

MATEMATIKA 1

KOLOKVIJI 2003./04.

1. kolokvij
2. kolokvij
3. kolokvij

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I:

GRUPA A

7. studenog 2003.

1. Dokažite da je razlika racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
2. Riješite nejednakost: $||x - 1| + |x + 2|| < 4$.
3. Izračunajte $|1 + z|^2 - |1 - z|^2$ ako je $Re(z) = 3$.
4. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

5. (a) Prikažite broj $z = \sqrt{3} - i$ u trigonometrijskom obliku.
(b) Izračunajte z^{23} .

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I:

GRUPA B

7. studenog 2003.

1. (a) Prikažite broj $z = \sqrt{3} + i$ u trigonometrijskom obliku.
(b) Izračunajte z^{21} .
2. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
3. Izračunajte $|1 + z|^2 - |1 - z|^2$ ako je $Re(z) = 2$.
4. Riješite nejednakost: $||x + 1| + |x - 2|| < 4$.
5. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I:

GRUPA C

7. studenog 2003.

1. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2. (a) Prikažite broj $z = -\sqrt{3} - i$ u trigonometrijskom obliku.
(b) Izračunajte z^{27} .
3. Izračunajte $|1 + z|^2 - |1 - z|^2$ ako je $Re(z) = 1$.
4. Riješite nejednakost: $||x - 3| + |x + 1|| < 5$.
5. Dokažite da je razlika racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I:

GRUPA D

7. studenog 2003.

1. Izračunajte $|1 + z|^2 - |1 - z|^2$ ako je $Re(z) = 5$.
2. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

3. Riješite nejednakost: $||x + 3| + |x - 1|| < 5$.
4. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
5. (a) Prikažite broj $z = -\sqrt{3} + i$ u trigonometrijskom obliku.
(b) Izračunajte z^{25} .

1. Izračunajte A^{-1} ako je $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Riješite matricnu jednadžbu: $\det((A+B)^*) \cdot X = (AB)^*$ gdje su A i B matrice zadane s:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = 2I - A.$$

3. Diskutirajte sustav u ovisnosti o realnom parametru λ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(0, 1, 4)$, $B(2, 3, 0)$, $C(2, 3, 2)$. Nađite koordinate polovišta stranica paralelograma $ABCD$ i izračunajte površinu paralelograma određenog tim polovištima.

5. Zadan je pravac $p \dots \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ i ravnina $\Pi \dots 3x + 2y + z = 70$. Nađite pravac p_1 simetričan pravcu p obzirom na ravninu Π i izračunajte kosinus kuta među pravcima p i p_1 .

1. Izračunajte A^{-1} ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Riješite matricnu jednadžbu: $\det((A+B)^*) \cdot X = (AB)^*$ gdje su A i B matrice zadane s:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = 2I - A.$$

3. Diskutirajte sustav u ovisnosti o realnom parametru λ :

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(0, 3, 2)$, $B(2, 1, 6)$, $C(4, 1, 0)$. Nađite koordinate polovišta stranica paralelograma $ABCD$ i izračunajte površinu paralelograma određenog tim polovištima.

5. Zadan je pravac $p \dots \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ i ravnina $\Pi \dots 2x + 3y + z = 70$. Nađite pravac p_1 simetričan pravcu p obzirom na ravninu Π i izračunajte kosinus kuta među pravcima p i p_1 .

1. Izračunajte A^{-1} ako je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Riješite matricnu jednadžbu: $\det((A+B)^*) \cdot X = (AB)^*$ gdje su A i B matrice zadane s:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = I - A.$$

3. Diskutirajte sustav u ovisnosti o realnom parametru λ :

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(4, 1, 2)$, $B(2, 3, 6)$, $C(0, 1, 0)$. Nađite koordinate polovišta stranica paralelograma $ABCD$ i izračunajte površinu paralelograma određenog tim polovištima.

5. Zadan je pravac $p \dots \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ i ravnina $\Pi \dots x + 2y + 3z = 70$. Nađite pravac p_1 simetričan pravcu p obzirom na ravninu Π i izračunajte kosinus kuta među pravcima p i p_1 .

1. Nađite sljedeće limese bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x},$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

2. Derivirajte zadane funkcije:

a) $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} + \sin 2x \cdot \ln(1 - x^2),$

b) $\tan 2y = xy,$

c) $f(x) = x^{\sin 2x}$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{3} \arcsin(\sqrt{x+1})$

a) Nađite domenu od f .

b) Nađite tangentu na graf te funkcije u točki gdje graf siječe pravac $x = -\frac{1}{2}$.

c) Odredite kut između normale na tu tangentu i x -osi.

4. a) Odsječku parabole $y = 2x^2$, odsječenom pravcem $y = 30$, upišite pravokutnik maksimalne površine čija jedna stranica leži na tom pravcu.

b) Koristeći linearnu aproksimaciju i dobivenu vrijednost za stranicu pravokutnika u a) zadatku, izračunajte približno površinu tog maksimalnog pravokutnika i usporedite sa točnom vrijednošću izračunatom u a) zadatku.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ (ne morate tražiti točke infleksije).

1. Nađite sljedeće limese bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x},$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

2. Derivirajte zadane funkcije:

a) $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} + \sin 2x \cdot \ln(1 - x^2),$

b) $\tan 2y = xy,$

c) $f(x) = x^{\sin 2x}$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{3} \arcsin(\sqrt{x+1})$

a) Nađite domenu od f .

b) Nađite tangentu na graf te funkcije u točki gdje graf siječe pravac $x = -\frac{1}{2}$.

c) Odredite kut između normale na tu tangentu i x -osi.

4. a) Odsječku parabole $y = 2x^2$, odsječenom pravcem $y = 30$, upišite pravokutnik maksimalne površine čija jedna stranica leži na tom pravcu.

b) Koristeći linearnu aproksimaciju i dobivenu vrijednost za stranicu pravokutnika u a) zadatku, izračunajte približno površinu tog maksimalnog pravokutnika i usporedite sa točnom vrijednošću izračunatom u a) zadatku.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ (ne morate tražiti točke infleksije).

1. Nađite sljedeće limese bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 5} - x),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 3x}{x + \sin 2x},$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+2}$

2. Derivirajte zadane funkcije:

a) $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x} + \sin 3x \cdot \ln(1-x^2),$

b) $\tan 3y = xy,$

c) $f(x) = x^{\sin 3x}$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin(\sqrt{x+1})$

a) Nađite domenu od f .

b) Nađite tangentu na graf te funkcije u točki gdje graf siječe pravac $x = -\frac{1}{2}$.

c) Odredite kut između normale na tu tangentu i x -osi.

4. a) Odsječku parabole $y = 2x^2$, odsječenom pravcem $y = 30$, upišite pravokutnik maksimalne površine čija jedna stranica leži na tom pravcu.

b) Koristeći linearnu aproksimaciju i dobivenu vrijednost za stranicu pravokutnika u a) zadatku, izračunajte približno površinu tog maksimalnog pravokutnika i usporedite sa točnom vrijednošću izračunatom u a) zadatku.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 6x + 3}$ (ne morate tražiti točke infleksije).

1. Nađite slijedeće limese bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 5} - x),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 3x}{x + \sin 2x},$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+2}$

2. Derivirajte zadane funkcije:

a) $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x} + \sin 3x \cdot \ln(1-x^2),$

b) $\tan 3y = xy,$

c) $f(x) = x^{\sin 3x}$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin(\sqrt{x+1})$

a) Nađite domenu od f .

b) Nađite tangentu na graf te funkcije u točki gdje graf siječe pravac $x = -\frac{1}{2}$.

c) Odredite kut između normale na tu tangentu i x -osi.

4. a) Odsječku parabole $y = 2x^2$, odsječenom pravcem $y = 30$, upišite pravokutnik maksimalne površine čija jedna stranica leži na tom pravcu.

b) Koristeći linearnu aproksimaciju i dobivenu vrijednost za stranicu pravokutnika u a) zadatku, izračunajte približno površinu tog maksimalnog pravokutnika i usporedite sa točnom vrijednošću izračunatom u a) zadatku.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 6x + 3}$ (ne morate tražiti točke infleksije).