa je

$f(x_i,a,b) = ax_i+b$

$$\frac{\partial f(x_i,a,b)}{\partial a} = x_i \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x_i,a,b)}{\partial b} = 1$$

Ako to uvrstimo u sustav (*), dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\cdot x_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\cdot 1 = 0$$

nakon raspisivanja dobijemo sustav dviju linearnih jednadžba s dvjema nepoznanicama:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot b = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$
$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot a + n\cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

U tom su sustavu parametri a,b nepoznanice, a brojevi

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ , $n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ **koeficijenti sustava** (oni su poznati, jer se dobiju iz mjernih podataka).

Rješavanjem tog linearnog sustava dobijemo konačne formule (indekse ispuštamo!):

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad b = \frac{\sum x_i^2 \sum \ y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (**)$$

Dobiveni pravac s jednadžbom $y = ax+b$ zove se **regresijski pravac**.

**Primjer 2**. Procijenimo oblik veze, odredimo parametre, jednadžbu regresijskog pravca, odstupanja i vrijednost funkcije cilja ako je:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 6 | 3 | 1 | -2 | -3 |

Točke (0,6), (1,3), (2,1), (3,-2), (4,-3) predočimo u koordinatnom sustavu.

Vidimo da su točke približno na pravcu, pa tražimo linearnu vezu, tj. vezu oblika $y=ax+b$. Unaprijed vidimo da je $a<0$ i da je $b\approx 6$. Da bismo lakše računali a,b iz (**), izradimo ovakvu tablicu (u posljednjem su stupci zbrojevi elemenata u odgovarajućem redku):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 6 | 3 | 1 | -2 | -3 | \|\| | 5 |
| $x_i^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | \|\| | 30 |
| $x_i y_i$ | 0 | 3 | 2 | -6 | -12 | \|\| | -13 |

Tu je jos n=5, pa iz (**) dobijemo:

$$a = \frac{5\cdot(-13) - 10\cdot 5}{5\cdot 30 - 10^2} = \frac{-115}{50} = -2.3$$

$$b = \frac{30\cdot 5 - 10\cdot(-13)}{5\cdot 30 - 10^2} = \frac{280}{50} = 5.6$$

Dakle, tražena je linearna veza: y = -2.3 x+ 5.6 (to je jednadžba regresijskog pravca).

Da bismo odredili odstupanja i vrijednost funkcije cilja, izračunajmo najprije vrijednosti funkcije f(x):=-2.3x+5.6, redom za x=0,1,2,3,4.

f(0)=5.6

f(1)=3.3

f(2)=1.0

f(3)=-1.3

f(4)=-3.6

Vidimo da su teoretski rezultati bliski eksperimentalnim podatcima, što pokazuje i tablica (u posljednjem su redku **odstupanja** $D_i := y_i - f(x_i)$ ).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 6 | 3 | 1 | -2 | -3 |
| $f(x_i)$ | 5.6 | 3.3 | 1.0 | -1.3 | -3.6 |
| $D_i$ | 0.4 | -0.3 | 0.0 | -0.7 | 0.6 |

Uočite da je **zbroj odstupanja jednak nuli** (to vrijedi općenito: $\sum D_i = 0$ ).

Minimalna vrijednost funkcije cilja jednaka je zbroju kvadrata odstupanja:

$\sum D_i^2 =$ 0.4^2 + (-0.3)^2 + 0.0^2 + (-0.7)^2+0.6^2 = 1.10 .

**Napomena**. Za veliki broj podataka provođenje metode najmanjih kvadrata može biti mukotrpno. Zato je dobro naučiti primjenu grafičkog kalkulatora ili nekog dostupnog kompjutorskog programa. Na primjer, naredba LinReg na grafičkom kalkulatoru, za podatke iz Primjera 1. daje nam (zaokruženo na tri decimale) a=3.071 i b = -1.033.

Dobivena linearna veza može nam poslužiti za procjenu (približno određivanje) vrijednosti veličine y za vrijednosti x unutar područja mjerenja (**interpolacija**) ili izvan njega (**ekstrapolacija**)

**Primjer 3**. Procijenimo vrijednost veličine x iz predhodnog primjera za x=2.5 i x=5.
Iz f(x):=-2.3x+5.6, dobijemo f(2.5)=-2.3·2.5+5.6 = -0.15.
Dakle interpolacijom smo dobili da vrijednosti x=2.5 približno odgovara vrijednost y= - 0.15 (koju, inače, nismo mjerili). Uočite da se ta vrijednost razlikuje od srednje vrijednosti u x=2 i x=3 (koja je jednaka $\frac{2+(-3)}{2}$ =-0.5).
Takodjer se dobije f(5)= -2.3·5+5.6= -5.9, pa je y=-5.9 približna vrijednost veličine y za x=5 (kažemo da smo je dobili ekstrapolacijom).

Uočimo da u Primjeru 2. dobiveni regresijski pravac prolazi podatkom (2,1). Općenito, on ne mora prolaziti ni kroz jednu točku. Jedan od razloga zašto se tu tako dogodilo jest taj što je 2 aritmetička sredina vrijednosti x veličine, a 1 aritmetička sredina vrijednosti y veličine (provjerite; to je slučaj, sredina skupa podataka općenito nije podatak). Naime, regresijski pravac uvijek prolazi točkom $(\bar{x}, \bar{y})$, gdje je

$$\bar{x} := \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad \bar{y} := \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}. \text{ Dakle } \bar{y} = a\bar{x} + b.$$

**Odredjivanje primjerene krivulje**.

U prijašnjim primjerima sve se vrtjelo oko regresijskog pravca za zadani skup podataka. Inače, ako teoretski ili neki drugi razlozi upućuju na linearnu vezu među veličinama, provodit ćemu linearnu regresiju čak ako podatci znatnije odudaraju od pravca. Sasvim su drukčije okolnosti ako unaprijed nemamo nikakvih zahtijeva na vrstu veze, već nas zanima krivulja s relativno jednostavnom jednadžbom, koja će dobro odgovarati podatcima. Na primjer, letimičan pogled na podatke iz Primjera 2 upućuju na malu zakrivljenost (na to upućuju i izračunata odstupanja $D_i$ ).

To nam nameće ideju da pokušamo tražiti najbolju kvadratnu vezu medju podatcima, tj. vezu oblika y = ax^2+bx+c.

**Primjer 4**. Metodom najmanjih kvadrata odredimo najbolju kvadratnu vezu medju podatcima iz Primjera 2.

Koeficijente a,b,c mogli bismo izračunati koristeći se formulama (*), medjutim mi ćemo se poslužiti gotovim programom. Na primjer, naredba QuadReg na grafičkom kalkulatoru daje nam (uz zaokruživanje na tri decimale)
a = 0.214
b = -3.157
c = 6.029

pa dobijemo, najbolju kvadratnu aproksimaciju
$y = 0.214x^2 - 3.157x + 6.029$
Takodjer, za vrijednost funkcije cilja dobijemo
$\sum D_i^2 = 0.457$
što je za više od 50% manje nego kod linearne regresije. Da dobivena parabola bolje prolazi zadanim točkama od regresijskog pravca vidi se i iz crteža.

**Veze koje se svode na linearne**.
U primjeni se često pojavljuju nelinearne veze medju dvjema veličinama koje se, promjenom mjerne skale, svode na linearne, na primjer:
1. $y = a \cdot x^b$,
je nelinearna veza, a svodi se na linearnu logaritmiranjem:
$\log y = b \cdot \log x + \log a$
(tu su log x i log y linearno povezane),

2. $y = a \cdot b^x$ ,
svodi se na linearnu
$\log y = \log b \cdot x + \log a$
(tu su x i log y linearno povezane),

3. $y = \dfrac{a}{b+x}$,
svodi se na linearni preko $\dfrac{1}{y} = \dfrac{b+x}{a}$, tj. $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} \cdot x + \dfrac{b}{a}$

(tu su $\dfrac{1}{y}$ i x linearno povezani), itd.

**Primjer 5**. Odredimo vezu oblika $y = a \cdot b^x$ ako je:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $y_i$ | 1.6 | 2.9 | 5.9 | 11.8 | 48.0 |

Logaritmiranjem dobijemo $\log y = \log b \cdot x + \log a$.
Nakon zamjena $Y := \log y$, $A := \log b$, $B := \log a$, dobijemo linearnu vezu
$Y = A \cdot x + B$.
Sad imamo ovakvu tablicu (vrijednosti zaokružujemo na 4 decimale).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| $Y_i$ | 0.2041 | 0.4624 | 0.7729 | 1.0719 | 1.6812 | 4.1905 |
| $x_i^2$ | 1 | 0 | 1 | 4 | 16 | 22 |
| $x_iY_i$ | -0.2041 | 0.0000 | 0.7709 | 2.1438 | 6.7250 | 9.4355 |

Tu je još n=5, pa iz formula (**) dobijemo
$$A = \frac{5 \cdot 9.4355 - 6 \cdot 4.1095}{5 \cdot 22 - 6^2} = 0.2978$$

$$B = \frac{22 \cdot 4.1095 - 6 \cdot 9.4355}{5 \cdot 22 - 6^2} = 0.4808$$

To znači da je $Y=0.2978 \cdot x+04808$

najbolja linearna veza, prema metodi najmanjih kvadrata, izmedju Y i x. Međutim, mi trebamo vezu između y i x, tj. trebaju nam parametri a,b. Njih određujemo pomoću parametara A,B. Naime (uz zaokruživanje na 3 decimale),

iz $A=\log b$, dobijemo $b=10^A=1.985$,

a iz $B=\log a$, dobijemo $a=10^B=3.025$.

Dakle,

$y=3.025 \cdot 1.985^x$,

je tražena veza između x i y. Vidimo da tu vezu možemo pisati i kao

$y=3 \cdot 2^x$

Izračunajmo, radi provjere, vrijednosti funkcije $f(x):= 3 \cdot 2^x$, redom za x = -1,0,1,2,4.

$f(-1)= 1.5$

$f(0)=3.0$

$f(1)=6.0$

$f(2)=12.0$

$f(4)=48.0$

Vidimo da se teoretski rezultati jako dobro slažu s eksperimentalnim podatcima.

Za vrijednost funkcije cilja, za $f(x):= 3 \cdot 2^x$, dobijemo

$$\sum D_i^2 = 0.07$$

**Napomena**. Zadatak smo mogli riješiti pomoću grafičkog kalkulatora naredbom *ExpReg*.

# Linearna korelacija

Korelacija je mjera linearne zavisnosti dviju serija podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Drugim riječima, ako su točke $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots (x_n,y_n)$ grupirane oko regresijskog pravca, onda govorimo da su podatci **korelirani** (**linearno korelirani**). Na osnovi toga govori se da su pripadne veličine x,y korelirane. Razina koreliranosti mjeri se **koeficijentom korelacije**

$$r := \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Vrijedi:

(1) $-1 \le r \le 1$

(2) Ako je r pozitivan onda je i koeficijent smjera regresijskog pravca pozitivan i obratno (ako je r>0 onda je a>0, a ako je r<0 onda je a<0)

(3) Što je r bliži 1 ili -1 to su veličine značajnije linearno korelirane, tj. podatci su bliže regresijskom pravcu, a što je r bliži 0, podatci su razbacaniji.

(4) Ako je r = 1 ili r = -1 onda su sve točke $(x_i,y_i)$ na regresijskom pravcu, tj. podatci su potpuno linearno zavisni.

(5) Ako je r=0 onda nema nikakve linearne zavisnosti među veličinama.

**Primjer 1**. Odredimo koeficijent korelacije za podatke

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 6 | 3 | 1 | -2 | -3 |

iz Primjera 2. u lekciji Metoda najmanjih kvadrata.

Napravimo tablicu poput one za metodu najmanjih kvadrata, samo dodajmo redak s $y_i^2$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| $y_i$ | 6 | 3 | 1 | -2 | -3 | 5 |
| $x_i^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 30 |
| $x_i y_i$ | 0 | 3 | 2 | -6 | -12 | -13 |
| $y_i^2$ | 36 | 9 | 1 | 4 | 9 | 59 |

$$r = \frac{5\cdot(-13) - 5\cdot 10}{\sqrt{5\cdot 30 - 10^2}\cdot\sqrt{5\cdot 59 - 5^2}} = \frac{-115}{30\sqrt{15}} \approx \text{-0.98976} \ \text{(na pet decimala)}$$

što je visoka razina linearne zavisnosti. Uočite da je r<0, što je u skladu s tim da je a<0 (sjetite se da je jednadžba regresijskog pravca y = -2.3x+5.6).

**Napomena**. Naredba LinReg uz podatke o parametrima također bi nam izbacila i vrijednost koeficijenta $r$.

Podatci u sljedećem primjeru su vrlo nisko linearno korelirani.

**Primjer 2**. Odredimo koeficijent korelacije za podatke

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 0 | 2 | -2 | 3 | 2 | 1 | -1 |

Unesimo podatke u kvadratnu 7x7 mrežu kao na slici. Vidimo da podatci ne prate ni jedan pravac, pa procjenjujemo da je koeficijent korelacije blizu nule.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| $y_i$ | 0 | 2 | -2 | 3 | 2 | 1 | -1 | 5 |
| $x_i^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 28 |
| $x_i y_i$ | 0 | -4 | 2 | 0 | 2 | 2 | -3 | -1 |
| $y_i^2$ | 0 | 4 | 4 | 9 | 4 | 1 | 1 | 23 |

Sad je $r = \dfrac{7 \cdot (-1) - 0 \cdot 0}{\sqrt{7 \cdot 28 - 0^2} \cdot \sqrt{7 \cdot 23 - 5^2}} \approx$ -0.042875 (na šest decimala)
što je praktički jednako nuli. Također, može se provjeriti da je pripadna suma kvadrata odstupanja za linearnu regresiju jednaka 19. 392 857 (na šest decimala), što također upućuje na vrlo slabu linearnu vezu.

Linearnu korelaciju ne treba shvatiti kao jedini oblik zavisnosti dviju veličina (serija podataka). Dvije veličine mogu biti vrlo jasno zavisne, a da im je koeficijent (linearne) korelacije jednak nuli; to samo znači da su one linearno nekorelirane. To pokazuje sljedeći primjer.

**Primjer 3**. Odredimo koeficijent korelacije za podatke

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Ucrtavanjem podataka vidimo da oni ne prate ni jedan pravac. Kako je $\sum x_i = 0$ i $\sum x_i y_i = 0$, vidimo da je r=0. Dakle, podaci su linearno nekorelirani. S druge strane, oni su zavisni. Naime, povezani su relacijom y = x^2 (točke su na paraboli).

Često se postavlja pitanje koji koeficijenti znače visoku, koji nisku, a koji srednju linearnu koreliranost. Na to pitanje nema jasnog odgovora. On ovisi i o znanstvenom području na koje se primjenjuje, a unutar znanstvenog područja na konkretan problem koji se razmatra. Na primjer, u psihologijskim istraživanjima, u pravilu, čim je $r>0.5$ smatra se da je koreliranost značajna, a ako je $r>0.8$ vrlo značajna, dok u preciznim fizikalnim ili kemijskim istraživanjem često niti $r=0.9$ ne upućuje na značajnu koreliranost.

**Primjer 4**. U sljedećoj tablici su u prvom redku bodovi prvih 9 najboljih rezultata postignutih iz kolokvija na Matematici 1, a u drugoj su odgovarajući bodovi iz Matematike 2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 103 | 93 | 84 | 81 | 81 | 80 | 79 | 79 | 78 |
| $y_i$ | 99 | 73 | 82 | 85 | 77 | 79 | 73 | 55 | 83 |

Odredimo regresijski pravac i koeficijent korelacije. Komentirajmo rezultate.

Da dobijemo predodžbu, podatke predočavamo u koordinatnom sustavu.

Predviđamo pozitivan koeficijent korelacije jer podatci prate glavnu dijagonalu (ali ne visok, jer podatci variraju). Procijenjujemo da je koeficijent regresijskog pravca nešto manji od 1. Zadatak se može izraditi prema uzoru na prijašnje primjere. Mi ćemo se poslužiti grafičkim kalkulatorom, koji ima gotov program za metodu najmanjih kvadrata i linearnu korelaciju. Dobijemo, zaokružujući na dvije decimale,
$y= 0.79x+12.29$ i $r = 0.56$.
**Komentar**. Dobili smo $a=0.79<1$, što je u skladu s činjenicom da su rezultati Matematike 2, nešto niži od rezultata Matematike 1. Koeficijent korelacije nije blizu 1, ali je veći od 0.5, što, pri ovakvoj problematici upućuje na nezanemarivu korelaciju.
Suma kvadrata odstupanja jednaka je, na četiri decimale, 763.7222 što izgleda veliko, ali taj rezultat treba tumačiti tako da je prosječno odstupanje oko 9 bodova, što i nije tako veliko.

**Zašto nas je u ovom primjeru zanimala linearna korelacija među rezultatima?**
Zato što intuitivno prihvaćamo da će rezultati iz Matematike 2 biti približno proporcionalni onima iz Matematike 1, tj. da odprilike jednake razine usvajanja nekog znanja uvjetuju odprilike jednake razine usvajanja novog znanja koje počiva na starom. Naravno da to ne vrijedi za svakog konkretnog pojedinca, već u prosjeku.

**Obrazloženje formule za koeficijent korelacije**.

Seriju od n podataka možemo shvatiti kao vektor u n-dimenzionalnom prostoru. Sjetimo se što za vektore znači da su linearno zavisni (linearno korelirani).

Slike upućuju na to da su dva vektora linearno zavisna (kolinearna, proporcionalna) ako i samo ako je kut među njima nul-kut ili ispruženi kut (od 180 stupnjeva). Što je kut bliže 0 ili 180, to vektore možemo smatrati više linearno koreliranim, a što je bliže pravom kut, tj. 90 stupnjeva, manje koreliranim. Za kut $\varphi$ među vektorima $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ i $\mathbf{v}= (v_1,v_2,...,v_n)$ vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n}{\sqrt{\sum u_i^2} \cdot \sqrt{\sum v_i^2}}$$

(izraz u brojniku je **skalarni produkt** vektora, a u nazivniku su **norme-duljine** vektora).

Vrijedi:

(1) $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$

(2) Ako je $\cos\varphi > 0$ onda je kut među pravcima šiljast, a ako je $\cos\varphi < 0$ onda je taj kut tup

(3) Što je $\cos\varphi$ bliži 1 ili -1 vektori su sve bliže tome da budu proporcionalni (linearno zavisni), a što je $\cos\varphi$ bliži 0, vektori su to manje kolinearni.

(4) Ako je $\cos\varphi = 1$ ili $\cos\varphi = -1$ onda su vektori linearno zavisni; tada je kut od 0 stupnjeva i **v** = c· **u**, za c>0, ili je kut od 180 stupnjeva i **v** = c· **u**, za c<0.

(5) Ako je $\cos\varphi = 0$ onda su vektori okomiti pa su najudaljeniji od kolinearnosti.

Dakle, $\cos\varphi$ ima svojstva analogna onima koje ima *r*. To znači da je $\cos\varphi$ koeficijent kolinernosti dvaju vektora (slično kako je r koeficijent linearne korelacije dviju serija podataka).
Da bismo razmatranje s vektorima primijenili na razmatranje serija podataka, treba umjesto serija $x_1, x_2, ..., x_n$ i $y_1, y_2, ..., y_n$ gledati pomaknute serije
$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, ..., x_n - \bar{x}$ i $y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, ..., y_n - \bar{y}$
gdje su $\bar{x}$ i $\bar{y}$ aritmetičke sredine podataka.
Naime, ako od tražene linearne veze
y=ax+b
oduzmemo istinitu relaciju
$\bar{y}$=a$\bar{x}$+b,
dobit ćemo proporcionalnost
y- $\bar{y}$ =a (x-$\bar{x}$).
Ako bi zadane točke zaista zadovoljavale tu jednadžbu, bilo bi
$y_1$-$\bar{y}$=a($x_1$-$\bar{x}$)
$y_2$-$\bar{y}$=a($x_2$-$\bar{x}$)
.
$y_n$-$\bar{y}$=a($x_n$-$\bar{x}$).
Međutim, to vrijedi samo približno, a za mjeru te približnosti razumno je uzeti kosinus kuta među vektorima **u**:=($x_1$-$\bar{x}$, $x_2$-$\bar{x}$,..., $x_n$-$\bar{x}$) i **v:**=( $y_1$-$\bar{y}$, $y_2$-$\bar{y}$,..., $y_n$-$\bar{y}$).
Zato je prirodno koeficijent korelacije definirati kao

$$r := \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Na prvi pogled, to nije ona formula koju smo napisali na početku, međutim, dobije se:

$$r := \frac{(\sum x_i y_i) - \bar{x}(\sum y_i) - \bar{y}(\sum x_i) + n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2) - 2\bar{x}(\sum x_i) + n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{(\sum y_i^2) - 2\bar{y}(\sum y_i) + n\bar{y}^2}}$$

$$= \frac{(n\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i) - (\sum y_i)(\sum x_i) + (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n\sum x_i^2 - 2(\sum x_i)(\sum x_i) + (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n\sum y_i^2 - 2(\sum y_i)(\sum y_i) + (\sum y_i)^2}}$$

$$= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

kako smo i na početku imali.

# Interpolacija i aproksimacija (skica)

## Interpolacija.

U **metodi najmanjih kvadrata** pošli smo od dviju zavisnih veličina *x* i *y*, odnosno od *n* vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ veličine *x* i korespondirajućih *n* vrijednosti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ veličine *y*.
Te dvije serije od po *n* podataka možemo shvatiti kao *n* uređenih parova:
$(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ... $(x_n,y_n)$, koje geometrijski možemo predočiti kao *n* točaka ravnine.
Tada, od svih krivulja iz fiksirane familije krivulja, biramo onu koja *najbolje prolazi oko ovih točaka*.
Familija krivulja zadana je parametrima. Tako **dvoparametarska familija krivulja** može biti zadana kao skup grafova funkcija f(x,a,b), gdje su *a*, *b* parametri, tj. kao skup krivulja s jednadžbama y = f(x,a,b). Na primjer, skup svih pravaca u ravnini (koji nisu usporedni s y-osi), čini dvoparametarsku familiju krivulja s jednadžbama y = ax+b, gdje parametri *a*,*b* mogu biti bilo koja dva realna broja; dakle, u ovom je slučaju f(x,a,b):=ax+b, za *a*,*b* iz **R**.
Vidjeli smo kako se metodom najmanjih kvadrata odabiru parametri *a*,*b* tako da pripadna krivulja *najmanje odstupa* od mjerenih podataka.
Treba uočiti da rezultirajuća krivulja, općenito, ne prolazi zadanim točkama (u pravilu, ona **ne prolazi niti jednom od tih točaka**).
Za razliku od toga, interpolacijom rješavamo problem odabiranja krivulje iz zadane familije krivulja **koja prolazi svim točkama dobivenim mjerenjem**.

## Interpolacijski polinom.

Uočimo da su u rezultatima mjerenja $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ... $(x_n,y_n)$ prve koordinate međusobno različite, a da druge mogu, ali ne moraju biti međusobno različite.
Kroz dvije takve točke u ravnini prolazi pravac s jednadžbom y=ax+b, i ako te dvije točke nemaju jednake druge koordinate, taj je pravac graf polinoma 1. stupnja, tj. $a\neq 0$.

Kroz tri takve točke općenito prolazi parabola s jednadžbom $y=ax^2+bx+c$, tj. graf polinoma 2. stupnja, osim ako te tri točke nisu na jednom pravcu.

Općenito, kroz *n* takvih točaka $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ... $(x_n,y_n)$ prolazi graf polinoma stupnja (n-1), osim ako one nisu u nekom **posebnom** (**specijalnom**) **položaju**, kada je stupanj tog polinoma manji od (n-1). Bilo kako bilo taj je polinom jednoznačno određen i zove se **interpolacijski polinom**.
Ima više načina zapisa i određivanja tog polinoma iz zadanih točaka, a najpoznatiji su onaj koji se pripisuje Lagrangeu i onaj koje se pripisuje Newtonu: **Lagrangeov interpolacijski polinom** i **Newtonov interpolacijski polinom**.
Slično kao kod metode najmanjih kvadrata, dobiveni interpolacijski polinom može poslužiti za **procjenu** vrijednosti veličine *y*, za neku vrijednost veličine *x* unutar ranga podataka (to se obično zove **interpolacija**) ili izvan (obično se naziva **ekstrapolacija**).

**Primjer 1**. Mjerenjem smo dobili podatke

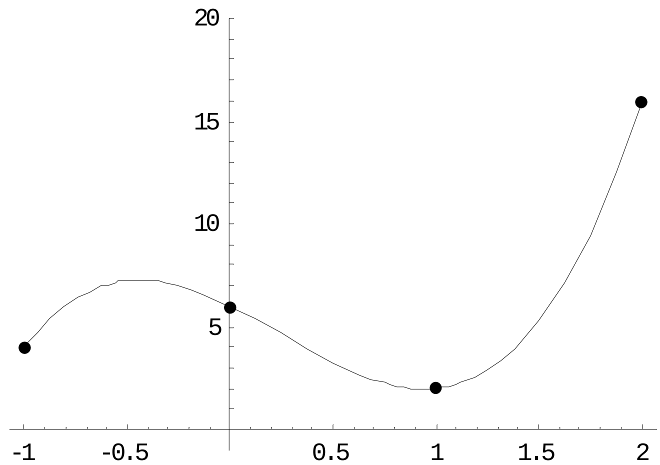
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 6 | 2 | 16 |

(i) Odredimo interpolacijski polinom kojemu graf prolazi tim točkama.
(ii) Procijenimo vrijednost veličine x, ako je vrijednost veličine x jednaka 0.5, odnosno 1.5 (to su interpolacije)
(iii) Procijenimo vrijednost veličine x, ako je vrijednost veličine x jednaka 3 (to je, tzv. ekstrapolacija)

(i) Koristeći se Excelom (iako je za ovakve račune precizniji programski paket Mathematica) dobijemo da je pripadni interpolacijski polinom:
$f(x)= 4x^3-3x^2-5x+6$.
Zaista, nije teško provjeriti da je $f(-1)=4$, $f(0)=6$, $f(1)=2$ i $f(2) = 16$.

(ii) $f(0.5) = 0.5 - 0.75 - 2.5 +6 = 3.75$,
pa je tu $y \approx 3.75$.
$f(1.5) = 13.5 - 6.75 - 7.5 +6 = 5.25$,
pa procjenjujemo da je $y \approx 5.25$.

(iii) $f(3) = 108 - 27 - 15 +6 = 72$
pa procjenjujemo $y \approx 72$.
Te se procjene mogu izravno dobiti i u Excelu.
Rezultati su skicirani na sljedećoj slici:



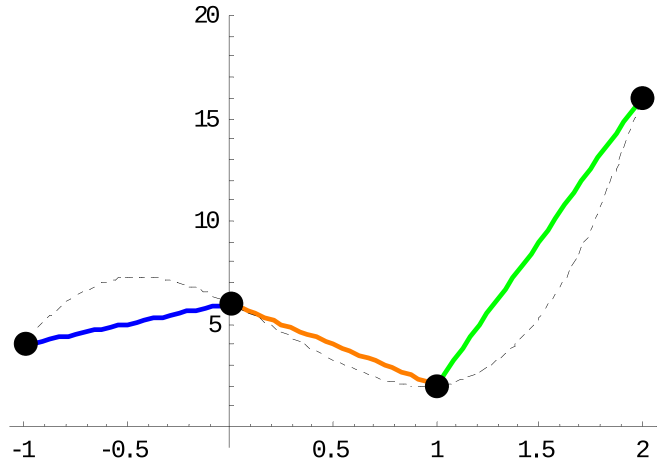

## **Interpolacija pomoću spline-a**.

Uz dobra svojstva, interpolacijski polinom ima i nedostatke. Jedan od njih je taj što se povećavanjem broja mjerenja, stupanj polinoma, u pravilu povećava.
To se, metodom spline-a, razrješava tako da umjesto jednog polinoma velikog stupnja, koristimo više polinoma nižeg stupnja (između prve i druge točke prvi, između druge i trće točke drugi itd.). **Linearni spline** (**linearna aproksimacija)** dobiva se tako da se svake dvije susjedne točke spoje ravnom crtom, **kvadratni spline** tako da svake dvije susjedne točke spojimo dijelom parabole, a **kubni spline** da svake dvije susjedne točke spojimo dijelom grafa polinoma 3. stupnja.

## Linearna aproksimacija – linearni spline.

**Primjer 2**. Podatke iz Primjera 1. linearno interpolirajmo te napravimo procjene (ii) i (iii).

točke (-1,4) i (0,6) povezujemo dijelom kubne funkcije s jednadžbom $y = 2x+6$,
točke (0,6) i (1,2) dijelom pravca s jednadžbom $y = -4x +6$,
a točke (1,2) i (2,16) dijelom pravca s jednadžbom $y = 14x – 12$.
Zato imamo sljedeće procjene:
za $x=0.5$ je $y \approx -2 +6 =4$
za $x=1.5$ je $y \approx 21-12 = 9$
za $x=3$ je $y \approx 30$ (nastavljamo s posljednjom jednadžbom).
Rješenja su ilustrirana crtežom.Uspoređivanjem s rješenjima pomoću interpolacijskog polinoma uočavamo i sličnosti razlike:




## Kubni spline.

To je najčešći spline u primjenama. Za to postoje dva glavna razloga. Prvi je što je **stupanj tri** relativno nizak, pa računi nisu komplicirani. Drugi je što je taj stupanj *dovoljno visok*. Naime, graf polinoma trećeg stupnja u pravilu ima područja rasta i pada, lokalni minimum i lokalni maksimum te točku infleksije (sl. 5). Ta važna svojstva grafa odgovaraju važnim karakteristikama opisa inženjerskog procesa, odnosno veze među dvjema zavisnim varijablama:
kad se povećavanjem vrijednosti jedne veličine vrijednost druge povećava, odnosno smanjuje;
vrijednost prve veličine pri kojoj druga postiže najmanju, odnosno najveću vrijednost (u nekom intervalu);
te vrijednost prve veličine gdje vrijednost druge veličine prelazi iz ubrzanog rasta u usporeni (usporenog rasta u ubrzani, ubrzanog pada u usporeni ili usporenog pada u ubrzani).

Općenito, za *n* zadanih točaka $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ... $(x_n,y_n)$ računamo n kubnih funkcija $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

1. Prva kubna funkcija prolazi kroz prvu i drugu točku, druga kroz drugu i treću, itd., dok posljednja funkcija prolazi kroz pretposljednju i posljednju točku. To znači da će, ukupno gledano, kubni spline prolaziti kroz sve točke.
2. Uvjet da susjedne kubne funkcije u zajedničkoj točki imaju jednake prve derivacije – to znači da postoji brzina promjene u točkama interpolacije, odnosno da postoji tangenta na graf kubnog spline-a
3. Uvjet da susjedne kubne funkcije u zajedničkoj točki imaju jednake druge derivacije – to znači da postoji akceleracije u točkama interpolacije
4. Uvjet koji omogućuje da spline bude jedinstveno određen – ako nema dodatnih infomacija smatramo da su to tzv. prirodni uvjeti:
   $f_1''(x_1)=0$ i $f_n''(x_n)=0$

**Primjer 3**. Podatke iz Primjera 1. po dijelovima kubno interpolirajmo te napravimo procjene (ii) i (iii).

Korištenjem programskog paketa Mathematica dobivamo sljedeći rezultat:
točke (-1,4) i (0,6) povezujemo dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_1(x) = -\frac{14}{5}x^3 - \frac{42}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 6,$$

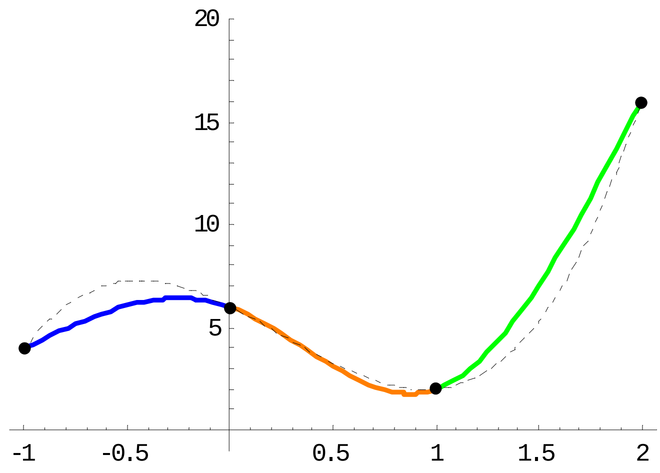
točke (0,6) i (1,2) dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_2(x) = 8x^3 - \frac{42}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 6,$$

a točke (1,2) i (2,16) dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_3(x) = -\frac{26}{5}x^3 + \frac{156}{5}x^2 - \frac{216}{5}x + \frac{96}{5}.$$

Zato imamo sljedeće procjene:
za x=0.5 je y ≈ $f_2(0.5)$ = 3.1
za x=1.5 je y ≈ $f_3(1.5)$ = 7.05
za x=3 je y ≈ 30 (nastavljamo s posljednjom jednadžbom).
Rješenja su ilustrirana crtežom. Uspoređivanjem s rješenjima pomoću interpolacijskog polinoma uočavamo i sličnosti razlike:



# Približno rješavanje sustava jednadžba (skica)

## 1. Uvod

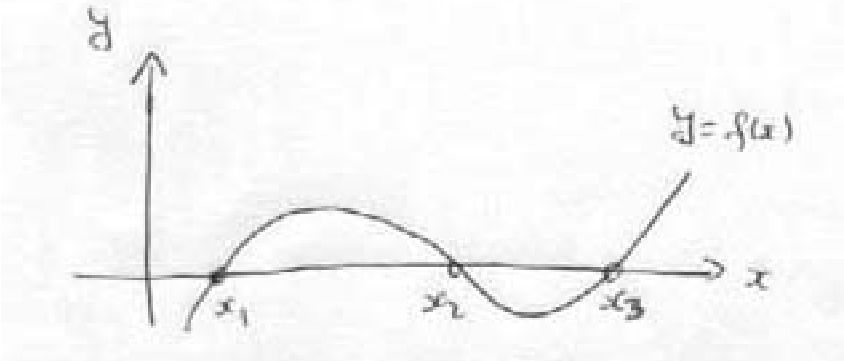
Većina se inženjerskih problema svodi na rješavanje jednažba: s jednom ili više nepoznanica, sustava jednadžba, matričnih jednadžba, diferencijalnih jednadžba, integralnih jednadžba itd. U pravilu, takve se jednadžbe ne mogu egzaktno riješiti. Zato se postavlja problem približnog rješavanja jednadžba. Ovdje ćemo skicirati Newtonovu metodu (Ralphson-Newtonovu metodu) za približno rješavanje jednadžba s jednom nepoznanicom i sustava jednadžba.

Jednadžba s jednom nepoznanicom je jednadžba oblika:
$f(x)=0$,
gdje je $f$ funkcija jedne varijable. Tu se ograničavamo na slučaj kad je $f$ realna funkcija realne varijable definirana na nekom intervalu realnih brojeva, koja je **neprekinuta** na tom intervalu (tj. graf joj je neprekinuta crta), štoviše, u pravilu mislimo na **elementarne funkcije** $f$ (tj. na funkcije koje se mogu zadati s konačno mnogo operacija na kalkulatoru), posebice te funkcije imaju derivacije bilo kojeg reda.

**Rješenje jednadžbe** je bilo koji realni broj $x^*$ takav da je $f(x^*)=0$.
Može se dogoditi da jednadžba nema rješenja, da ima konačno mnogo rješenja, ili da ima beskonačno mnogo rješenja.

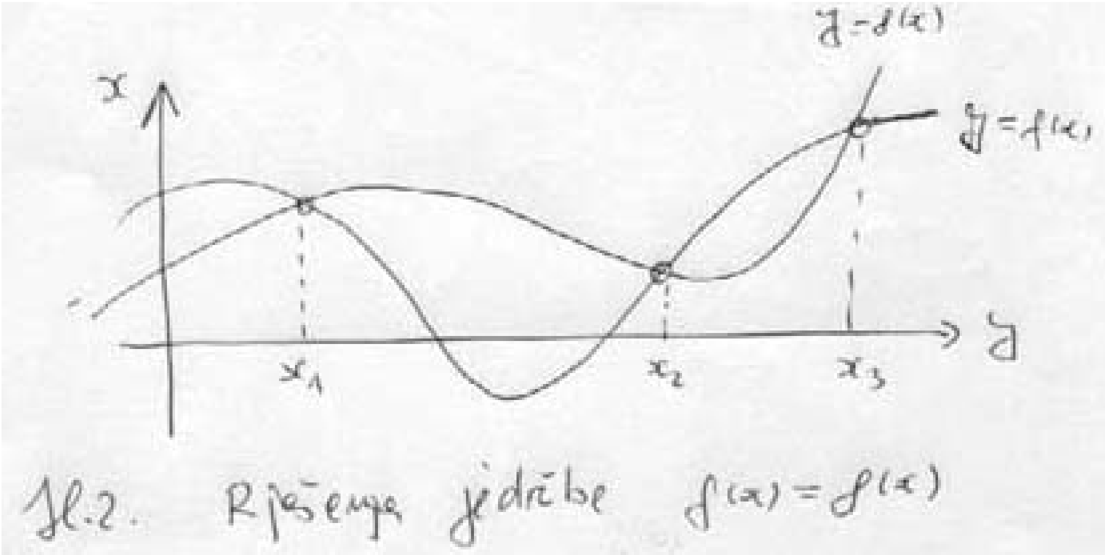
**Primjer 1**. (i) Jednadžba $x^2+1=0$ nema (realnih) rješenja.
(ii) Jednadžba $x^2-1=0$ ima dva rješenja: $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
(iii) Jednadžba $\sin x = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja: realne brojeve $k\pi$, gdje k prolazi skupom cijelih brojeva.

**Grafička interpretacija rješenja**. Realna rješenja jednadžbe $f(x)=0$ jesu upravo oni realni brojevi u kojima graf funkcije $f$ siječe x-os (sl.1).

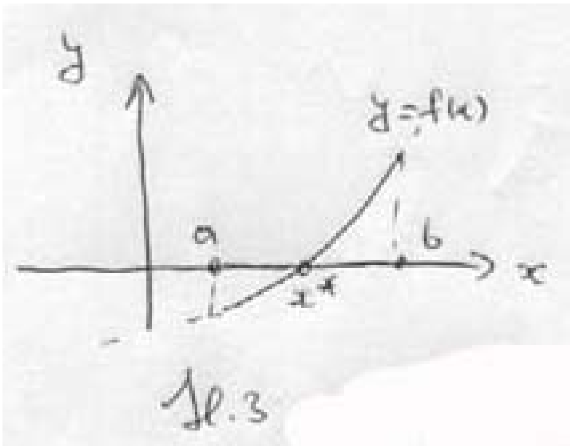


Sl.1. Rješenja jednadžbe f(x)=0

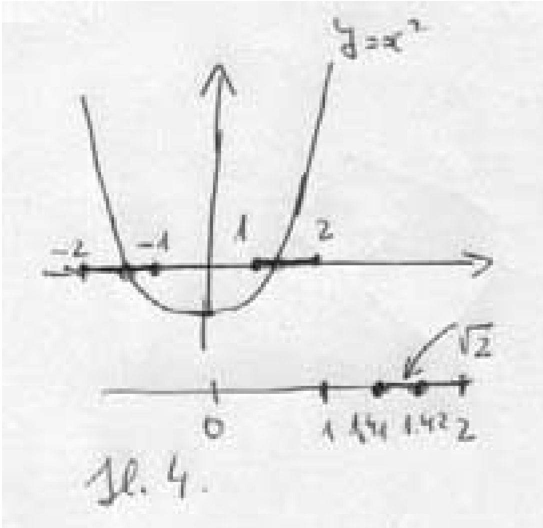
**Varijanta**: Realna rješenja jednadžbe $f(x)=g(x)$ jest skup prvih koordionata točaka u kojima se sijeku grafovi funkcija $f$ i $g$ (sl.2.).



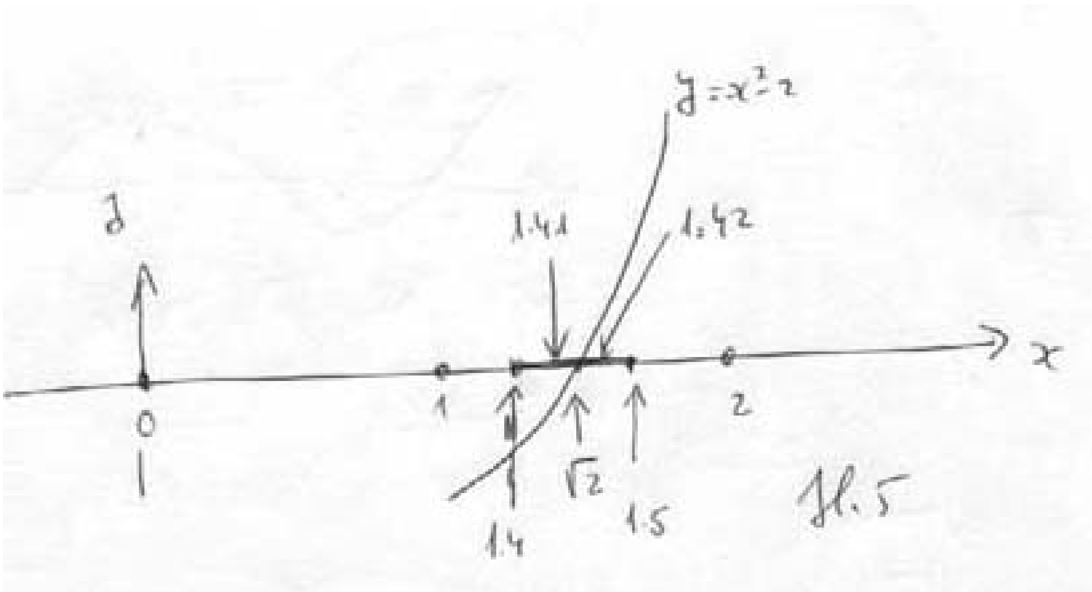

**Interval izoliranosti rješenja**. To je svaki interval [a,b] unutar kojega ima točno jedno rješenje jednadžbe (sl.3.).




**Primjer 2**. Interval [-2,-1] je interval izoliranosti rješenja $-\sqrt{2}$ jednadžbe $x^2$-2=0, a interval [1,2] je interval izoliranosti rješenja $\sqrt{2}$ te iste jednadžbe (sl.4.). Naravno da ima i užih intervala izoliranosti od tih. Na primjer, [1.41, 1.42] takodjer je interval izoliranosti rješenja $\sqrt{2}$ jer je $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.




**Približno rješenje jednadžbe f(x)=0**. To je svaki broj $\alpha$ za koji vrijedi $f(\alpha) \approx 0$.
Na primjer, 1.4 je približno rješenje jednadžbe $x^2-2=0$. Naime,
$1.4^2-2= 1.96-2 = - 0.04 \approx 0$.
Kažemo da je 1.4 **aproksimacija** rješenja $\sqrt{2}$ te jednadžbe jer je $\sqrt{2} \approx 1.41$.
Takodjer, 1.41 je približno rješenje te jednadžbe, jer je
$1.41^2-2= 1.9881-2 = - 0.0119 \approx 0$.
Vidimo da je 1.41 **bolja aproksimacija** te jednadžbe od aproksimacije 1.4 ; to se očituje time što je 1.41 bliže broju $\sqrt{2}$ nego što je 1.4 (sl.5.).

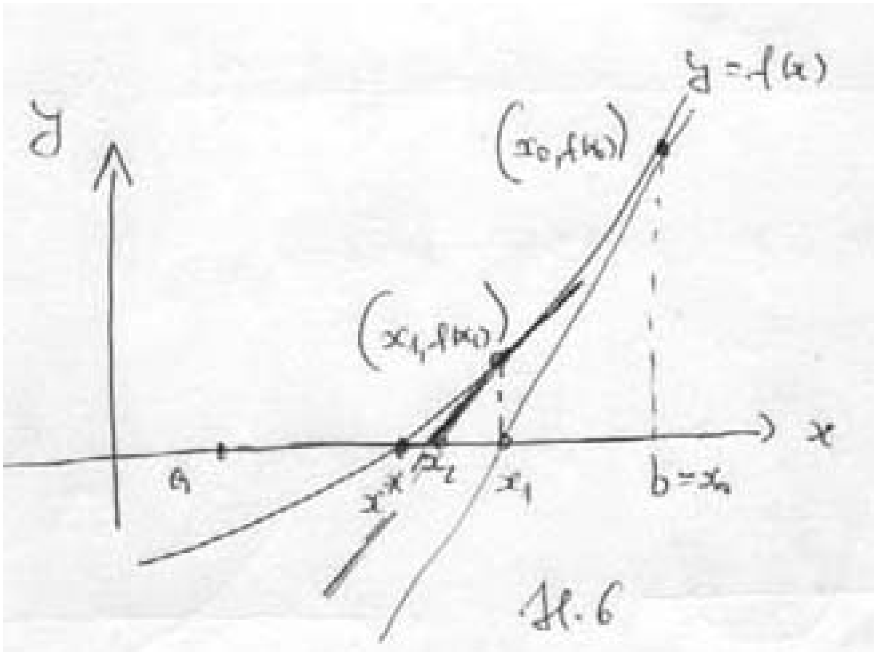



**Pogrješka aproksimacije**. To je udaljenost $\varepsilon$ stvarnog rješenja $x^*$ i približnog rješenja (aproksimacije) $\alpha$, dakle:
$\varepsilon := |x^* - \alpha|$.
U pravilu ne znamo točno pogrješku aproksimacije, jer bismo onda znali i rješenje. Zato je potrebno znati neku ocjenu za pogrješku. Ta se ocjena zove **ocjena grješke**. Na primjer, za aproksimaciju 1.4 od $\sqrt{2}$, vrijedi da je $\varepsilon < 0.1$ (to je ocjena grješke), jer je
$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

**Metoda približnog rješavanja jednadžba**. To je svaka metoda kojom se startajući od **nulte aproksimacije** $x_0$, unutar intervala izoliranosti rješenja $x^*$, redom dobivaju sve bolje aproksimacije $x_1$, $x_2$,... koje se približavaju (konvergiraju) pravom rješenju $x^*$.

## 2. Metoda tangente (Newtonova metoda) za približno rješavanje jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Ta se metoda geometrijski zasniva na povlačenju tangente na graf funkcije *f* koja sudjeluje u jednadžbi f(x)=0 (sl.6.).



sl. 6

Analitički, nakon biranja nulte aproksimacije ($x_0$=a ili $x_0$=b, za interval izoliranosti [a,b]), dobijemo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$ i, općenito,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

**Jedan pogled na formulu za metodu tangente**. Gornju formulu možemo izvesti tako da anlitički odredimo presjek tangente na graf funkcije f u točki $(x_0,f(x_0))$ s osi x. Tako dobijemo $x_1$ u ovisnosti o $x_0$, a onda analogno napišemo opću formulu. Taj pogled nije previše pogodan za popćenje na slučaj sustava jednadžba (iako je i to moguće). Zgodnije je razmišljati da smo, funkciju f zamijenili njenom linearnom aproksimacijom oko $x_0$, tj.
$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ za $x \approx x_0$,
a potom umjesto (u pravilu komplicirane) jednadžbe f(x)=0, gledati linearnu jednadžbu

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$,
u kojoj smo f zamijenili njenom linearnom aproksimacijom. Linearnu jednadžbu klako je riješiti; označimo njeno rješenje s $x_1$, dakle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

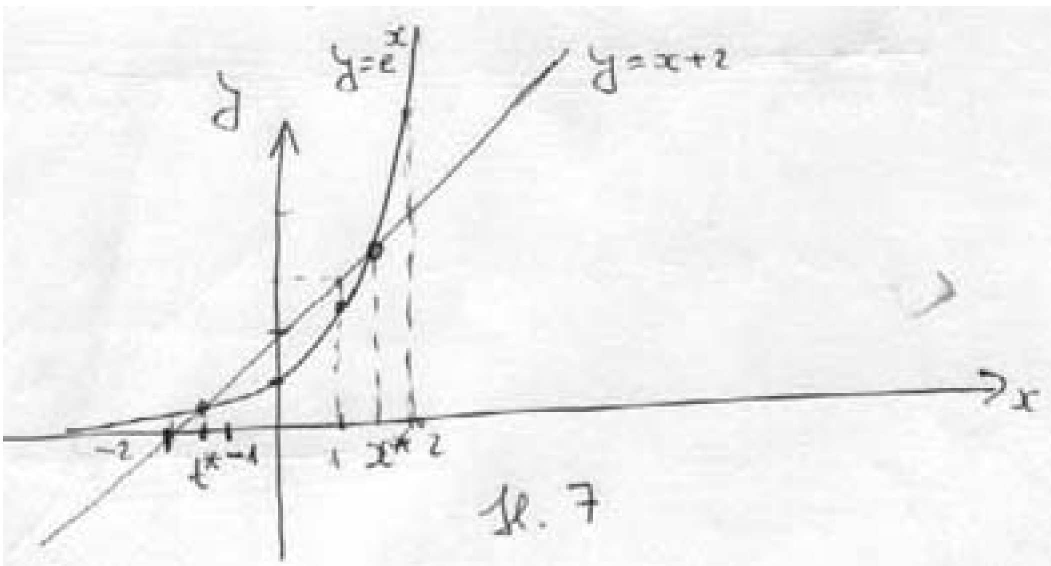
kako smo već napisali. Naravno $x_1$ nije ujedno i rješenje jednadžbe $f(x)=0$, već samo približno (**prva aproksimacija**), a ako pogodno izaberemo nultu, onda će prva aproksimacija biti bolja od druge, treća bolja od druge itd.

**Primjer 3**. Metodom tangente približno riješimo jednadžbu $e^x = x + 2$.

**1. korak**. Izolacija rješenja.
Provodimo je **grafičkom** i **analitičkom metodom**.
**Grafička metoda**: nacrtamo u istom koordinatnom sustavu krivulje s jednadžbama:
$y=e^x$ i $y = x+2$.
Vidimo da se te krivulje sijeku u dvjema točkama, zato jednadžba ima dva rješenja (sl.7.). Prvo je rješenje između –2 i –1, a drugo između 1 i 2.

Analitička metoda

| x | $e^x-x-2$ |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | -0.28 |
| 2 | 3.39 |
| -1 | -0.6 |
| -2 | 0.13 |




S objema metodama dolazimo do istog zaključka o broju rješenja.

**2. korak**. Računanje 1. i 2. derivacije funkcije $f(x) := e^x-x-2$.
$f'(x) = e^x-1$ ; $f''(x) = e^x$.

**3. korak**. Provjeravanje monotonosti funkcija f', f'' na dobivenim intervalima, potom njihovim neponištavanjem na tim intervalima.
Polazimo od druge derivacije (jer pomoću nje lakše možemo ocijeniti prvu; iako u ovom primjeru to nije potrebno jer sve teče glatko).
Očito je f'' rastuća i pozitivna svugdje, posebice na tim intervalima.
f' je također rastuća (što vidimo izravno, ali i iz toga što je f'' svugdje pozitivna);

Dalje: $f'(x) > 0$, za sve x iz [1,2] (što je zbog rasta dovoljno provjeriti u x=1)
$f'(x) < 0$, za sve x iz [-2,-1] (što je zbog rasta dovoljo provjeriti u x= -1).

**4. korak**. Određivanje minimuma apsolutnih vrijednosti prve derivacije te maksimuma apsolutnih vrijednosti 2. derivacije na tim intervalima. Točnije:
$m<\min|f'(x)|$, za x u pojedinom intervalu
$M>\max|f''(x)|$, za x u pojedinom intervalu.
(ove smo znakove izabrali jer će nam se *m* nalaziti u nazivniku određene formule, a *M* u brojniku te formule).
Moramo posebno raditi na svakom od intervala. Iz koraka 3. znademo da su f' i f'' monotone na tim intervalima i da na njima ne mijenjaju predznak. To nam omogućuje da m,M izaberemo računajući samo vrijednosti funkcija u rubovima (inače tako nebismo smjeli).
Interval [1,2]. Skicirajmo grafove od f' i f''.
Zaključujemo:
$\min|f'(x)| = e-1$, pa možemo uzeti m=1.7
(približni smo rezultat dobili
zaokruživanjem na niže, odnosno odbacivanjem znamenaka).
$\max|f''(x)|=e^2$, pa možemo uzeti M=7.4
(zaokruživanje na više).

Interval [-2,-1]. Opet skicirajmo grafove.
Zaključujemo:
$\min|f'(x)| =1-e^{-1}$, pa možemo uzeti m=0.6

$\max|f''(x)|=e^{-1}$, pa možemo uzeti M= 0.4.

**5. korak**. Određivanje uvjeta za zadanu točnost.
Iz formule $|x^*-x_{n+1}|<\frac{f^2(x_n)}{2}\cdot\frac{M}{m^3}$
i zahtjeva u zadatku: $|x^*-x_{n+1}|<0.001$,
vidimo da je dovoljno uzeti da bude: $\frac{f^2(x_n)}{2}\cdot\frac{M}{m^3}<0.001$, odnosno

$$f^2(x_n)<\frac{2m^3}{M}\cdot 0.001$$

Taj uvjet treba posebno računati za svaki od intervala.

Interval [1,2].
Dobijemo:
$f^2(x_n)<0.003$ (uzimamo manji broj, odnosno, zaokružujemo na niže).

Interval [-2,-1]
Dobijemo:
$f^2(x_n)< 0.0037$

Smisao ove ocjene je sljedeći: kad dođemo da takvog n za koji će to vrijediti, onda stajemo, a za dobru približnu vrijednost uzimamo $x_{n+1}$.

**6. korak**. Biranje nulte aproksimacije $x_0$.
Biramo je tako da bude rubna točka intervala uz uvjet $f(x_0)f''(x_0)>0$.
Treba posebno birati za svaki od intervala.

Interval [1,2].
Dobijemo
$x_0=2$

Interval [-2,-1]
Dobijemo
$x_0=-2$

**7. korak**. Računanje aproksimacija pomoću formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,

tj. pomoću formule: $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$

I to se provodi posebno za svaki interval.

Interval [1,2].

$x_1 = 2 - \frac{e^2 - 2 - 2}{e^2 - 1} = 1.46955$

$x_2 = 1.46955 - \frac{e^{1.46955} - 1.46955 - 2}{e^{1.46955} - 1} = 1.2073$

$x_3 = 1.1488$

$x_4 = 1.1462$

(Rješenje zadovoljava tražene uvjete, jer je $(e^{1.1488}-1.1488-2)^2 < 0.000032 < 0.003$).

Interval [-2,-1].

$x_1 = -2 - \frac{e^{-2} - (-2) - 2}{e^{-2} - 1} = -1.84348$

$x_2 = -1.8414$

(Rješenje zadovoljava tražene uvjete.)

# 3. Sustav dviju jednadžba s dvjema nepoznanicama

Umjesto rješavanja jednadžbe s jednom nepoznanicom u praksi često dolaze sustavi više jednadžba s više nepoznanica. Na primjer:

$f(x,y)=0$ (1)

$g(x,y)=0$,

gdje su f,g funkcije dviju nezavisnih varijabla x,y je sustav dviju jednadžba s dvjema nepoznanicama. Ako je $f(x,y):=x^2+y^2-10$ i $g(x,y):=2x-y+1$, onda sustav postaje:

$x^2+y^2-10 = 0$ (2)

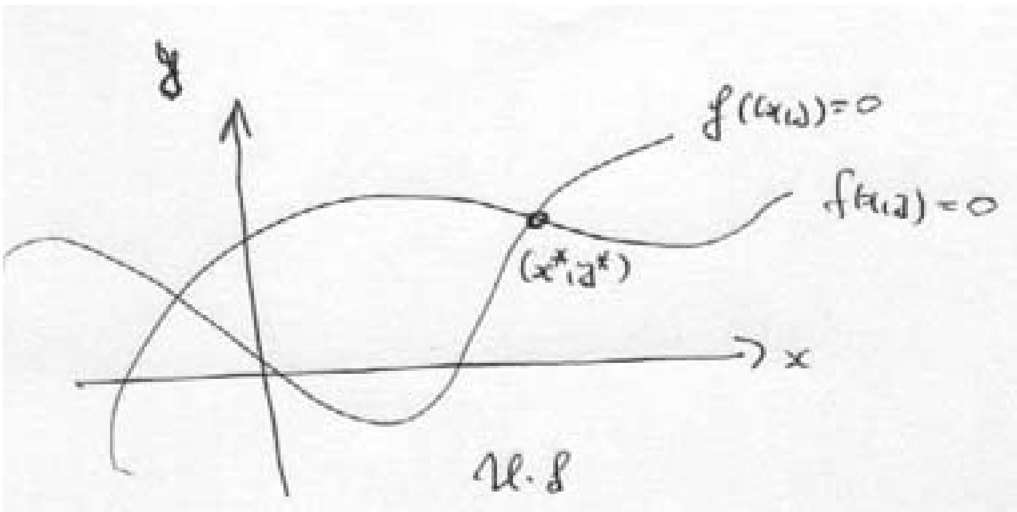
$2x-y+1 = 0$.

**Rješenje sustava** (1) je svaki uređeni par realnih brojeva $(x^*,y^*)$ za koji vrijedi $f(x^*,y^*)=0$ i $g(x^*,y^*)=0$. Na primjer:

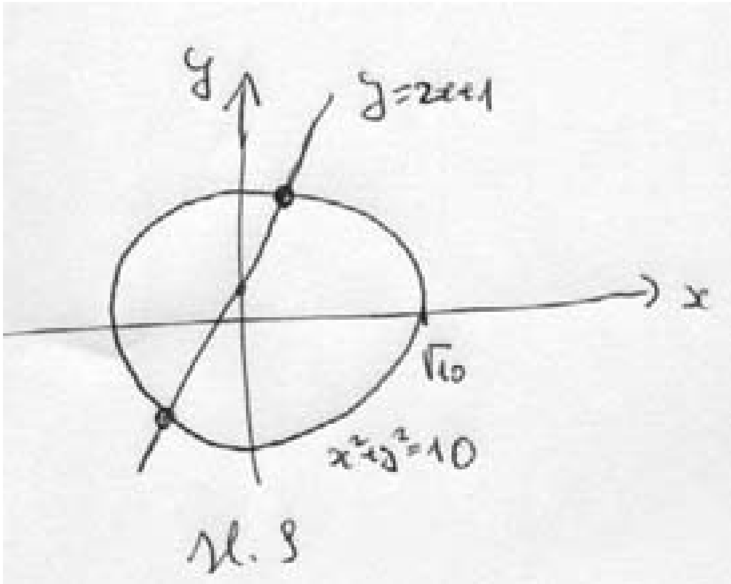
(1,3) **je rješenje** sustava (2), jer je $1^2+3^2-10 = 0$ i $2\cdot1-3+1 = 0$.

(3,1) **nije rješenje** sustava (2), jer je $3^2+1^2-10 = 0$, ali $2\cdot3-1+1 = 6 \neq 0$.

**Geometrijska interpretacija rješenja** sustava (1): to je presjek odgovarajućih krivulja zadanih jednadžbama f(x,y)=0, odnosno g(x,y)=0 (sl.8.).

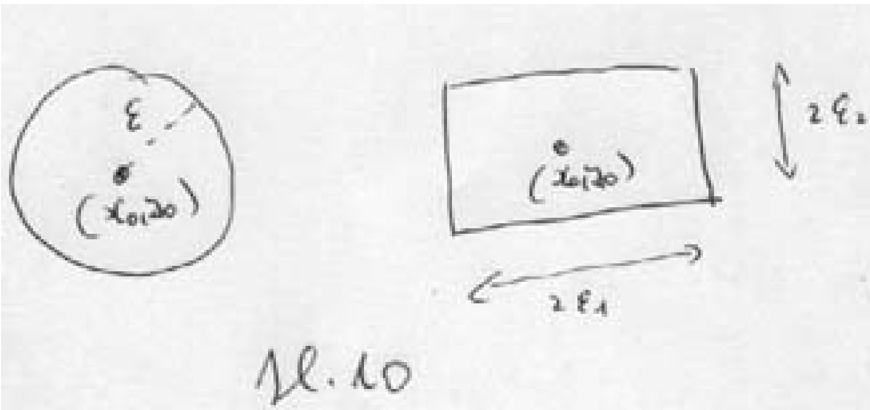


Na primjer, za sustav (2), to je presjek kružnice i pravca (sl. 9). Vidimo da sustav ima dva rješenja.




**Približno rješenje sustava** (1): to je svaki uređeni par realnih brojeva $(x_0,y_0)$ za koji vrijedi $f(x_0,y_0) \approx 0$ i $g(x^*,y^*) \approx 0$. Na primjer:
(-2,-2.5) **je približno rješenje** sustava (2), jer je $(-2)^2+(-2.5)^2-10 = 0.25 \approx 0$ i $2\cdot(-2)-(-2.5)+1 = -0.5 \approx 0$.

**Područje izoliranosti rješenja** $(x^*,y^*)$ **sustava** (1): to je svako područje u ravnini unutar kojega se nalazi $(x^*,y^*)$, ali ni jedno drugo rješenje tog sustava. To je obično krug ili pravokutnik (sl. 10). Svaki uređeni par $(x_0,y_0)$ unutar područja izoliranosti smatramo približnim rješenjem i u pravilu ga možemo uzeti za nultu aproksimaciju.




**Napomena o složenijim sustavima**. Analogno je sa sustavima od više jednadžba s više nepoznanica. U praksi su najvažniji sustavi koji imaju jednako jednadžba kao i nepoznanica i mićemo samo takve razmatrati. Na primjer za **linearne** takve sustave vrijedi da u pravilu imaju točno jedno rješenje. Ako ima više nepoznanica nego jednadžba, onda u pravilu ima beskonačno mnogo rješenja i skup rješenja ima dimenziju koja je razlika izmedju broja nepoznanica i broja rješenja (svaka nova jednadžba u pravilu smanjuje stupnjeve slobode, tj. smanjuje dimenziju skupa rješenja). Ako ima više jednadžba nego nepoznanica, onda je sustav prezasićen i u pravilu nema rješenja.

## 4. Newtonova metoda za približno rješavanje sustava dviju jednadžba s dvjema nepoznanicama.

Postupamo analogno kao kod jednadžbe s jednom nepoznanicom.

**1.korak** Izolacija rješenja – biranje nulte aproksimacije $(x_0,y_0)$ koju u matričnom obliku pišemo kao jednostupčanu matricu $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

**2. korak – određivanje prve i daljnjih aproksimacija**.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} .- J^{-1}(x_0,y_0) \begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

gdje je **Jakobijan J**, definiran kao $J(x_0,y_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

pa vidimo analogiju s formulom za jednu varijablu: tamo smo dijelili s derivacijom, a ovdje djelujemo s inverzom od jakobijana (neka vrsta dijeljenja).

Ako uvrstimo $J^{-1}(x_0,y_0) = \dfrac{1}{\det J(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$,

dobit ćemo $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{\det J(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)g(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

Slično se (n+1)-va aproksimacija dobije iz n-te.

**3.korak**. Ocjena pogrješke, kriterij za zaustavljanje procesa.
Tu je problem ocjene pogrješke puno složeniji od analognog problema za jednu varijablu. Za kriterij zaustavljanja procesa možemo uzeti bliskost dviju uzastopnih aproksimacija (iako to može zavarati). Na primjer, u 1-udaljenosti, stajemo ako je
$|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$,
za unaprijed odabran mali pozitivan broj $\varepsilon$.
Slično, u 2-udaljenosti stajemo ako je
$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} < \varepsilon$.

Naravno, mogli bismo uzeti kriterij zaustavljanja prema vrijednosti funkcija koja sudjeluju u sustavu, na primjer, stajemo ako je:
$|f(x_n,y_n)| < \varepsilon$ i $|g(x_n,y_n)| < \varepsilon$

**Primjer 4**. Metodom tangente približno odredimo rješenje sustava
$x^2+y^2-10=0$
$2x-y+1=0$,
koje je u III. kvadrantu.a kriterij zaustavljanja uzmimo $|f(x_n,y_n)|<0.1$ i $|g(x_n,y_n)|<0.1$.

Tu je riječ o sustavu (2) kojega bismo mogli točno riješiti, medjutim na njemu demonstriramo metodu tangente.

**1.korak** Izolacija rješenja – biranje nulte aproksimacije $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Vidjeli smo da možemo uzeti $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -2.5 \end{bmatrix}$.

**2. korak**.
Tu je $f(x,y):=x^2+y^2-10$ i $g(x,y):=2x-y+1$, pa je $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial g}{\partial x}=2$, $\frac{\partial g}{\partial y}=-1$,
$f(-2,-2.5)=0.25$; $g(-2,-2.5)=-0.5$.
Zato je $J(-2,-2.5)=\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, dakle $J^{-1}(-2,-2.5)=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.
Zato je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -2.5 \end{bmatrix}-\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -1\cdot 0.25+5\cdot(-0.5) \\ -2\cdot 0.25-4\cdot(-05) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -2.5 \end{bmatrix}-\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2.75 \\ 1.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.81 \\ -2.61 \end{bmatrix}$$

Već smo dobili dosta dobro rješenje, jer nije teško vidjeti da su stvarna rješenja sustava (1,3) i (-1.8,-2.6) .
Naravno da mi općenito ne znamo točno rješenje pa se moramo osloniti na dobivene aproksimacije. Zato računamo:
$|f(-1.81,-2.61)|=|0.082|<0.1$
$|g(-1.81,-2.61)|=|-0.01|<0.1$
Zato stajemo. Da smo uzeli kriterij zaustavljanja $|f(x_n,y_n)|<0.05$ i $|g(x_n,y_n)|<0.05$, morali bismo nastaviti s traženjem druge aproksimacije ( sad bi u jakobijan trebalo uvrštavati vrijednosti iz prve aproksimacije). Dobili bismo

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.8079 \\ -2.6009 \end{bmatrix}$$ (na četiri decimale)

Lako je provjeriti da je
$|f(-1.8079,-2.6009)|=|0.033|<0.5$
$|g(-1.8079,-2.6009)|=|-0.015|<0.5$, pa druga aproksimacija zadovoljava kriterij zaustavljanja.

**Napomena o složenijim sustavima**. Sustav triju jednadžba s trima nepoznanicama slično bi se rješavao, samo što bi sad rješenje bila urednjena trojka, jakobijan bi bio $3\times 3$ matrica itd.

**Izvod formule**. Pri izvodu ćemo simulirati izvod za funkcije jedne varijable samo što ćemo koristiti linearnu aproksimaciju oko $(x_0,y_0)$ funkcije dviju varijabla.

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-x_0)$$

g(x,y) $\approx$ g($x_0$,$y_0$)+ $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0)$

Umjesto originalnog sustava rješavamo linearni sustav

f($x_0$,$y_0$)+$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0)$ =0

g($x_0$,$y_0$)+$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0)$ =0

Ako rješenje doznaćimo kao $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ upravo dobijemo što smo gore napisali.