SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

KOLEGIJ: MATEMATIČKE METODE U KEMIJSKOM INŽENJERSTVU

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Katarina Tadić
3074
Zagreb, srpanj 2003.

Većina fizikalnih fenomena u području dinamike fluida, elektriciteta, magnetizma, mehanike, optike ili toka topline, može se opisati parcijalnim diferencijalnim jednadžbama; zapravo, veći dio matematičke fizike jesu parcijalne diferencijalne jednadžbe. Istina je da se može pojednostavniti, tako da se smanje jednadžbe na obične diferencijalne jednadžbe, ali kompletan opis ovih sistema počiva na glavnoj ideji parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Većina prirodnih zakona fizike, poput Maxwellovih jednadžbi, Newtonovog zakona hlađenja, Navier-Stokesovih jednadžbi, Newtonovih jednadžbi gibanja i Schrödingerove jednadžbe kvantne mehanike, jesu ili mogu biti navedene u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, to zapravo znači da ovi zakoni opisuju fizičke fenomene dovođenjem u vezu **prostornih i vremenskih derivacija**. U ovim jednadžbama se javljaju derivacije zato što one predstavljaju *prirodne stvari*, poput brzine, akceleracije, sile, trenja, fluksa, struje. Znači, imamo jednadžbe u vezi s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama neke neznane kvantitete, koje želimo naći.

SADRŽAJ

1. UVOD

Parcijalna diferencijalna jednadžba je jednadžba koja uključuje parcijalne derivacije. Za razliku od obične diferencijalne jednadžbe, gdje nepoznata funkcija ovisi samo o *jednoj varijabli*, u parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi nepoznata funkcija ovisi o *više varijabli*. (Na primjer, temperatura $T(x,t)$ ovisi o položaju x i vremenu t.) Red najveće derivacije se zove **redom** jednadžbe.

Evo nekih dobro znanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

(zbog jednostavnosti zapisivanja, nazvali smo

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots)$$

Jednodimenzionalna toplinska jednadžba: $u_t = c^2 u_{xx}$,

Dvodimenzionalna toplinska jednadžba: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$,

Jednodimenzionalna valna jednadžba: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Trodimenzionalna valna jednadžba: $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$,

Dvodimenzionalna Laplaceova jednadžba: $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

Trodimenzionalna Laplaceova jednadžba: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$,

gdje je c konstanta, t vrijeme, a x, y, z su Kartezijeve koordinate.

Nepoznata funkcija u uvijek ovisi o više od jedne varijable. Varijabla u, koju diferenciramo, zove se **zavisna varijabla** , a one po kojima diferenciramo se zovu **neovisne varijable**. Na primjer, jasno je iz jednadžbe

$$u_t = u_{xx}$$

da je zavisna varijabla $u(x,t)$ funkcija dvije nezavisne varijable x i t, u jednadžbi

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

$u(r,\theta,t)$ ovisi o r, θ i t.

Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe je funkcionalna ovisnost više varijabli.

Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju oblik :

$$Lu = 0,$$

odnosno desna im je strana nula, gdje je L linearni operator, a u funkcija više varijabli.

Često se parcijalne diferencijalne jednadžbe promatraju kao problemi,

$$\Omega\Psi = \lambda\Psi,$$

gdje je Ω linearni parcijalni diferencijalni operator, a Ψ funkcija više varijabli. Opet, red parcijalne diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije.

Pri rješavanju diferencijalne jednadžbe n-tog reda, pojavljuje se 'n' proizvoljnih konstanti integracije. Dakako, uz parcijalne diferencijalne jednadžbe, te konstante nisu brojevi, već proizvoljne funkcije. Kao rezultat, generalno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe je puno pregeneralno za bilo kakvu praktičnu svrhu. Potrebno je specificirati neke granične uvjete da bi se postiglo manje generalno rješenje. Da bi se dobilo točno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe n-tog reda, 'n' funkcija se mora specificirati kao granične uvjete.

2. VIBRIRAJUĆA NIT

Nit ispružena duž osi x može vibrirati u smjeru okomitom prema ovoj osi. Neka $u(x,t)$ predstavlja pomak niti iz njegove ravnotežne pozicije, $u=0$. Jednadžba kretanja ove niti je valna jednadžba :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \qquad (1)$$

Ovdje je:

$$c^2=\frac{T}{\rho}, \qquad (2)$$

gdje je T napetost niti, a ρ je linearna gustoća niti u g/cm, a c je brzina kojom se poremećaj širi po niti. Pretpostavimo, nadalje, da je nit duljine L i fiksirana na krajevima, tako da je

$$u(0,t)=0=u(L,t).$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu riješit ćemo metodom **separacije varijabli**. Pokušajmo naći rješenje oblika $u(x,t)=X(x)T(t)$. Tada diferencijalna jednadžba postaje:

$$XT''=c^2X''T.$$

Dijeleći sa $u=XT$ dobivamo:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ovo je značajan rezultat; lijeva strana nije funkcija od x, a desna nije funkcija od t, ipak su dvije strane jednake. Jedini način da veličina koja ne ovisi o x može biti jednaka veličini koja ne ovisi o t je ako niti jedna od veličina ne ovisi ni o x, ni o t. Kad bi lijeva strana ovisila o t, ne bi mogla biti jednaka desnoj strani, koja ne ovisi o t i obrnuto. Dakle, možemo shvatiti da su obje strane jednake konstanti, koju ćemo zvati ω^2. Ova konstanta je za sad proizvoljna, ali mora biti negativna iz razloga koji će postati očit. Kasnije ćemo identificirati ω kao kutnu frekvenciju.

Sada smo reducirali našu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2$$

i

$$\frac{c^2X''(x)}{X(x)}=-\omega^2.$$

Rješenje prve jednadžbe je bilo koja linearna kombinacija $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$; za pogodnost pišemo ovu funkciju u obliku

$$T(t) = \cos(\omega t + \delta)$$

Sada je jasno da konstanta, $-\omega$, mora biti negativna da bi osigurala titrajuće gibanje niti.

Generalno rješenje druge obične diferencijalne jednadžbe je linearna kombinacija

$$X(x) = A\sin\frac{\omega x}{c} + B\cos\frac{\omega x}{c}.$$

Granični uvjet

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

zahtjeva da je $B = 0$. Granični uvjet

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

zahtjeva da je

$$\sin\frac{\omega L}{c} = 0 \text{ tj. } \frac{\omega L}{c} = n\pi .$$

Tako smo našli da je proizvoljna konstanta ω ograničena na vrijednosti $\frac{n\pi c}{L}$. Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, uz navedene granične uvjete, je:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \delta\right). \tag{3}$$

Pošto je parcijalna diferencijalna jednadžba linearna i homogena, svaka linearna kombinacija rješenja je također rješenje. Zbog toga je generalno rješenje jednadžbe, uz navedene granične uvjete:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \delta_n\right). \tag{4}$$

3. STOJEĆI VALOVI

Razmotrimo ponašanje pojedinačnog izraza:

$$u(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \delta_n\right). \tag{3'}$$

Vrijednost $|A_n|$ se zove **amplituda** titranja; ona predstavlja maksimum pomaka niti iz njenog ravnotežnog položaja. Vrijednost δ_n se zove **faza** titranja.

Kosinusni faktor djeluje samo da promijeni $u(x,t)$ s vremenom, dok «oblik» krivulje ostaje isti. Sve točke na vrpci titraju istovremeno i u svakom trenutku vrpca opisuje sinusoidnu krivulju. Pošto nema pomaka krivulje duž x-osi, ovakva krivulja se zove **stojeći val**.

Pošto

$$\cos\left[\left(\frac{n\pi c}{L}\right)\left(t + 2\frac{L}{nc}\right) + \delta_n\right] = \cos\left[\left(\frac{n\pi c}{L}\right)t + \delta_n\right],$$

nit se vraća u istu poziciju nakon vremenskog intervala $2\frac{L}{nc}$. Ovaj vremenski interval je znan kao **period**, T, mjeren u sekundama. Recipročna vrijednost perioda je **frekvencija**,

$$\nu = \frac{nc}{2L},$$

mjerena u $ciklusima/sekundi$, ili $hercima$. Kutna brzina je jednaka:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Postoje određene točke na vrpci koje ostaju stacionarne. Ove točke zadovoljavaju jednostavnu jednadžbu

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,$$

odgovarajući

$$x = \frac{kL}{n},$$

uz k=0,1,2,…,n. Takve točke se zovu **čvorovi**. Ako su krajnje točke uračunate, ima $(n+1)$ čvorova sveukupno, jednoliko, ekvidistantno postavljenih i udaljenih za L/n. Dvostruka udaljenost između dva čvora se zove **valna duljina**:

$$\lambda = \frac{2L}{n},$$

mjerena u cm. Jedan cijeli ciklus sinusnog vala zahtijeva duljinu vrpce λ. Uspoređujući formule za valnu duljinu i frekvenciju dobivamo važnu jednadžbu:

$$\nu\lambda = c\,.$$

U uvjetima ovih vrijednosti, alternativni oblik za sinusni faktor je

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

i alternativni oblik za kosinusni faktor je

$$\cos(\omega t + \delta_n),\ \cos(2\pi\nu t + \delta_n)\ \text{i}\ \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_n\right).$$

4. VIBRIRAJUĆA NIT UZ ZADANE POČETNE UVJETE

Općenito, kad se rastegnuta nit zatitra, njezino kretanje nije jednostavno, ono stojećeg vala, već složenijeg kretanja koje se mora opisati kao superpozicija stojećeg vala. Zbog toga se moramo vratiti na općenito rješenje valne jednadžbe i odrediti određeno rješenje koje rezultira iz danog niza početnih uvjeta.

Uzet ćemo početne uvjete

$$u = (x,0) = f(x) \text{ i } \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,0) = 0.$$

U vremenu nula nit je puštena iz nultog početnog položaja $f(x)$, brzinom nula.

Primjenjujući drugi granični uvjet dobije se:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\omega \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\delta_n = 0,$$

koje može biti zadovoljeno za sve x, ako svaki $\delta_n = 0$. Iz toga slijedi:

$$u(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega t.$$

U skladu sa prvim graničnim uvjetom:

$$u(x,t) = f(x) = \sum_{N=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \qquad (5)$$

Problem ostaje naći odgovarajuće numeričke vrijednosti koeficijenata A_n. Da bi vrednovao koeficijente, pomnoži jednadžbu (3) sa $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (m je pozitivan integrant), a integriramo od 0 do L. :

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}dx.$$

Svaki integral na desnoj strani je parna funkcija, zbog toga je jednak polovini istog integrala na po intervalu od $-L$ do L. Za vrednovanje istog intervala, zamijenimo:

$$\theta = \frac{nx}{L}$$

i pojednostavimo sumu preko Kronecker delte:

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\theta)\cos(n\theta)dx = \frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \pi\delta_{mn} = \frac{L}{2}A_m$$

ili

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \qquad (6)$$

Tako možemo vrednovati svaki koeficijent kao određeni integral. Amplituda dane frekvencije u cijelom gibanju niti ovisi o produljenju prema kojem početni pomak «liči» na stojeći val te frekvencije.

5. D'ALAMBERTOVO RJEŠENJE VALNE JEDNADŽBE

Valna jednadžba:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad (1)$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \qquad (2)$$

se može lako riješiti ako se transformira na pogodan način, naime, uvodeći nove neovisne varijable:

$$v = x + ct\,,\ z = x - ct\,. \qquad (3)$$

u tada postaje funkcija v i z, i derivacije u valnoj jednadžbi (1) mogu biti izražene preko derivacije vezane uz v i z. Označimo li parcijalne derivacije sa subscriptima, vidimo iz (3) da je

$$v_x = 1 \text{ i } z_x = 1,$$

i zbog toga je:

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z\,.$$

Dalje slijedi:

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x\,.$$

Pošto je $v_x = 1$ i $z_x = 1$, ovo postaje

$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}\,.$$

Druga derivacija u valnoj jednadžbi (1) se transformira po istoj proceduri i rezultat je:

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})\,.$$

Kada uvrstimo ova dva rezultata u valnu jednadžbu (1) dobijemo:

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0\,. \qquad (4)$$

Možemo integrirati ovu jednadžbu po z, te dobijemo

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v),$$

gdje je $h(v)$ proizvoljna funkcija od v. Integriramo li po v, dobijemo:

$$u = \int h(v)dv + \psi(z)$$

gdje je $\psi(z)$ proizvoljna funkcija od z. Pošto je integral funkcija od v, recimo $\phi(v)$, rješenje u je oblika

$$u = \phi(v) + \psi(z)\,.$$

Zbog (3) možemo pisati

$$u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)\,. \qquad (5)$$

Ovaj izraz je poznat kao **d'Alambertovo rješenje** valne jednadžbe (1).

Funkcije ϕ i ψ mogu biti određene iz početnih uvjeta. Ilustrirajmo ovo u slučaju početne brzine nula i zadanog početnog otklona

$$u(x,0) = f(x).$$

Diferencirajući (5) dobijemo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi^{'}(x+ct) - c\psi^{'}(x-ct), \qquad (6)$$

gdje su $\phi^{'}$ i $\psi^{'}$ prve derivacije po $(x+ct)$ i $(x-ct)$. Iz (5), (6) i početnih uvjeta imamo:

$$u(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u(x,0) = c\phi^{'}(x) + c\psi^{'}(x) = 0.$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi $\psi^{'} = \phi^{'}$. Odavde slijedi da je

$$\psi = \phi + k,$$

i iz ovoga i prve jednadžbe,

$$2\phi + k = f$$

ili

$$\phi = (f-k)/2.$$

Uz ove funkcije, ϕ i ψ, rješenje (5) postaje

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]. \qquad (7)$$

Zbog graničnih uvjeta (3) u tom području funkcija f mora biti neparna i imati period $2l$.

Naš rezultat pokazuje da dva početna uvjeta i granični uvjeti određuju jedinstveno rješenje.

7. POPIS LITERATURE

1. Paul W. Berg & James L. McGregor: ELEMENTARY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Holden-Day, Inc. 1964, San Francisco, Preliminary edition, str. 1-6

2. Stanley J. Farlow: PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS, John Wiley & Sons, Inc. 1982, str. 3-8, 123-137

3. Erwin Kreyszig: ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS, second edition, John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney 1962, str. 486-501

4. (?)