3. Testiranje varijance i očekivanja

Skicirat ćemo postupak testiranja očekivanja i varijance normalno distribuiranih slučajnih varijabla. U mnogim slučajevima u praksi važno je da varijanca ne bude prevelika (jer to znači preveliko rasipanje). Zato bi testiranje varijance u pravilu trebalo prethoditi testiranju očekivanja. Testiranje očekivanja može se provesti i onda ako su varijance bitno različite, mi ćemo opisati samo ono kad se varijance bitno ne razlikuju.

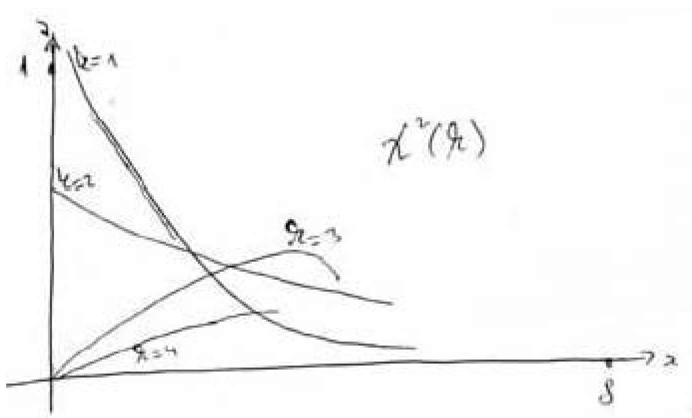
3.1. Testiranje varijance.

A. Predpostavimo da je X normalno distribuirana slučajna veličina s nepoznatom varijancom σ^2.

Nepoznatu varijancu procijenili smo sa s^2 na osnovi n mjerenja.

Testiramo hipotezu:
H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$,
za neku deklariranu vrijednost σ_0^2.

Testiranje se zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti da $k\dfrac{s^2}{\sigma^2}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne veličine $\chi^2(k)$ (χ^2-razdiobe s k:=n-1 stupnjeva slobode).



To znači, ako je H_0 istinita hipoteza (slutnja), onda je $k\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ slučajna vrijednost slučajne veličine $\chi^2(k)$ (dodali smo indeks 0 u nazivniku), pa se lijeva strana, kao pozitivan broj ponaša prema njoj.

Postoje dvije mogućnosti.

(I) $s^2 > \sigma_0^2$. Tada je, u pravilu, kontrahipoteza (protuslutnja, alternativna hipoteza) $\sigma^2 > \sigma_0^2$, dakle imamo:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_a: $\sigma^2 > \sigma_0^2$,

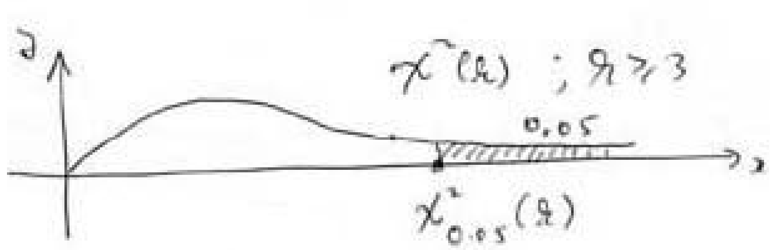
Tada računamo:

$W_{exp} = k\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$, gdje je k=n-1.

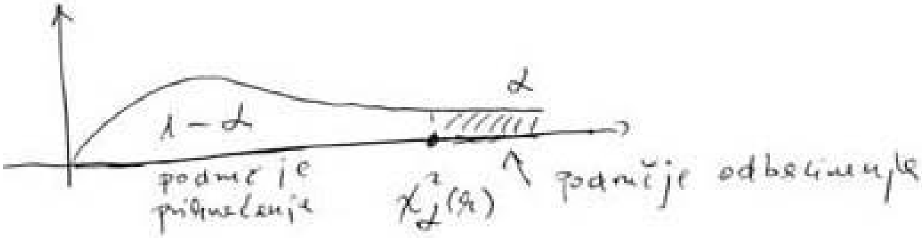
Ako je $W_{exp} < \chi^2_{0.05}(k)$ hipoteza H_0 se prihvaća, inače se odbacuje.

Značenje broja $\chi^2_{0.05}(k)$

Jest da je vjerojatnost da ta razdioba poprimi rezultat veći od tog broje jednaka 0.05 (tako bi bilo i za neki drugi nivo signifikantnosti).



Nivo signifikantnosti (razina značajnosti). Broj α=0.05 zove se nivo signifikantnosti. To je općeprihvaćena vrijednost, medjutim, ona može biti, ovisno o problematici, 0.1, 0.01, 0.025 itd. Područje ispod grafa funkcije gustoće test-statistike (u ovom slučaju χ^2 razdiobe), dijeli se na dva dijela, jedan manji površine α (to je područje odbacivanja), jedan veći površine 1-α (to je područje prihvaćanja).



Smisao je, za α=0.05 sljedeći:
Ako je nula hipoteza istinita onda će se, odprilike, u 95 od 100 ponavljanja po *n* mjerenja, eksperimentalni podatak W_{exp} naći u području prihvaćanja, a oko 5 puta u području odbacivanja (krtičnom području).
Općenito, α **je pogrješka prve vrste**, tj.
α := vjerojatnost da hipotezu H_0 odbacimo pod uvjetom da je istinita.
Analogno:
1-α := vjerojatnost da hipotezu H_0 prihvatimo pod uvjetom da je istinita.
Dakle, **pogrješno je shvaćanje**, inače široko rasprostranjeno, da je to vjerojatnost da je nulta hipoteza istinita. Naprotiv, ako je α manje, tj. 1-α veće, onda ćemo biti tolerantniji prema razlici. Konkretno, na razini značajnost α=0.01, možda nećemo odbaciti nula hipotezu, koju smo odbacili za α=0.05.

(II) $s^2<\sigma_0^2$

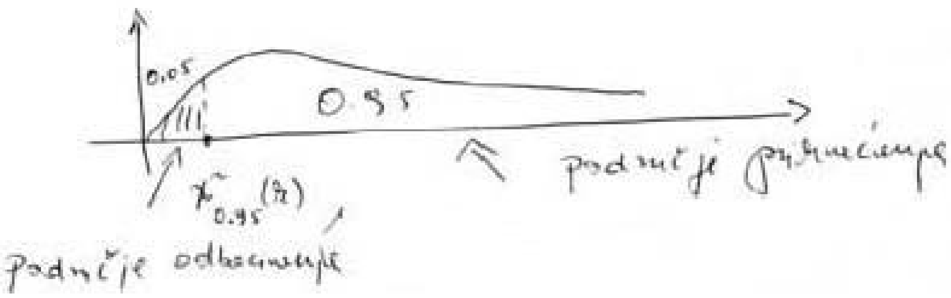
Tada je, u pravilu, kontrahipoteza $\sigma^2 < \sigma_0^2$, dakle imamo:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_a: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Tada hipotezu prihvaćamo ako je $W_{exp} > \chi^2_{0.95}(k)$

(znak nejednakosti se mijenja i umjesto 0.05 stavljamo 0.95).



(B) Testiranje hipoteze $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (F-test)

Predpostavimo da imamo dvije normalno distribuirane slučajne veličine:

X s očekivanjem μ_1 i varijancom σ_1^2

Y s očekivanjem μ_2 i varijancom σ_2^2.

Očekivanja i varijance tih slučajnih varijabla su nam nepoznate i procjenjujemo ih redom:

Za X iz n_1 mjerenja s $\bar{x}_1$, odnosno s s_1^2,

Za Y iz n_2 mjerenja s $\bar{x}_2$, odnosno s s_2^2.

Testiramo hipotezu o jednakosti tih varijanca. Pri tom predpostavimo da su indeksi odabrani tako da bude $s_1^2 > s_2^2$ i da smo za kontrahipotezu odabrali $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Dakle imamo:

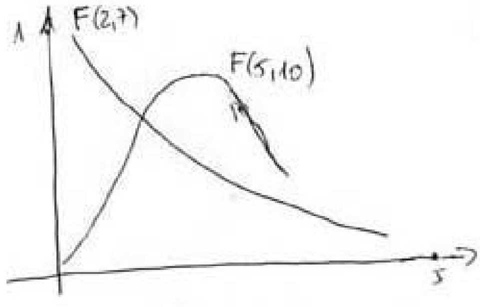
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_a: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Testiranje se zasniva na činjenici, da je, uz pretpostavku da je nulta hipoteza istinita, broj

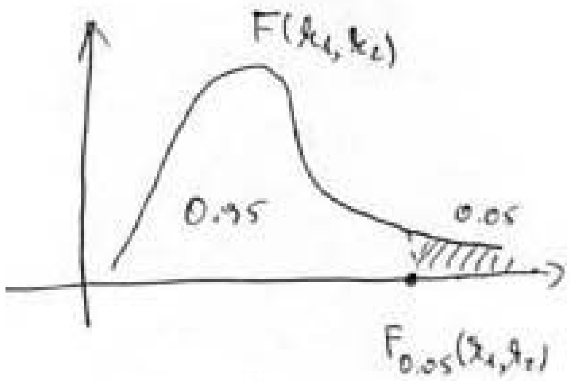
$\frac{s_1^2}{s_2^2}$ slučajna vrijednost Fisherove razdiobe $F(k_1,k_2)$,

uz $(k_1,k_2)= (n_1-1,n_2-1)$ stupnjeva slobode.



Hipotezu, primjenom F-testa (u pojednostavljenom obliku), provjeravamo ovako:

1. Računamo $F_{\exp} = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$
2. Očitavamo broj $F_{0.05}(k_1, k_2)$, gdje je
   $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$.



3. Ako je $F_{\exp} < F_{0.05}(k_1, k_2)$ hipotezu o jednakosti prihvaćamo, a u suprotnome odbacujemo (tj. smatramo da je razlika među njima bitna).

Napominjemo opet da je postupak testiranja varijance sofisticiraniji od ovog pojednostavljenog pristupa.

3.2. Testiranje očekivanja

(A) Testiranje hipoteze $\mu = \mu_0$ (t-test)

Predpostavimo da je X normalno distribuirana slučajna veličina s očekivanjem
μ i varijancom σ^2.
Neka smo na osnovi n mjerenja dobili procjene:
$\bar{x}$ za njeno očekivanje μ,
s^2 za njenu varijancu σ^2.

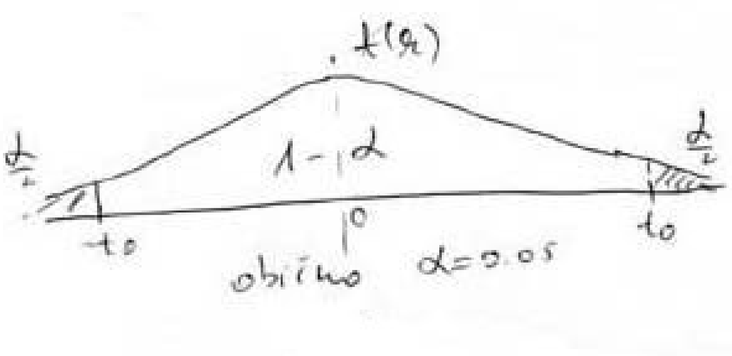
Testiramo hipotezu:

H_0: $\mu = \mu_0$,
gdje je μ_0 neka deklarirana vrijednost.
Napominjemo da bismo prije toga trebali provjeriti hipotezu o bliskosti varijanca (koju treba formulirati), a nakon što testiranje varijanaca pozitivno prođe, možemo pristupiti testiranju očekivanja (iako se i tada može nastaviti, ali s drukčijim postupkom)

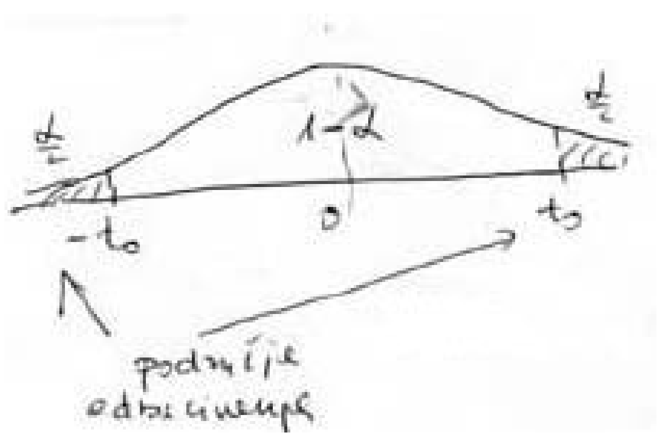
Testiranje nulte hipoteze zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti da broj $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost Studentove slučajne varijable t(n-1). Postupak opisujemo uz alternativnu hipotezu $\mu \neq \mu_0$, dakle imamo:

H_0: $\mu = \mu_0$
H_a: $\mu \neq \mu_0$

1. Računamo $t_{\exp} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.
2. Koristeći se prikladnim kompjutorskim statističkim paketom određujemo kritičnu vrijednost $t_p(k)$ (analogno kao i prije, ovisno o broju stupnjeva slobode k=n-1, nivou signifikantnosti α =2p, što je obično 0.05 i kontrahipotezi koja je, ako drukčije ne specificiramo $\mu \neq \mu_0$)
3. Ako je $-t_p(k)<t_{exp}<t_p(k)$ hipotezu H_0 prihvaćamo, inače je odbacujemo.



Napomena o razini značajnosti i području odbacivanja.
Za razliku od testiranja varijance gdje se područje odbacivanja sastoji od jednog dijela, ovdje područje odbacivanja ima dva simetrična dijela, svaki površine $\frac{\alpha}{2}$, gdje je α nivo signifikntnosti. To je zato što je kontrahipoteza oblika $\mu \neq \mu_0$, pa se dopuštaju otkloni na obje strane. Dakle, u slučaju α =0.05, kritična je vrijednost broj $t_{0.025}$ (k), a označava broj iza kojega je ispod grafa t(k)-razdiobe površina jednaka 0.025.



Primjer 1. Proizvođač kemikalija je deklarirao na svojim proizvodima da sadrže 1 litru kemikalije uz maksimalnu pogrješku ± 0.09 litara (prema pravilu *tri sigme*). Kupac je mjerenjem uzorka od 12 posuda ustanovio prosječni rezultat 0.97 uz standardno odstupanje 0.04. Jesu li rezultati u skladu s deklaracijom?

Tu je, , σ_0 =0.03, jer je 3·0.03 = 0.09. Zato je:

$\mu_0 = 1.00, \quad \sigma_0^2 = 0.03^2, \quad n = 12, \quad \bar{x} = 0.97, \quad s^2 = 0.04^2$.

Prvo treba testirati hipotezu o jednakosti varijanca:
H$_0$': $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
Dobivamo:
k=n-1 = 11

$$W_{exp} = k\frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

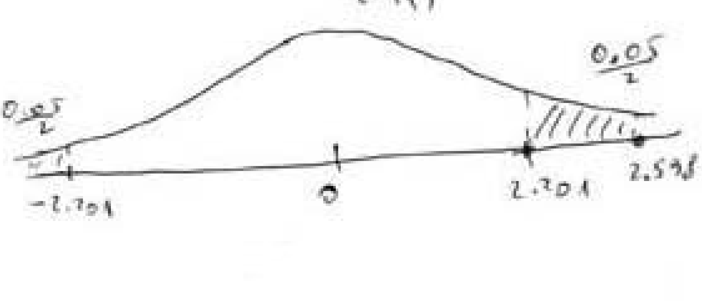
=19.5556
Također je $\chi^2{}_{0.05}(11)$ = 19.6751.
Kako je 19.5556 < 19.6751
hipotezu o jednakosti varajanca prihvaćamo (ali jedva). Drugim riječima, na razini značajnosti α =0.05 nema razloga za odbacivanje nula hipoteze.

Sad prelazimo na testiranje očekivanja.

H$_0$: $\mu = \mu_0$
H$_a$: $\mu \neq \mu_0$

$$t_{exp} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

= -2.598
Pripadna kritična vrijednost u t-razdiobi (za kontrahipotezu $\mu \neq \mu_0$, uz k=11 i nivo signifikantnosti $\alpha = 0.05$)
t$_{0.025}$(11) =2.201.



Kako je -2.598 < - 2.201,
hipotezu o jednakosti očekivanja odbacujemo (tj. smatramo da se one bitno razlikuju).

Tako smo odbacili deklaraciju.

Napomene.

1. Da smo umjesto kontrahipoteze $\mu \neq \mu_0$, uzeli kontrahipotezu $\mu < \mu_0$ (što bismo napravili da su, na primjer, svi rezultati mjerenja ili gotovo svi, bili manji od deklarirane, što ovdje vjerojatno nije slučaj), hipotezu o jednakosti bismo još uvjerljivije odbacili jer bi nam kritična vrijednost ispala 1.796, jer je P(t(11)>1.796)=0.05
Naime, tada bismo imali:

H_0: $\mu = \mu_0$

H_a: $\mu < \mu_0$

pa bismo gledali

$t_{exp}:=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ = - 2.598, što je u kritičnom području, tj. manje je od -1.796.

2. Uz pretpostavku normalne distribucije sadržaja posuda (što je prirodna predpostavka i već smo je prihvatili), prema pravilu "tri sigme":
prema deklaraciji je sadržaj između 0.91 i 1.09 (između 0.94 i 1.06 uz vjer. 0.95)
prema mjerenjima je sadržaj (približno jer nije riječ o normalnoj razdiobi) između 0.85 i 1.09 (između 0.89 i 1.05 uz vjer. 0.95)
odakle možemo dobiti intuitivnu predodžbu o tome zašto smo odbacili hipotezu, ali i o tome da smo je umalo prihvatili. Vidimo da je nismo prihvatili jer je vrijednost μ_0=1 ispala izvan intervala pouzdanosti uz vjerojatnost 0.95 koji je 0.97 ± 0.0254. To će biti općenito, naime slutnju $H_0: \mu = \mu_0$ ćemo prihvatiti (uz protuslutnju H_a: $\mu \neq \mu_0$ i uz razinu značajnosti α upravo za one μ_0 koji su u intervalu pouzdanosti za μ uz vjerojatnost 1-α.

Testiranje hipoteze $\mu_1 = \mu_2$ (t-test).

Tom testu u pravilu predhodi F-test. Nakon što taj prođe nastavlja se s t-testom (testiranju očekivanja), tj. s testiranjem hipoteze:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (nulta hipoteza)

Hipoteza se, primjenom t-testa, provodi ovako:

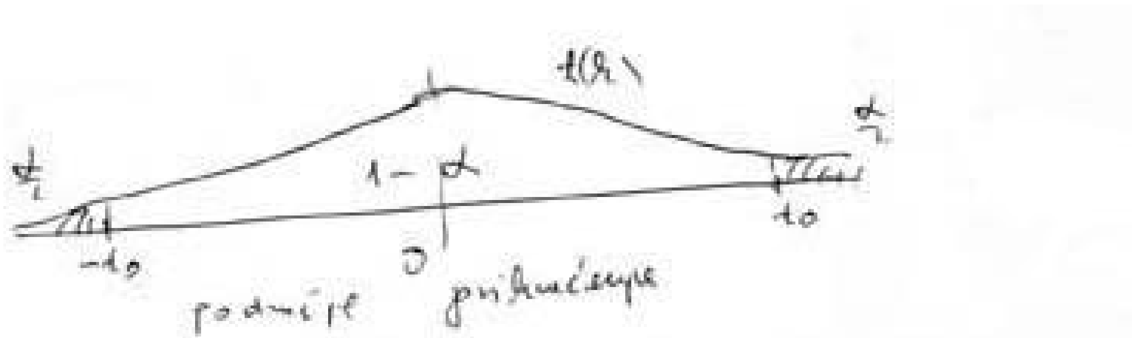
1. Izračuna se:

$$t_{exp} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)\ s_1^2 + (n_2-1)\ s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$$

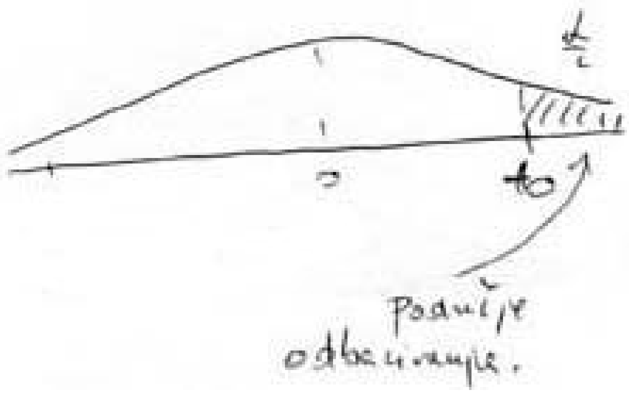
gdje obično označavamo: $s_d = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)\ s_1^2 + (n_2-1)\ s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$

2. Odredi se broj stupnjeva slobode $k=n_1+n_2-2$.
3. Prihvati se neki nivo signifikantnosti α (obično $\alpha=0.05$, ali može i $\alpha=0.01$ ili $\alpha=0.1$)
   Ponovimo, smisao nivoa signifikantnosti u testiranju je sljedeći:
   P(Postavljena se hipoteza odbacuje| ukoliko je postavljena hipoteza istinita) = α .
4. Iz tablica t-razdiobe izračuna se kritična vrijednost pomoću koje odredjujemo upada li izračunata vrijednost t_{exp} u kritično područje. Kritična vrijednost ovisi o nivou signifikantnosti α, o broju stupnjeva slobode (dakle o broju mjerenja), ali i o našoj kontrahipotezi koja može biti:

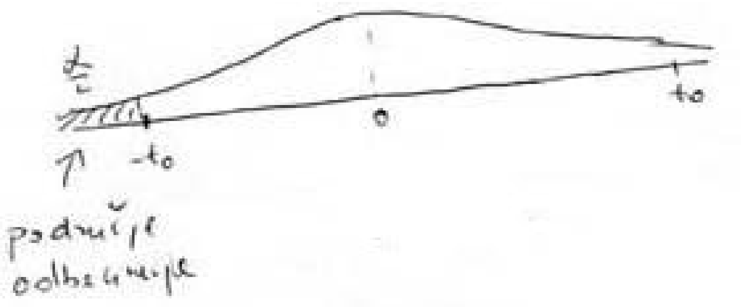
a) $\mu_1 \neq \mu_2$ (kad testiramo jesu li te dvije veličine jednake ili različite). Tada kritična vrijednost $t_0 = t_{\frac{\alpha}{2}}(k)$ ima značenje: $P(|t(k)|>t_0) = \alpha$, gdje $t(k)$ označava Studentovu (t-razdiobu) uz k stupnjeva slobode. To je isto kao i da smo rekli da je $P(t(k)>t_0) = \frac{\alpha}{2}$.
   Hipotezu prihvaćamo ako je $|t_{exp}|<t_0$ tj. ako je $-t_0<t_{exp}<t_0$ (inače je odbacujemo).
   Ako izričito drukčije ne kažemo uvijek smatramo da je kontrahipoteza takva.



b) $\mu_1 > \mu_2$ (koja ima smisla samo ako je $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$) .
   Tada kritična vrijednost t_0 ima značenje: $P(t>t_0) = \alpha$ (t_0 je drukčiji od onog iz a)).
   Hipotezu prihvaćamo ako je $t_{exp}<t_0$, inače je odbacujemo.



c) $\mu_1 < \mu_2$ (koja ima smisla samo ako je $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$) .
   Tada kritična vrijednost t_0 takodjer ima značenje: $P(t>t_0) = \alpha$.
   Hipotezu prihvaćamo ako je $t_{exp} > -t_0$, inače je odbacujemo.



Da se bolje uvidi razlika između a) , b) i c), neka je $\alpha = 0.05$; k = 8.
Tada je u a) $t_0 = 2.306$, a u b) i c) $t_0 = 1.860$.

Primjer 2. Neka je iz 8 mjerenja neke normalne slučajne veličine dobiven prosjek 12.56 uz standardno odstupanje 1.36; a iz 11 mjerenja druge normalne slučajne veličine prosjek 13.56 uz standardno odstupanje 0.84. Razlikuju li se bitno te veličine?

Podatci se mogu zapisati ovako:

$n_1 = 8, \quad \bar{x}_1 = 12.56, \quad s_1 = 1.36$

$n_2 = 11, \quad \bar{x}_2 = 13.56, \quad s_2 = 0.84$

$k_1 = 7, \quad k_2 = 10, \quad k = 17.$

1. F-test.

H'_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F_{\exp} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$=2.6213$$

$F_{0.05}(k_1, k_2) = 3.14$.

Kako je 2.6213 < 3.14 hipotezu prihvaćamo, tj. smatramo da varijance tih slučajnih veličina nisu bitno različite.

2. t-test. Testiramo:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$

Dobijemo:

$s_d = 0.504035$

$t_{exp} = -1.984$, $|t_{exp}| = 1.984$

Kritična vrijednost (za nivo signifikantnosti 0.05 i za k=17) je $t_0 = t_{0.025}(17) = 2.110$.
Kako je 1.984 < 2.110 (odnosno jer je $-2.110 < -1.984 < 2.110$), hipoteza se prihvaća pa se smatra da se dvije mjerene veličine bitno ne razlikuju.

Sljedeće napomene upozoravaju na relativnost zaključka pri testiranju u odnosu na male promjene podataka ili na odabir kontrahipoteze i razine značajnosti.

Napomene. Da smo u podatcima imali $\bar{x}_2 = 13.66$, a da su ostali podatci ostali isti, sve bi bilo isto osim završnog rezultata t_{exp}. Naime, bilo bi:

t_{exp}= - 2.1824, $|t_{exp}|$= 2.1824

a kako je 2.1824 > 2.110, hipotezu o jednakosti očekivanja bismo odbacili.

2. Da smo u izvornom zadatku odabrali kontrahipotezu H_a: $\mu_1 < \mu_2$ (što načelno ima smisla jer je $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$), hipotezu o jednakosti očekivanja takodjer bismo odbacili. Naime, tada bi kritična vrijednost bila $t_0 = t_{0.05}(17)$= 1.740. Kako je 1.984>1.740 nula hipotezu bismo odbacili.

3. Da smo imali sve kao u izvornom zadatku i izvornom rješenju, samo da smo odabrali razinu značajnosti $\alpha = 0.1$, tada bismo hipotezu takodjer odbacili, jer bi tada kritična vrijednost bila kao i u 2., tj. bilo bi t_0 = 1.740.

4. Testiranje teoretskih razdioba (χ^2- test)

Jedno od najčešćih pitanja u statistici jest ponašaju li se mjereni podatci prema nekom teoretskom zakonu (razdiobi) ili se bitno od njega razlikuju.

Primjer 3. Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

0	1	2	3	4	5 ili više
16	16	36	15	10	7

Dakle, u 16 mjerenja nije bila ni jedna poruka, u 16 mjerenja točno jedna, u 36 mjerenja točno 2 itd. Formulacija u zadnjem stubcu je takva jer je, možda bilo i 6 ili 7 poziva koji put, pa smo to skupili u jedan podatak. Ukupno je bilo n=100 mjerenja, koje smo svrstali u L=6 grupa.

Postavlja se pitanje ponašaju li se ti podatci prema Poissonovu zakonu ili, možda, bitno odudaraju od njega. O tome je zaista teško odgovoriti samo uvidom u podatke.

Odgovor na pitanje pomoću χ^2-testa (predloženog Karlom Pearsonom 1900) zasniva se na sljedećem razmišljanju.

Brojevi u drugom redku tablice zovu se **eksperimentalne frekvencije** f_i, dakle:

f_0=16, f_1=16, f_2=36, f_3=15, f_4=10, f_5=7.

Prosječan broj poruka, dobije se kao:

$$a = \frac{0 \bullet 16 + 1 \bullet 16 + 2 \bullet 36 + 3 \bullet 15 + 4 \bullet 10 + 5 \bullet 7}{100} = 2.08$$

Jasno je da je a procjena za očekivanje slučajne varijable X koja registrira broj poruka u fiksiranom vremenskom intervalu, a ako se podatci zaista ponašaju prema Poissonovu zakonu onda je, približno, $X \sim P(a)$, tj. $X \sim P(2.08)$.

U nastavku ćemo izračunati pripadne **teoretske vjerojatnosti** p_i, i=0,1,2,... te razdiobe, prema formuli

$$p_i := e^{-a}\frac{a^i}{i!}, \quad \text{tj.} \quad p_i := e^{-a}\frac{2.08^i}{i!}$$

i pripadne **teoretske frekvencije** prema formuli

$f_{ti} := n \cdot p_i$, tj. $f_{ti} := 100 \cdot p_i$. Imamo, dakle:

$p_0 = e^{-2.08} = \quad 0.124930 \qquad\qquad f_{t0} = 12.4930$

$p_1 = e^{-2.08}\dfrac{2.08}{1!} = 0.259855 \qquad\qquad f_{t1} = 25.9855$

$p_2 = \quad 0.270249 \qquad\qquad f_{t2} = 27.0249$

$p_3 = \quad 0.187373 \qquad\qquad f_{t3} = 18.7373$

$p_4 = \quad 0.097434 \qquad\qquad f_{t4} = 9.7434$

$p_5 := 1- (p_0+ p_1+ p_2 +p_3+ p_4)$
$= \quad 0.060159 \qquad\qquad f_{t5} = 6.0159$

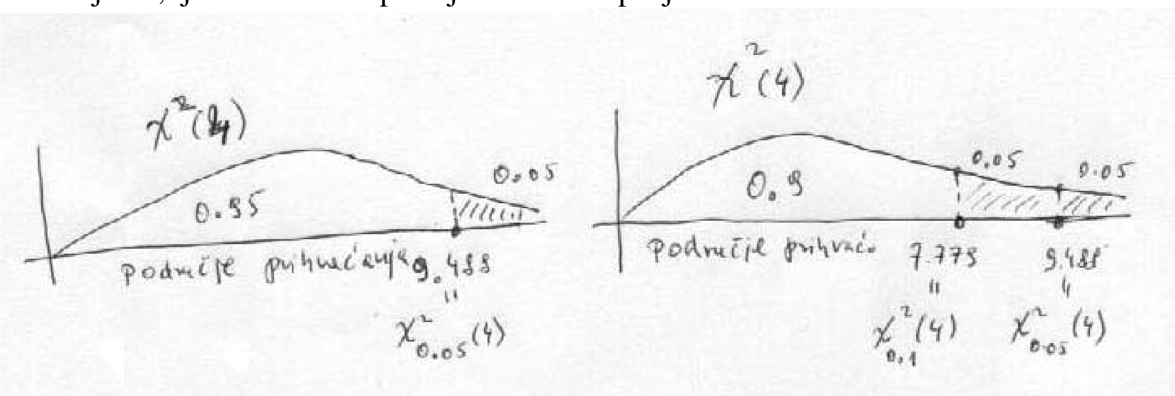
Tu smo, umjesto pravog p_5 stavili zbroj svih vjerojatnosti od pete na dalje, tako da ukupan zbroj vjerojatnosti bude 1; slično tako smo dobili da je ukupan zbroj teoretskih frekvencija jednak 100.
Sljedeći je korak uvodjenje **mjere udaljenosti** eksperimentalnih i teoretskih frekvencija:

$$\chi^2_{\exp} := \frac{(f_0 - f_{t0})^2}{f_{t0}} + \frac{(f_1 - f_{t1})^2}{f_{t1}} + \frac{(f_2 - f_{t2})^2}{f_{t2}} + \frac{(f_3 - f_{t3})^2}{f_{t3}} + \frac{(f_4 - f_{t4})^2}{f_{t4}} + \frac{(f_5 - f_{t5})^2}{f_{t5}}$$

$$+ \frac{(16-12.4930)^2}{12.4930} + \frac{(16-25.9855)^2}{25.9855} + \frac{(36-27.0249)^2}{27.0249} + \frac{(15-18.7373)^2}{18.7373}$$

$$+ \frac{(10-9.7434)^2}{9.7434} + \frac{(7-6.0159)^2}{6.0159}$$
$$= 8.715$$

Završni je korak prihvaćanje ili odbacivanje hipoteze o Poissonovoj razdiobi. Taj se kriterij zasniva na činjenici, da je, **ako je ispunjena nulta hipoteza**:
H_0 : podatci se ponašaju prema Poissonovoj razdiobi
onda broj $\chi^2_{\exp}$ možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne varijable koja **približno** ima hi-kvadrat razdiobu s k:=L-2 = 6-2 = 4 stupnjeva slobode.
Kako je $\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$, što je veće od broja $\chi^2_{\exp}$, pa, uz razinu značajnosti α =0.05, hipotezu o Poissonovoj razdiobi prihvaćamo (iako ne sasvim uvjerljivo).
Takodjer vidimo da je $\chi^2_{0.1}(4) = 7.779$, pa na razini značajnosti α =0.1 tu hipotezu odbacujemo, tj. smatramo da postoji bitno odstupanje od Poissonove razdiobe.



U sljedećem ćemo primjeru dodatno ilustrirati zašto je spomenuta razdioba rubno Poissonova, tako što ćemo samo malo promijeniti podatke.

Primjer 4. Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

0	1	2	3	4	5 ili više
16	16	37	14	9	8

Treba testirati predpostavku o Poissonovoj razdiobi.

Lako se vidi da je tu, kao i u Primjeru 3. ispunjeno:
n=100, L=6, k=4, a=2.08 pa su i odgovarajuće teoretske frekvencije jednake. Medjutim, tu je $\chi^2_{\exp}$=10.412, pa hipotezu o Poissonovoj razdiobi odbacujemo na razini značajnosti α=0.05.
Treba napomenuti da bismo predpostavku prihvatili na razini značajnosti α=0.025, jer je $\chi^2_{0.025}(4) = 11.143$.

Općenito, a ne samo za Poissonovu razdiobu, imamo:
$\chi^2_{\exp} := \sum \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$, $k := L\text{-}l\text{-}1$, gdje je l broj parametara o kojima ovisi teoretska razdioba, tj. l=2 za normalnu i binomnu
l=1 za Poissonovu i eksponencijalnu
l=0 za jednoliku.
Hipotezu o suglasnosti s teoretskom razdiobom prihvaćamo na razini značajnosti α (u pravilu je α=0.05)
ako je $\chi^2_{\exp} < \chi^2_\alpha(k)$, inače je odbacujemo. Postupak provodimo koristeći se odgovarajućim statističkim paketom.