

### 3. Testiranje varijance i očekivanja

Skicirat ćemo postupak testiranja očekivanja i varijance normalno distribuiranih slučajnih varijabla. U mnogim slučajevima u praksi važno je da varijanca ne bude prevelika (jer to znači preveliko rasipanje). Zato bi testiranje varijance u pravilu trebalo prethoditi testiranju očekivanja. Testiranje očekivanja može se provesti i onda ako su varijance bitno različite, mi ćemo opisati samo ono kad se varijance bitno ne razlikuju.

#### 3.1. Testiranje varijance.

A. Predpostavimo da je  $X$  normalno distribuirana slučajna veličina s nepoznatom varijancom  $\sigma^2$ .

Nepoznatu varijancu procijenili smo sa  $s^2$  na osnovi  $n$  mjerenja.

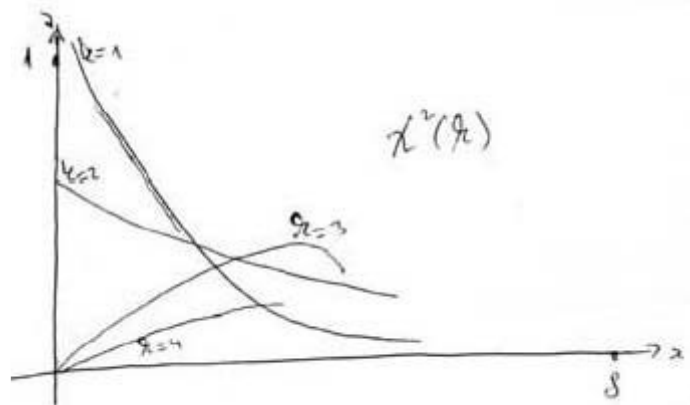
Testiramo hipotezu:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

za neku deklariranu vrijednost  $\sigma_0^2$ .

Testiranje se zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti da  $k \frac{s^2}{\sigma^2}$  možemo interpretirati kao

slučajnu vrijednost slučajne veličine  $\chi^2(k)$  ( $\chi^2$ -razdiobe s  $k:=n-1$  stupnjeva slobode).



To znači, ako je  $H_0$  istinita hipoteza (slutnja), onda je  $k \frac{s^2}{\sigma_0^2}$  slučajna vrijednost slučajne

veličine  $\chi^2(k)$  (dodali smo indeks 0 u nazivniku), pa se lijeva strana, kao pozitivan broj ponaša prema njoj.

Postoje dvije mogućnosti.

(I)  $s^2 > \sigma_0^2$ . Tada je, u pravilu, kontrahipoteza (protuslutnja, alternativna hipoteza)

$$\sigma^2 > \sigma_0^2, \text{ dakle imamo:}$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

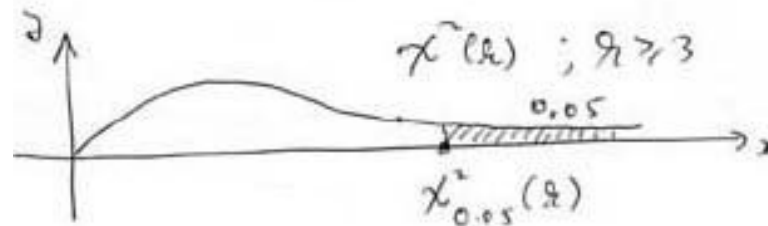
Tada računamo:

$$W_{\text{exp}} = k \frac{s^2}{\sigma_0^2}, \text{ gdje je } k=n-1.$$

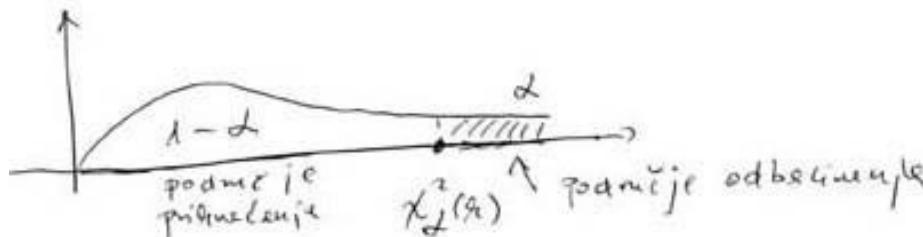
Ako je  $W_{\text{exp}} < \chi_{0.05}^2(k)$  hipoteza  $H_0$  se prihvaća, inače se odbacuje.

Značenje broja  $\chi_{0.05}^2(k)$

Jest da je vjerojatnost da ta razdioba poprimi rezultat veći od tog broje jednaka 0.05 (tako bi bilo i za neki drugi nivo signifikantnosti).



**Nivo signifikantnosti (razina značajnosti).** Broj  $\alpha=0.05$  zove se nivo signifikantnosti. To je općeprihvaćena vrijednost, međjutim, ona može biti, ovisno o problematici, 0.1, 0.01, 0.025 itd. Područje ispod grafa funkcije gustoće test-statistike (u ovom slučaju  $\chi^2$  razdiobe), dijeli se na dva dijela, jedan manji površine  $\alpha$  (to je područje odbacivanja), jedan veći površine  $1-\alpha$  (to je područje prihvaćanja).



Smisao je, za  $\alpha=0.05$  sljedeći:

**Ako je nula hipoteza istinita** onda će se, odprilike, u 95 od 100 ponavljanja po  $n$  mjerenja, eksperimentalni podatak  $W_{\text{exp}}$  naći u području prihvaćanja, a oko 5 puta u području odbacivanja (kritičnom području).

Općenito,  $\alpha$  je **pogrješka prve vrste**, tj.

$\alpha :=$  vjerojatnost da hipotezu  $H_0$  odbacimo pod uvjetom da je istinita.

Analogno:

$1-\alpha :=$  vjerojatnost da hipotezu  $H_0$  prihvatimo pod uvjetom da je istinita.

Dakle, **pogrješno je shvaćanje**, inače široko rasprostranjeno, da je to vjerojatnost da je nulta hipoteza istinita. Naprotiv, ako je  $\alpha$  manje, tj.  $1-\alpha$  veće, onda ćemo biti tolerantniji prema razlici. Konkretno, na razini značajnost  $\alpha=0.01$ , možda nećemo odbaciti nula hipotezu, koju smo odbacili za  $\alpha=0.05$ .

$$(II) \quad s^2 < \sigma_0^2$$

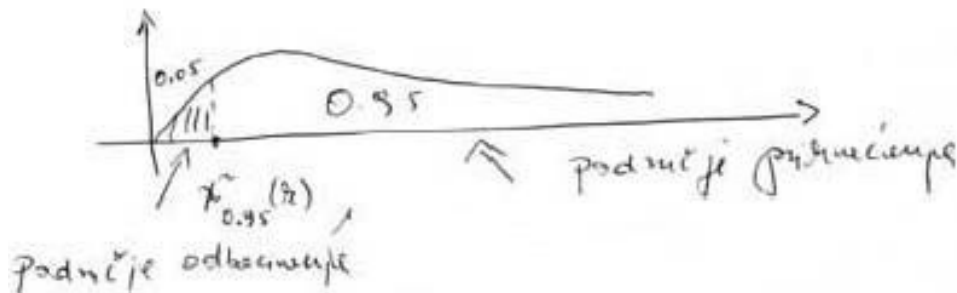
Tada je, u pravilu, kontrahipoteza  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ , dakle imamo:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Tada hipotezu prihvaćamo ako je  $W_{\text{exp}} > \chi_{0.95}^2(k)$

(znak nejednakosti se mijenja i umjesto 0.05 stavljamo 0.95).



### (B) Testiranje hipoteze $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (F-test)

Predpostavimo da imamo dvije normalno distribuirane slučajne veličine:

X s očekivanjem  $\mu_1$  i varijancom  $\sigma_1^2$

Y s očekivanjem  $\mu_2$  i varijancom  $\sigma_2^2$ .

Očekivanja i varijance tih slučajnih varijabla su nam nepoznate i procjenjujemo ih redom:

Za X iz  $n_1$  mjerenja s  $\bar{x}_1$ , odnosno s  $s_1^2$ ,

Za Y iz  $n_2$  mjerenja s  $\bar{x}_2$ , odnosno s  $s_2^2$ .

Testiramo hipotezu o jednakosti tih varijanaca. Pri tom predpostavimo da su indeksi odabrani tako da bude  $s_1^2 > s_2^2$  i da smo za kontrahipotezu odabrali  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ . Dakle imamo:

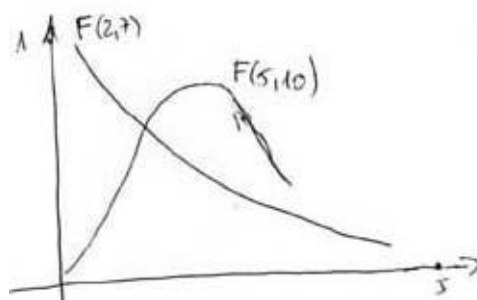
$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Testiranje se zasniva na činjenici, da je, uz pretpostavku da je nulta hipoteza istinita, broj

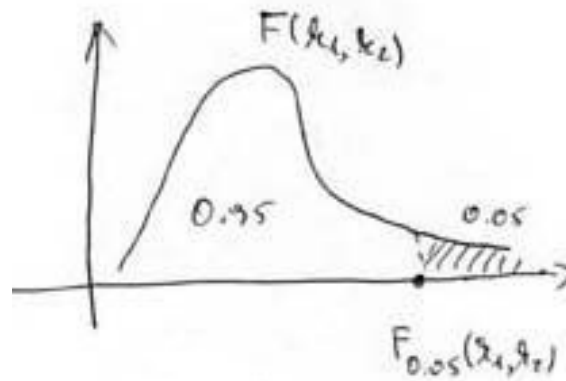
$\frac{s_1^2}{s_2^2}$  slučajna vrijednost Fisherove razdiobe  $F(k_1, k_2)$ ,

uz  $(k_1, k_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1)$  stupnjeva slobode.



Hipotezu, primjenom F-testa (u pojednostavljenom obliku), provjeravamo ovako:

1. Računamo  $F_{\text{exp}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
2. Očitavamo broj  $F_{0.05}(k_1, k_2)$ , gdje je  $k_1 = n_1 - 1$ ,  $k_2 = n_2 - 1$ .



3. Ako je  $F_{\text{exp}} < F_{0.05}(k_1, k_2)$  hipotezu o jednakosti prihvaćamo, a u suprotnome odbacujemo (tj. smatramo da je razlika među njima bitna).

Napominjemo opet da je postupak testiranja varijance sofisticiraniji od ovog pojednostavljenog pristupa.

### 3.2. Testiranje očekivanja

#### (A) Testiranje hipoteze $\mu = \mu_0$ (t-test)

Predpostavimo da je  $X$  normalno distribuirana slučajna veličina s očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\sigma^2$ .

Neka smo na osnovi  $n$  mjerenja dobili procjene:

$\bar{x}$  za njeno očekivanje  $\mu$ ,

$s^2$  za njenu varijancu  $\sigma^2$ .

Testiramo hipotezu:

$$H_0: \mu = \mu_0,$$

gdje je  $\mu_0$  neka deklarirana vrijednost.

Napominjemo da bismo prije toga trebali provjeriti hipotezu o bliskosti varijanca (koju treba formulirati), a nakon što testiranje varijanaca pozitivno prođe, možemo pristupiti testiranju očekivanja (iako se i tada može nastaviti, ali s drukčijim postupkom)

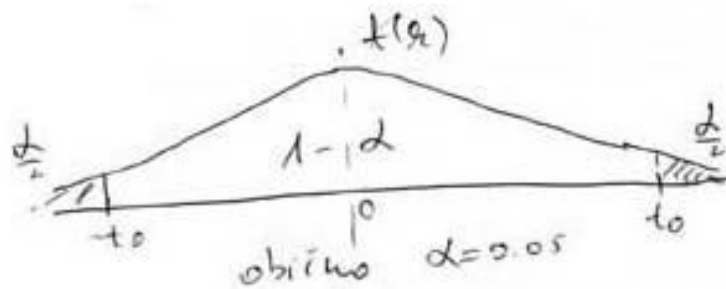
Testiranje nulte hipoteze zasniva na činjenici iz teorije vjerojatnosti da broj  $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost Studentove slučajne varijable  $t(n-1)$ . Postupak opisujemo uz alternativnu hipotezu  $\mu \neq \mu_0$ , dakle imamo:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

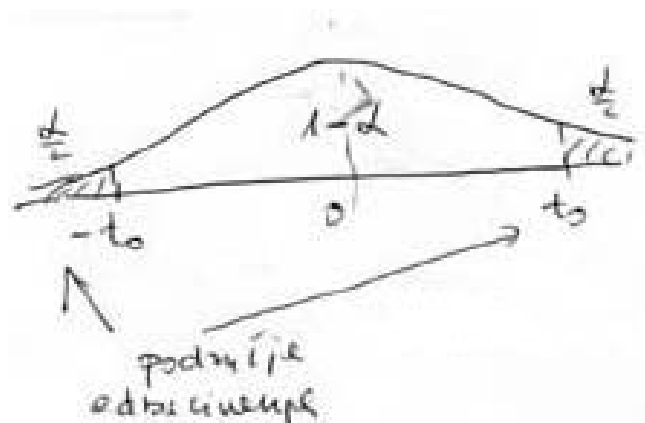
1. Računamo  $t_{\text{exp}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ .
2. Koristeći se prikladnim kompjutorskim statističkim paketom određujemo kritičnu vrijednost  $t_p(k)$  (analogno kao i prije, ovisno o broju stupnjeva slobode  $k=n-1$ , nivou signifikantnosti  $\alpha=2p$ , što je obično 0.05 i kontraprotezi koja je, ako drukčije ne specificiramo  $\mu \neq \mu_0$ )
3. Ako je  $-t_p(k) < t_{\text{exp}} < t_p(k)$  hipotezu  $H_0$  prihvaćamo, inače je odbacujemo.



### Napomena o razini značajnosti i području odbacivanja.

Za razliku od testiranja varijance gdje se područje odbacivanja sastoji od jednog dijela, ovdje područje odbacivanja ima dva simetrična dijela, svaki površine  $\frac{\alpha}{2}$ , gdje je  $\alpha$  nivo

signifikantnosti. To je zato što je kontraproteza oblika  $\mu \neq \mu_0$ , pa se dopuštaju otkloni na obje strane. Dakle, u slučaju  $\alpha=0.05$ , kritična je vrijednost broj  $t_{0.025}(k)$ , a označava broj iza kojega je ispod grafa  $t(k)$ -razdiobe površina jednaka 0.025.



**Primjer 1.** Proizvođač kemikalija je deklarirao na svojim proizvodima da sadrže 1 litru kemikalije uz maksimalnu pogrešku  $\pm 0.09$  litara (prema pravilu *tri sigme*). Kupac je mjerenjem uzorka od 12 posuda ustanovio prosječni rezultat 0.97 uz standardno odstupanje 0.04. Jesu li rezultati u skladu s deklaracijom?

Tu je,  $\sigma_0 = 0.03$ , jer je  $3 \cdot 0.03 = 0.09$ . Zato je:

$$\mu_0 = 1.00, \quad \sigma_0^2 = 0.03^2, \quad n = 12, \quad \bar{x} = 0.97, \quad s^2 = 0.04^2.$$

Prvo treba testirati hipotezu o jednakosti varijanaca:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

Dobivamo:

$$k = n - 1 = 11$$

$$W_{\text{exp}} = k \frac{s^2}{\sigma_0^2} \\ = 19.5556$$

Također je  $\chi^2_{0.05}(11) = 19.6751$ .

Kako je  $19.5556 < 19.6751$

hipotezu o jednakosti varijanaca prihvaćamo (ali jedva). Drugim riječima, na razini značajnosti  $\alpha = 0.05$  nema razloga za odbacivanje nula hipoteze.

Sad prelazimo na testiranje očekivanja.

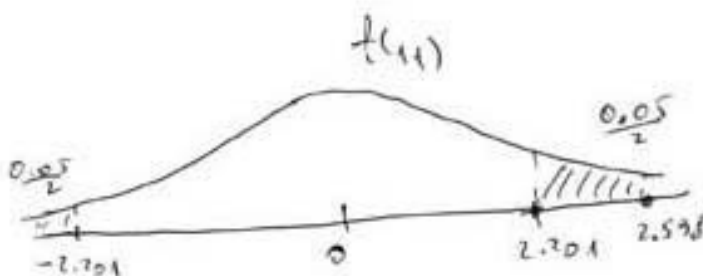
$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

$$t_{\text{exp}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \\ = -2.598$$

Pripadna kritična vrijednost u t-razdiobi (za kontrahipotezu  $\mu \neq \mu_0$ , uz  $k=11$  i nivo signifikantnosti  $\alpha = 0.05$ )

$$t_{0.025}(11) = 2.201.$$



Kako je  $-2.598 < -2.201$ ,

hipotezu o jednakosti očekivanja odbacujemo (tj. smatramo da se one bitno razlikuju).

Tako smo odbacili deklaraciju.

### Napomene.

1. Da smo umjesto kontrapoteze  $\mu \neq \mu_0$ , uzeli kontrapotezu  $\mu < \mu_0$  (što bismo napravili da su, na primjer, svi rezultati mjerenja ili gotovo svi, bili manji od deklarirane, što ovdje vjerojatno nije slučaj), hipotezu o jednakosti bismo još uvjerljivije odbacili jer bi nam kritična vrijednost ispala 1.796, jer je  $P(t(11) > 1.796) = 0.05$ . Naime, tada bismo imali:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu < \mu_0$$

pa bismo gledali

$$t_{\text{exp}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = -2.598, \text{ što je u kritičnom području, tj. manje je od } -1.796.$$

2. Uz pretpostavku normalne distribucije sadržaja posuda (što je prirodna pretpostavka i već smo je prihvatili), prema pravilu "tri sigme":

prema deklaraciji je sadržaj između 0.91 i 1.09 (između 0.94 i 1.06 uz vjer. 0.95)

prema mjerenjima je sadržaj (približno jer nije riječ o normalnoj razdiobi) između 0.85 i 1.09 (između 0.89 i 1.05 uz vjer. 0.95)

odakle možemo dobiti intuitivnu predodžbu o tome zašto smo odbacili hipotezu, ali i o tome da smo je umalo prihvatili. Vidimo da je nismo prihvatili jer je vrijednost  $\mu_0 = 1$

ispala izvan intervala pouzdanosti uz vjerojatnost 0.95 koji je  $0.97 \pm 0.0254$ . To će biti

općenito, naime slutnju  $H_0: \mu = \mu_0$  ćemo prihvatiti (uz protuslutnju  $H_a: \mu \neq \mu_0$  i uz razinu značajnosti  $\alpha$  upravo za one  $\mu_0$  koji su u intervalu pouzdanosti za  $\mu$  uz vjerojatnost

$1 - \alpha$ .

### Testiranje hipoteze $\mu_1 = \mu_2$ (t-test).

Tom testu u pravilu predhodi F-test. Nakon što taj prođe nastavlja se s t-testom (testiranjem očekivanja), tj. s testiranjem hipoteze:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ (nulta hipoteza)}$$

Hipoteza se, primjenom t-testa, provodi ovako:

1. Izračuna se:

$$t_{\text{exp}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

gdje obično označavamo:  $s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

2. Odredi se broj stupnjeva slobode  $k=n_1+n_2-2$ .
3. Prihvati se neki nivo signifikantnosti  $\alpha$  (obično  $\alpha=0.05$ , ali može i  $\alpha=0.01$  ili  $\alpha=0.1$ )  
Ponovimo, smisao nivoa signifikantnosti u testiranju je sljedeći:

$P(\text{Postavljena se hipoteza odbacuje} \mid \text{ukoliko je postavljena hipoteza istinita}) = \alpha$ .

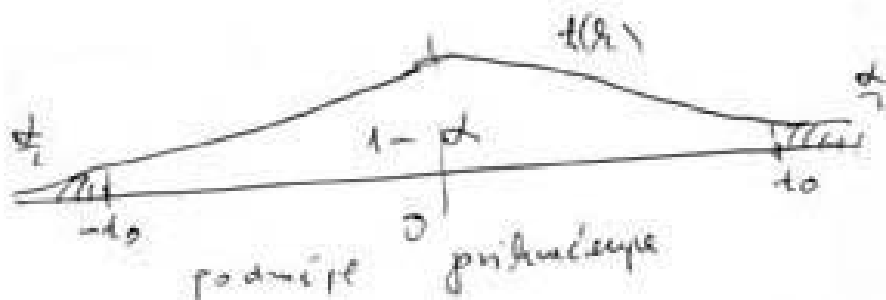
4. Iz tablica t-razdiobe izračuna se kritična vrijednost pomoću koje određujemo upada li izračunata vrijednost  $t_{exp}$  u kritično područje. Kritična vrijednost ovisi o nivou signifikantnosti  $\alpha$ , o broju stupnjeva slobode (dakle o broju mjerenja), ali i o našoj kontrapotezi koja može biti:

- a)  $\mu_1 \neq \mu_2$  (kad testiramo jesu li te dvije veličine jednake ili različite). Tada kritična vrijednost  $t_0 = t_{\frac{\alpha}{2}}(k)$  ima značenje:  $P(|t(k)| > t_0) = \alpha$ , gdje  $t(k)$  označava Studentovu (t-

razdiobu) uz  $k$  stupnjeva slobode. To je isto kao i da smo rekli da je  $P(t(k) > t_0) = \frac{\alpha}{2}$ .

Hipotezu prihvaćamo ako je  $|t_{exp}| < t_0$  tj. ako je  $-t_0 < t_{exp} < t_0$  (inače je odbacujemo).

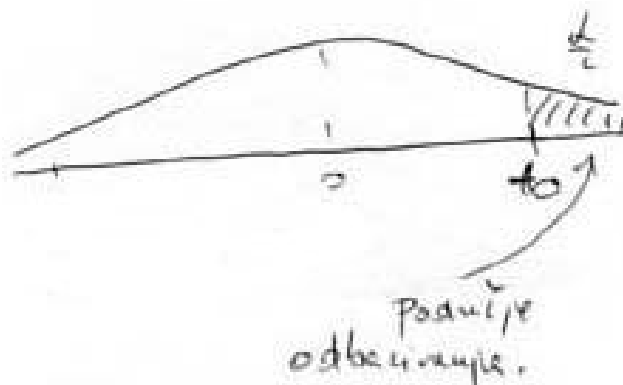
Ako izričito drukčije ne kažemo uvijek smatramo da je kontrapoteza takva.



- b)  $\mu_1 > \mu_2$  (koja ima smisla samo ako je  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ ).

Tada kritična vrijednost  $t_0$  ima značenje:  $P(t > t_0) = \alpha$  ( $t_0$  je drukčiji od onog iz a)).

Hipotezu prihvaćamo ako je  $t_{exp} < t_0$ , inače je odbacujemo.

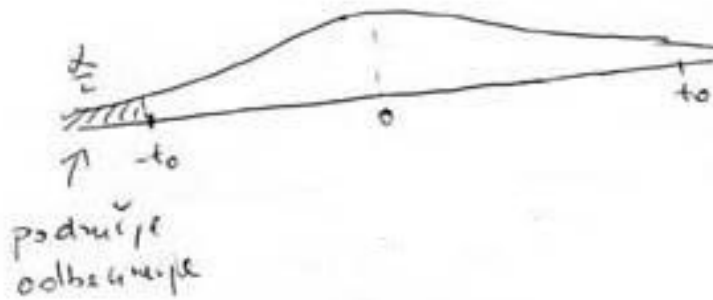


- c)  $\mu_1 < \mu_2$  (koja ima smisla samo ako je  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ).

Tada kritična vrijednost  $t_0$  također ima značenje:  $P(t > t_0) = \alpha$ .

Hipotezu prihvaćamo ako je  $t_{exp} > -t_0$ , inače je odbacujemo.





Da se bolje uvidi razlika između a) , b) i c), neka je  $\alpha = 0.05$  ;  $k = 8$ .  
Tada je u a)  $t_0 = 2.306$ , a u b) i c)  $t_0 = 1.860$ .

**Primjer 2.** Neka je iz 8 mjerenja neke normalne slučajne veličine dobiven prosjek 12.56 uz standardno odstupanje 1.36; a iz 11 mjerenja druge normalne slučajne veličine prosjek 13.56 uz standardno odstupanje 0.84. Razlikuju li se bitno te veličine?

Podatci se mogu zapisati ovako:

$$n_1 = 8, \quad \bar{x}_1 = 12.56, \quad s_1 = 1.36$$

$$n_2 = 11, \quad \bar{x}_2 = 13.56, \quad s_2 = 0.84$$

$$k_1 = 7, \quad k_2 = 10, \quad k = 17.$$

### 1. F-test.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$F_{\text{exp}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$= 2.6213$$

$$F_{0.05}(k_1, k_2) = 3.14.$$

Kako je  $2.6213 < 3.14$  hipotezu prihvaćamo, tj. smatramo da varijance tih slučajnih veličina nisu bitno različite.

### 2. t-test. Testiramo:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Dobijemo:

$$s_d = 0.504035$$

$$t_{\text{exp}} = -1.984, \quad |t_{\text{exp}}| = 1.984$$

Kritična vrijednost (za nivo signifikantnosti 0.05 i za  $k=17$ ) je  $t_0 = t_{0.025}(17) = 2.110$ .

Kako je  $1.984 < 2.110$  (odnosno jer je  $-2.110 < -1.984 < 2.110$ ), hipoteza se prihvaća pa se smatra da se dvije mjerene veličine bitno ne razlikuju.

Sljedeće napomene upozoravaju na relativnost zaključka pri testiranju u odnosu na male promjene podataka ili na odabir kontrahipoteze i razine značajnosti.

**Napomene.** Da smo u podacima imali  $\bar{x}_2 = 13.66$ , a da su ostali podatci ostali isti, sve bi bilo isto osim završnog rezultata  $t_{exp}$ . Naime, bilo bi:

$$t_{exp} = -2.1824, |t_{exp}| = 2.1824$$

a kako je  $2.1824 > 2.110$ , hipotezu o jednakosti očekivanja bismo odbacili.

2. Da smo u izvornom zadatku odabrali kontrapotezu  $H_a: \mu_1 < \mu_2$

(što načelno ima smisla jer je  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ), hipotezu o jednakosti očekivanja također bismo odbacili. Naime, tada bi kritična vrijednost bila  $t_0 = t_{0.05}(17) = 1.740$ . Kako je  $1.984 > 1.740$  nula hipotezu bismo odbacili.

3. Da smo imali sve kao u izvornom zadatku i izvornom rješenju, samo da smo odabrali razinu značajnosti  $\alpha = 0.1$ , tada bismo hipotezu također odbacili, jer bi tada kritična vrijednost bila kao i u 2., tj. bilo bi  $t_0 = 1.740$ .

#### 4. Testiranje teoretskih razdioba ( $\chi^2$ - test)

Jedno od najčešćih pitanja u statistici jest ponašaju li se mjereni podatci prema nekom teoretskom zakonu (razdiobi) ili se bitno od njega razlikuju.

**Primjer 3.** Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksnom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

0	1	2	3	4	5 ili više
16	16	36	15	10	7

Dakle, u 16 mjerenja nije bila ni jedna poruka, u 16 mjerenja točno jedna, u 36 mjerenja točno 2 itd. Formulacija u zadnjem stubcu je takva jer je, možda bilo i 6 ili 7 poziva koji put, pa smo to skupili u jedan podatak. Ukupno je bilo  $n=100$  mjerenja, koje smo svrstali u  $L=6$  grupa.

Postavlja se pitanje ponašaju li se ti podatci prema Poissonovu zakonu ili, možda, bitno odudaraju od njega. O tome je zaista teško odgovoriti samo uvidom u podatke.

Odgovor na pitanje pomoću  $\chi^2$ -testa (predloženog Karlom Pearsonom 1900) zasniva se na sljedećem razmišljanju.

Brojevi u drugom redu tablice zovu se **eksperimentalne frekvencije**  $f_i$ , dakle:

$$f_0=16, f_1=16, f_2=36, f_3=15, f_4=10, f_5=7.$$

Prosječan broj poruka, dobije se kao:

$$a = \frac{0 \cdot 16 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 7}{100} = 2.08$$

Jasno je da je  $a$  procjena za očekivanje slučajne varijable  $X$  koja registrira broj poruka u fiksnom vremenskom intervalu, a ako se podatci zaista ponašaju prema Poissonovu zakonu onda je, približno,  $X \sim P(a)$ , tj.  $X \sim P(2.08)$ .

U nastavku ćemo izračunati pripadne **teoretske vjerojatnosti**  $p_i$ ,  $i=0,1,2,\dots$  te razdiobe, prema formuli

$$p_i := e^{-a} \frac{a^i}{i!}, \quad \text{tj.} \quad p_i := e^{-2.08} \frac{2.08^i}{i!}$$

i pripadne **teoretske frekvencije** prema formuli

$$f_{ti} := n \cdot p_i, \quad \text{tj.} \quad f_{ti} := 100 \cdot p_i. \quad \text{Imamo, dakle:}$$

$$p_0 = e^{-2.08} = 0.124930 \quad f_{t0} = 12.4930$$

$$p_1 = e^{-2.08} \frac{2.08}{1!} = 0.259855 \quad f_{t1} = 25.9855$$

$$p_2 = 0.270249 \quad f_{t2} = 27.0249$$

$$p_3 = 0.187373 \quad f_{t3} = 18.7373$$

$$p_4 = 0.097434 \quad f_{t4} = 9.7434$$

$$p_5 := 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ = 0.060159 \quad f_{t5} = 6.0159$$

Tu smo, umjesto pravog  $p_5$  stavili zbroj svih vjerojatnosti od pete na dalje, tako da ukupan zbroj vjerojatnosti bude 1; slično tako smo dobili da je ukupan zbroj teoretskih frekvencija jednak 100.

Sljedeći je korak uvođenje **mjere udaljenosti** eksperimentalnih i teoretskih frekvencija:

$$\chi_{\text{exp}}^2 := \frac{(f_0 - f_{t0})^2}{f_{t0}} + \frac{(f_1 - f_{t1})^2}{f_{t1}} + \frac{(f_2 - f_{t2})^2}{f_{t2}} + \frac{(f_3 - f_{t3})^2}{f_{t3}} + \frac{(f_4 - f_{t4})^2}{f_{t4}} + \frac{(f_5 - f_{t5})^2}{f_{t5}} \\ + \frac{(16 - 12.4930)^2}{12.4930} + \frac{(16 - 25.9855)^2}{25.9855} + \frac{(36 - 27.0249)^2}{27.0249} + \frac{(15 - 18.7373)^2}{18.7373} \\ + \frac{(10 - 9.7434)^2}{9.7434} + \frac{(7 - 6.0159)^2}{6.0159} \\ = 8.715$$

Završni je korak prihvaćanje ili odbacivanje hipoteze o Poissonovoj razdiobi. Taj se kriterij zasniva na činjenici, da je, **ako je ispunjena nulta hipoteza**:

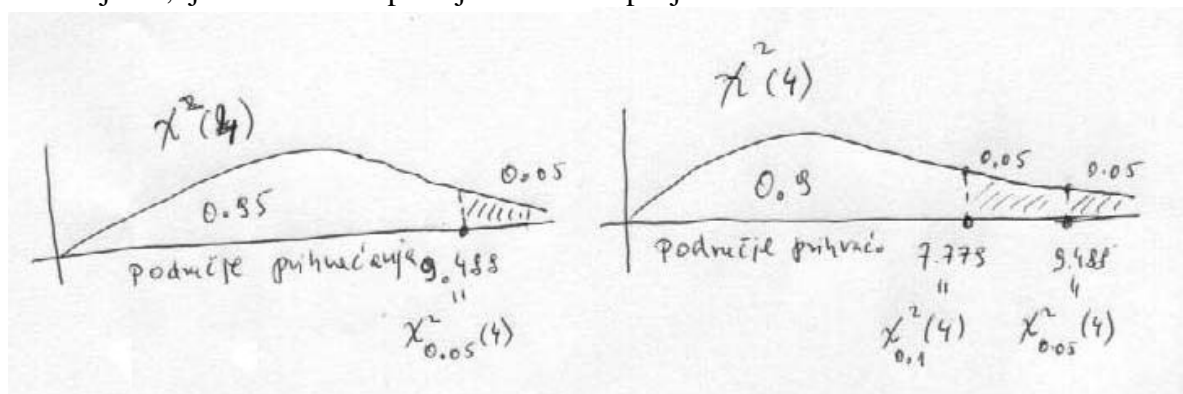
$H_0$ : podaci se ponašaju prema Poissonovoj razdiobi

onda broj  $\chi_{\text{exp}}^2$  možemo interpretirati kao slučajnu vrijednost slučajne varijable koja **približno** ima hi-kvadrat razdiobu s  $k := L - 2 = 6 - 2 = 4$  stupnjeva slobode.

Kako je  $\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$ , što je veće od broja  $\chi_{\text{exp}}^2$ , pa, uz razinu značajnosti

$\alpha = 0.05$ , hipotezu o Poissonovoj razdiobi prihvaćamo (iako ne sasvim uvjerljivo).

Takodjer vidimo da je  $\chi_{0.1}^2(4) = 7.779$ , pa na razini značajnosti  $\alpha = 0.1$  tu hipotezu odbacujemo, tj. smatramo da postoji bitno odstupanje od Poissonove razdiobe.



U sljedećem ćemo primjeru dodatno ilustrirati zašto je spomenuta razdioba rubno Poissonova, tako što ćemo samo malo promijeniti podatke.

**Primjer 4.** Registriranjem broja poruka na nekoj adresi u fiksnom vremenskom intervalu, dobiveni su sljedeći podatci:

0	1	2	3	4	5 ili više
16	16	37	14	9	8

Treba testirati pretpostavku o Poissonovoj razdiobi.

Lako se vidi da je tu, kao i u Primjeru 3. ispunjeno:

$n=100$ ,  $L=6$ ,  $k=4$ ,  $a=2.08$  pa su i odgovarajuće teoretske frekvencije jednake. Međutim, tu je  $\chi^2_{\text{exp}}=10.412$ , pa hipotezu o Poissonovoj razdiobi odbacujemo na razini značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Treba napomenuti da bismo pretpostavku prihvatili na razini značajnosti  $\alpha=0.025$ , jer je  $\chi^2_{0.025}(4)=11.143$ .

Općenito, a ne samo za Poissonovu razdiobu, imamo:

$$\chi^2_{\text{exp}} := \sum \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}, \quad k := L-l-1, \quad \text{gdje je } l \text{ broj parametara o kojima ovisi teoretska}$$

razdioba, tj.  $l=2$  za normalnu i binomnu

$l=1$  za Poissonovu i eksponencijalnu

$l=0$  za jednoliku.

Hipotezu o suglasnosti s teoretskom razdiobom prihvaćamo na razini značajnosti  $\alpha$  (u pravilu je  $\alpha=0.05$ )

ako je  $\chi^2_{\text{exp}} < \chi^2_{\alpha}(k)$ , inače je odbacujemo. Postupak provodimo koristeći se odgovarajućim statističkim paketom.

