Poglavlje 7

Numeričko rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi

Primjeri u Excelu vezani za ovu cjelinu nalaze se u dokumentu *ODJ.xlsx*.

U različitim primjenama susrećemo se s problemima koji uključuju rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Često diferencijanlu jednadžbu nije moguće riješiti egzaktno, ili je pak postupak rješavanja dug i težak. Tada pribjegavamo nekoj numeričkoj metodi za rješavanje.

Ovdje se bavimo rješavanjem običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) prvog reda,

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

uz početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Ovakvu vrstu problema nazivamo Cauchyjev ili inicijalni problem. Jednadžbe rješavamo na intervalu $[a, b]$ koji je podijeljen točkama

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b.$$

Udaljenost svake dvije susjedne točke iznosi h, tj. vrijedi $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, \ldots, n-1$.

7.1 Eulerova metoda

Eulerova metoda je najjednostavnija metoda za numeričko rješavanje Cauchyjevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Prvu derivaciju y' možemo, uz određenu grešku, aproksimirati izrazom

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobijemo

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x,y),$$

iz čega se lako izvede relacija

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y).$$

Iz gornjeg izraza slijedi rekurzivna formula za Eulerovu metodu

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{7.1}$$

Vrijednost y_0 zadana je početnim uvjetom. Vrijednosti y_i dobivene formulom(7.1) su aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe u točkama x_i, $i = 1, \dots, n$. Rješenje je točnije što je manji korak h.

Formulu (7.1) ponekad zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + k, \\ k &= hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

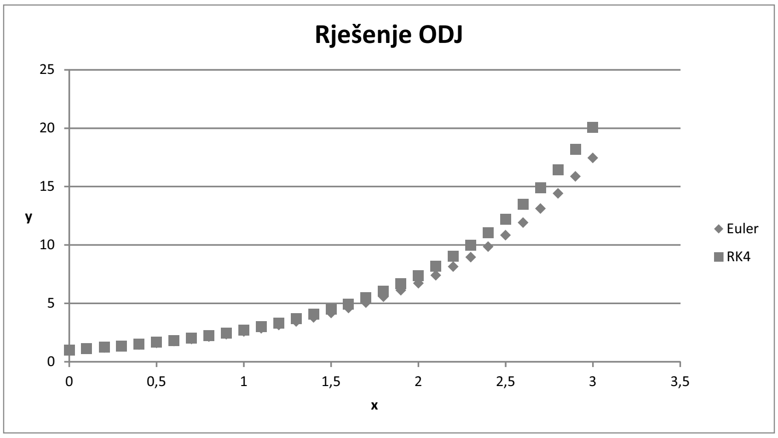
7.2 Runge-Kutta 4 metoda

Runge-Kutta metode zasnivaju se na istoj ideji kao i Eulerova metoda. Uz poznatu vrijednost vrijednost y_i u točki x_i računamo vrijednost y_{i+1} u točki $x_{i+1} = x_i + h$. Ove su metode gotovo uvijek točnije od Eulerove metode, ali su složenije za računanje. Runge-Kutta metode razlikuju se međusobno po broju stadija, a najpopularnija je ona s četiri statdija, tzv. **Runge-Kutta 4** metoda.

Runge-Kutta 4 metoda određena je formulom

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(x_i,\, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(x_i + h,\, y_i + k_3), \qquad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Izvod formule ovdje preskačemo.



Slika 7.1: Usporedba rješenja dobivenih Eulerovom i Runge-Kutta 4 metodom za jednadžbu $y' = y$.