Poglavlje 6

Numeričko rješavanje jednadžbi i sustava

Primjeri u Excelu vezani za ovu cjelinu nalaze se u dokumentu *Jednadzbe.xlsx*.

Često se nelinearne jednadžbe ne mogu riješiti egzaktno. U tom slučaju tražimo **približno rješenje** jednadžbe.

Svaku jednadžbu s jednom nepoznanicom možemo zapisati u obliku

$$f(x) = 0.$$

Npr. ako je zadana jednadžba $e^x - x = 2$, vrijedi $e^x - x - 2 = 0$ pa je $f(x) = e^x - x - 2$. Za svako rješenje jednadžbe x^* vrijedi $f(x^*) = 0$. Stoga se traženje rješenja dane jednadžbe svodi na traženje nultočki funkcije f.

Za daljnju analizu pretpostavljamo da je funkcija f neprekidna i da su joj nultočke izolirane. Određivanje nultočki funkcije f provodi se u dva koraka.

(1) Odredimo interval na kojem se nalazi nultočka.

(2) Koristimo neku iterativnu metodu za nalaženje nultočke.

Prvi se korak radi analizom toka funkcije. Iz grafa možemo vidjeti koliko nultočki ima i gdje se one (približno) nalaze. U drugom koraku možemo koristiti različite iterativne metode. Te metode generiraju niz aproksimacija $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Zaustavljamo se kod neke aproksimacije x_N koja je "dovoljno blizu" egzaktnog rješenja x^*.

S obzirom da ne možemo mjeriti koliko je x_N daleko od x^* jer ne znamo x^*, odstupanje od egzaktnog rješenja mjerimo odstupanjem $f(x_N)$ od 0 jer za egzaktno rješenje x^* vrijedi $f(x^*) = 0$. Vrijednost $f(x_N)$ nazivamo **greška aproksimacije**. Bitna svojstva svake metode su da li konvergira (vodi prema rješenju) te brzina konvergencije.

Slika 6.1: Izbor početnih točaka kod metode bisekcije

6.1 Metoda bisekcije

Najjednostavnija metoda za traženje nultočke funkcije f je **metoda bisekcije** (raspolavljanja). Polazimo od nekog intervala $I = [x_0, x_1]$ koji sadrži nultočku. U svakom koraku taj interval raspolavljamo i time sužavamo područje oko nultočke. Pretpostavka koja mora biti zadovoljena da bismo mogli korisiti ovu metodu je

$$f(a)f(b) < 0, \tag{6.1}$$

gdje je $a = x_0$, $b = x_1$. Drugim riječima, mora vrijediti

$$f(x_0) > 0,\ f(x_1) < 0 \quad \text{ili} \quad f(x_0) < 0,\ f(x_1) > 0.$$

Činjenica da je funkcija na jednom rubu intervala pozivitvna, a na drugom negativna osigurava postojanje nultočke unutar intervala, slika 6.1. (Zbog potpunosti, napomenimo da ovo vrijedi jer smo još na početku pretpostavili da je f neprekidna. Osim toga, metoda bisekcije koristi se samo za nultočke neparnog reda jer kod nultočki parnog reda relacija (6.1) ne može vrijediti.)

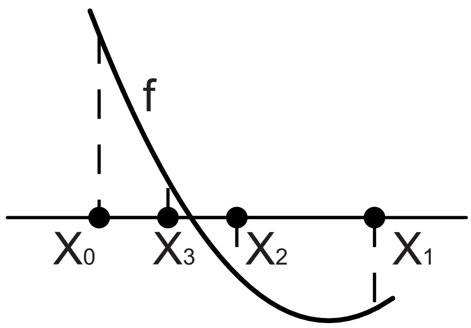
Nakon što pravilno izaberemo početne točke x_0 i x_1, za sljedeću točku, x_2, uzimamo aritmetičku sredinu točaka x_0 i x_1,

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Tako smo prepolovili početni interval $[x_0, x_1]$ i dalje nastavljamo ili s intervalom $[x_0, x_2]$ ili $[x_2, x_1]$. Uzimamo onaj od ta dva koji sadrži nultočku. To se provjeri iz uvjeta (6.1). Dakle, uzet ćemo onaj podinterval za kojeg je funkcija pozitivna na jednom rubu, a negativna na drugom, slika 6.2.

Opisani postupak raspolavljanja početnog intervala ponavlja se dalje na isti način. U svakom koraku područje oko nultočke postaje sve uže te je time nultočka sve preciznije određena. Postupak završavamo kada je interval oko nultočke dovoljno mali ili kada je ispunjen zadani broj koraka.

Uz pretpostavku da početni interval sadrži točno jednu nultočku, metoda bisekcije je konvergentna, uvijek će nakon dovoljnog broja koraka dovesti do rješenja, ali je spora.



Slika 6.2: Grafički prikaz metode bisekcije

6.2 Metoda sekante

Metoda sekante temelji se na aproksimaciji grafa funkcije njegovom sekantom. Kao kod metode bisekcije, uzimamo dvije početne točke, x_0 i x_1, samo što sada interval $[x_0, x_1]$ ne mora sadržavati nultočku.

Sekanta (pravac) se povlači kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$. Sljedeća točka, x_2, nalazi se na presjeku dobivene sekante i x-osi, slika 6.4. Općenito, točka x_{n+1} dobije se kao sjecište sekante kroz $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_n, f(x_n))$ i x-osi. Njena formula izvodi se iz formule za jednadžbu pravca kroz dvije točke i glasi

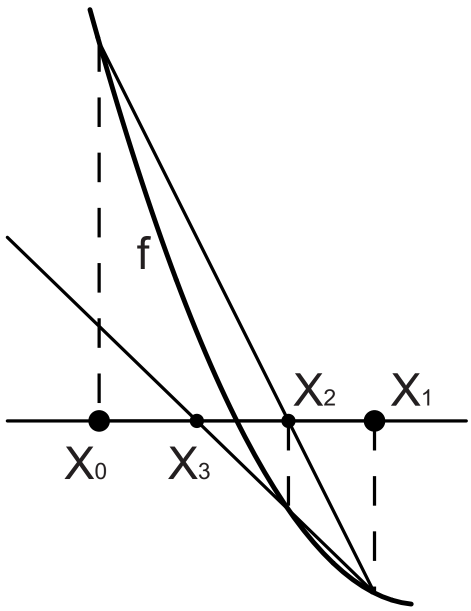
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Metodu zaustavljamo kada je vrijednost funkcije f u trenutnoj aproksimaciji x_N, $f(x_N)$, dovoljno mala ili kada je ispunjen zadani broj koraka. Metoda sekante nije nužno konvergentna. Konvergencija ovisi o izboru početnih točaka što predstavlja problem. S druge strane, ako konvergira, onda je brža od metode bisekcije.

6.3 Metoda tangente

Metoda tangente (Newtonova metoda) ima dosta sličnosti s metodom sekante. Razlika je u tome što ovdje imamo jednu početnu točku, x_0. Kroz točku $(x_0, f(x_0))$ povlači se tangenta na graf funkcije f, a sljedeće točka, x_1, nalazi se na presijeku te tangente i x-osi. Općenito, točka x_{n+1} nalazi se na presijeku tangente na f kroz točku $(x_n, f(x_n))$ i x-osi. Formula za točku x_{n+1} glasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Slika 6.3: Grafički prikaz metode sekante

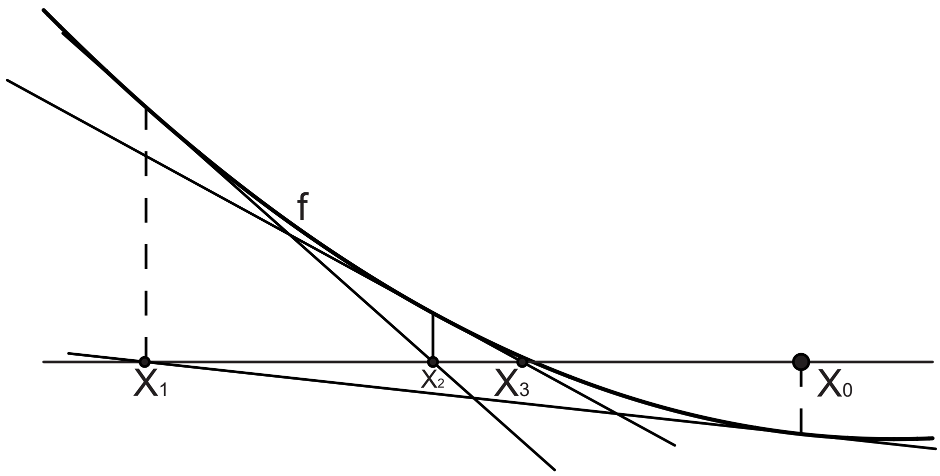
Svojstva konvergencije metode tangente slična su kao kod metode sekante. Ona će konvergirati ako je početna aproksimacija x_0 dovoljno blizu egzaktnog rješenja.

6.4 Solver

Solver je alat u Excelu koji se koristi za numeričko rješavanje jednadžbi. Prije prvog korištenja Solvera potrebno je instalirati dodatak Solver u Excel. To se radi na sljedeći način. U izborniku *File* kliknete na *Options*, te potom *Add-Ins*. Dalje, pod *Manage* izaberete *Excel Add-ins* i kliknete *Go*. U novom prozoru označite *Solver Add-in* i *OK*. Nakon što je Solver uključen, pojavit će se u izborniku *Data*.

Da bi riješili jednadžbu korištenjem Solvera, potrebno je uzeti početnu procjenu rješenja, označimo ga x_0, i izračunati vrijednost funkcije $f(x_0)$. Procjenu x_0 uglavnom biramo koristeći grafičku interpretaciju jednadžbe. Potrebno je modificirati x_0 kako bi vrijedilo $f(x_0) = 0$. Otvorimo Solver te u njemu postavimo sljedeće zahtjeve:

$$\begin{aligned} \textit{Set objective} \rightarrow &\ f(x_0) \\ \textit{Value of} \rightarrow &\ 0 \\ \textit{By changing variable cells} \rightarrow &\ x_0 \end{aligned}$$



Slika 6.4: Grafički prikaz metode tangente

i kliknemo *Solve* te *Keep solver solution*. U polju u kom je prije bila upisana procjena x_0 sada dobijemo novi broj koji je približno rješenje jednadžbe.

6.5 Sustavi jednadžbi

Sustav jednadžbi također možemo riješiti korištenjem Solvera. Pokazat ćemo to na primjeru dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, x i y.

Dvije zadane jednadžbe možemo poistovijetiti s dvije funkcije dvije varijable, $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$. Npr., ako je zadan sustav

$$
\begin{aligned}
3x^2 - y^2 &= 3, \\
2x - y &= 5,
\end{aligned}
$$

imamo

$$
\begin{aligned}
F_1(x, y) &= 3x^2 - y^2 - 3, \\
F_2(x, y) &= 2x - y - 5.
\end{aligned}
$$

Stoga su rješenja sustava (x^*, y^*) ujedno nultočke funkcija F_1 i F_2.

Sada su potrebne početne procjene za obe nepoznanice, x_0 i y_0. Njih modificiramo u Solveru. Budući da u polje *Set objective* u Solveru nije moguće istovremeno upisati i $F_1(x_0, y_0)$ i $F_2(x_0, y_0)$, uvodimo pomoćno polje

$F_1(x_0, y_0) + F_2(x_0, y_0)$. Postavljamo sljedeće zahtjeve:

$$\begin{aligned} \textit{Set objective} \rightarrow \; & F_1(x_0, y_0) + F_2(x_0, y_0) \\ \textit{Value of} \rightarrow \; & 0 \\ \textit{By changing variable cells} \rightarrow \; & x_0;\ y_0 \\ \textit{Subject to the constrains} \rightarrow \; & F_1(x_0, y_0) = 0;\ F_2(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Kao i u primjeru jedne jednadžbe, kliknemo *Solve* te *Keep solver solution.* U poljima u kojima su bile upisane procjene x_0 i y_0 dobijemo rješenja sustava.