Poglavlje 1

Skupovi i brojevi

1.1 Skupovi

Skup je osnovni pojam koji označava kolekciju (zbir, mnoštvo, skup) nekih elemenata. Zadati skup znači točno odrediti koji mu elemnti pripadaju. Ako neki element x pripada skupu A (tj. ako je sadržan u njemu), pišemo $x \in A$ i kažemo *x je element od A.*

Definicija 1.1.1 *Ako je svaki element skupa A također element skupa B, onda kažemo da je A poskup od B i pišemo $A \subseteq B$.*

Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, kažemo da su skupovi A i B jednaki i pišemo $A = B$. Skup koji ne sadrži nitijedan element nazivamo prazan skup i označavamo ga sa $\emptyset$.

1. Navedite elemente slijedećih skupova:

   a) $\{1, 2, 3\}$,
   b) $\{\{1, 3\}, 2\}$
   c) $\{\{1, 2, 3\}\}$

   Koji od ta tri skupa ima najviše elemenata?

2. Ako su A, B i C skupovi i ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, onda je $A \subseteq C$. Dokažite!

3. Je li relacija $2 \in A$ ispravna u slijedećim slučajevima:

   a) $\{2, 3, 5\}$,
   b) $\{\{2\}, 3\}$
   c) $\{\{1, 2, 3\}, 2\}$

Definicija 1.1.2 *Pod presjekom dva skupa A i B podrazumijevamo skup $A \cap B$ koji sadrži elemente koji se nalaze u oba početna skupa, tj.*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad i \quad x \in B\}.$$

Unija dva skupa A i B je najmanji skup $A \cup B$ koji sadrži sve elemente iz A i sve elemente iz B. Drugim riječima,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \textit{ili} \quad x \in B\}$$

.

1. Neka su X, T, T' skupovi. Pokažite da:

   $$S \cap (T \cup T') = (S \cap T) \cup (S \cap T')$$

   i da, ako su $T_1, ..., T_n$, skupovi, vrijedi općenito:

   $$S \cap (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n) = (S \cap T_1) \cup ... \cup (S \cap T_n).$$

2. Zamijenite $\cap$ i $\cup$ u gornjem zadatku i dokažite dobivene tvrdnje.

   Definicija 1.1.3 *Neka su zadana dva skupa A i B. Skup koji dobijemo tako da iz skupa A odstranimo sve elemente koji se nalaze i u skupu B, zove se razlika skupova A i B i označava sa $A \backslash B$. Dakle,*

   $$A \backslash B = \{x \mid x \in A \quad i \quad x \notin B\}.$$

3. Neka je zadan pravac S i neka su $t_0,\ t_1$ točke tog pravca. Od čega se sastoji $S \backslash \{t_o,\ t_1\}$?

4. Uvjerite se da je $A \backslash A \cap B = A \backslash B$.

5. Neka A^c označava komplement skupa, tj. $A^c = \Omega \backslash A = \{x \mid x \notin A\}$. Dokažite da:

   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
   $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

6. Neka $X \times Y$ označava Kartezijev produkt skupova, tj.

   $$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ i } y \in Y\}.$$

   Dokažite da:

   $$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$$
   $$(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$$

7. Dovedite u vezu Kartezijev produkt $\{a, b, c, d, e, f, g\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i oznake za polja šahovske ploče.

8. Zadani su intervali I_1 i I_2. Odredite $I_1 \cap I_2$ i $I_1 \cup I_2$. Da li je u svakom od ovih slučajeva $I_1 \cup I_2$ interval:

   a) $I_1 = \left(-4, \frac{1}{3}\right), \quad I_2 = (0, 5]$
   b) $I_1 = (-\infty, 1], \quad I_2 = \left[0, \frac{13}{2}\right]$
   c) $I_1 = [2, 7), \quad I_2 = (9, +\infty)$
   d) $I_1 = [-1, 2], \quad I_2 = [2, +\infty)$

9. Zapišite kao intervale skupove $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$.

   Rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^- &= (-\infty, 0), \\ \mathbb{R}^+ &= (0, +\infty), \\ \mathbb{R}_0^+ &= [0, +\infty), \\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+ &= (-\infty, 0). \end{aligned}$$

10. Prikažite u ravnini skupove:

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \mid x \leq y \leq x^2\} \\ S &= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ S &= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\} \\ S &= \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\} \\ S &= \{(x,y) \mid x = y, y \in \{1,2,3,5\}\}. \end{aligned}$$

11. Dokažite da je $S = T$ gdje je

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + 5x + 2 = 0\} \\ \text{i} \quad T &= \{-1, -\frac{2}{3}\}. \end{aligned}$$

12. Prikazati koordinatnoj ravnini točke (x,y) za koje vrijedi:

$$\text{(a)} \quad xy(x^2 - y^2) > 0 \qquad \text{(b)} \quad (x^2 - 1)(x^2 - y^2) < 0.$$

13. Nacrtati skup

$$\Big\{(x,y) \;\Big|\; y < x\Big\} \cap \Big\{(x,y) \;\Big|\; y > -\frac{1}{2}(x-3)\Big\}.$$

1.1.1 Iracionalni i algebarski brojevi

Definicija 1.1.4 *Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo prikazati u obliku razlomka s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom, dakle brojevi koji ne pripadaju skupu* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Algebarski brojevi su nule polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima tj. to su oni brojevi x_0 *za koje postoji polinom* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *takav da* $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{Z}$ *za svakoj i*

$$f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

1. Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj. Pokažite da tvrdnja vrijedi općenito za $\sqrt{p}$ gdje je p prost.

2. Dokažite da je za broj x_0 dovoljno naći polinom s racionalnim koeficijentima koji x_0 poništava da bi x_0 bio algebarski.

3. Dokažite da su brojevi

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{13}-3}, \qquad \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{5}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{2}}$$

algebarski.

Rješenje: Dokazat ćemo tvrdnju za treci broj, $\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{5}}$. Stavimo $\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{5}} = x$ i računamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2}-2 &= \sqrt[3]{5}x \\
\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}x &= 2 \qquad \backslash^3 \\
2-3\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}x+3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5^2}x^2-5x^3 &= 8 \\
2-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}x(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}x)-5x^3 &= 8
\end{aligned}$$

Sada uočimo da je (vidi drugu jednakost) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}x = 2$ i uvrstimo to u nas izraz pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
2-6\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}x-5x^3 &= 8 \\
6\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}x &= -6-5x^3 \qquad \backslash^3 \\
6^3\cdot 2\cdot 5x^3-(5x^3+6)^3 &= 0
\end{aligned}$$

što je traženi polinom.

1.1.2 Matematicka indukcija

Princip matematičke indukcije: Pretpostavimo da je za svaki pozitivni cijeli broj dana tvrdnja $T(n)$, i da možemo dokazati sljedeće:

(1) Pretpostavka $T(1)$ je istinita, tj. tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

(2) Ako $T(n)$ vrijedi za neki prirodni broj n, onda vrijedi i $T(n+1)$ (tj. ako tvrdnja vrijedi za n, onda vrijedi i za $n+1$).

Zaključak: $T(n)$ vrijedi za sve pozitivne cijele brojeve n, tj. $T(n)$ je istinito za svaki n. *Napomena:* Jedan ne mora nužno biti prvi broj za koji provjeravamo pretpostavku, tj. baza indukcije. Obično je u zadatku navedano od kuda treba krenuti tj, koji je prvi broj od kojeg tvrdnja vrijedi. To može biti čak i nula.

1. Dokažite sljedeće tvrdnje za sve prirodne brojeve:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2. Dokažite da za sve brojeve $x \neq 1$ vrijedi:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

3. Dokažite indukcijom da je (za $a \neq 1$)

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

i iz te tvrdnje izvedite formulu:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

za $a \neq b$.

4. Neka $\binom{n}{k}$ označava binomni koeficijent

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdje su $n, k \in \mathbb{N} \cup 0$ i $n!$ produkt $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$
(0! je po definiciji 1). Koristeći definiciju, dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ za k > 0

5. Dokažite indukcijom da

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

6. Dokažite indukcijom da je broj $13^{2n} + 6$ (gdje je $n \in \mathbb{N} \cup 0$) djeljiv sa 7.

Rješenje:

baza indukcije: $n = 0 \Rightarrow 13^{2n} + 6 = 7$ a to je djeljivo sa 7.

korak: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj. da $13^{2n} + 6 = 7N$ gdje je N prirodan broj ili nula. Tada je

$$13^{2n+2} + 6 = 169 \cdot 13^{2n} + 6 = 169(7N - 6) + 6 = 7(169N - 24 \cdot 6)$$

a to je po pretpostavci indukcije djeljivo sa 7.

7. Dokazati da je $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljivo sa 64 ako je n prirodan broj.

Rješenje:

korak: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj. da $3^{2n+2} - 8n - 9 = 64N$ gdje je N prirodan broj. Tada za $n + 1$ imamo

$$3^{2n+4} - 8n - 17 = 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 = 9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n+1) = 7(169N - 24 \cdot 6)$$

a to je po pretpostavci indukcije djeljivo sa 64.

8. Dokažite da je broj $11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6$ djeljiv sa 8 ako je n prirodni broj.

9. Dokažite nejednakosti:

$$\begin{aligned} 2^n &> n, && n \in \mathbb{N} \cup 0 \\ 2^n &> n^2, && n \in \{5, 6, 7, \ldots\} \\ 2^n &> n^3, && n \in \{10, 11, 12, \ldots\} \\ 3^n &> n^4, && n \in \{8, 9, 10, \ldots\}. \end{aligned}$$

Rješenje:

baza indukcije $2^0 = 1 > 0$

korak: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj. da $2^n \geq n$. Sada imamo

$$\begin{aligned} & 2^n \geq 1 \\ \text{i} \quad & 2^n > n \end{aligned}$$

što zbrajanjem daje $2 \cdot 2^n > n + 1$ kao što smo i htjeli.

Posljednja tvrdnja:

baza indukcije $3^8 = 6561 > 4096 = 8^4$

korak: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj. da $3^n > n^4$. Pretpostavimo da je istinita i nejednakost

$$3 > \frac{(n+1)^4}{n^4}. \tag{1.1}$$

Onda množenjem te dvije nejednakosti odmah izlazi tvrdnja indukcije. Preostaje dokazati nejednakost (1). Koristimo jednakost

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = 1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}.$$

Kako je

$$\frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} < 1 \qquad \text{za} \quad n = 6, 7, \ldots$$

slijedi

$$\frac{(n+1)^4}{n^4} < 3 \qquad \text{za} \quad n = 6, 7, \ldots$$

pa nejednakost (1) vrijedi za $n > 6$.

1.1.3 Apsolutna vrijednost realnog broja

Definicija 1.1.5 *Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se kao:*

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Dakle, $|x|$ je jedinstveni pozitivni broj a takav da $a^2 = x^2$. Vidimo da je $|x| = |-x|$ i također:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:

AV 1 Za sve $x \in R$ je $|x| \geq 0$ i $|x| > 0$ ako $x \neq 0$.

AV 2 $|xy| = |x|\ |y|$ za sve $x, y \in R$.

AV 3 $|x+y| \leq |x| + |y|$ za sve $x, y \in R$
(pri tome $|x+y| = |x| + |y|$ ako i samo ako su x i y istog predzanaka).

Prva tvrdnja je očita. Za AV 2 imamo:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\ |y|.$$

AV 3 slijedi iz

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)^2 &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x|\ |y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Jednakost u izrazu dobivamo ako i samo ako

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \\ \Leftrightarrow xy &= |xy| \\ \Leftrightarrow xy &\geq 0 \end{aligned}$$

a to znači da su x i y istog predznaka.

1. Dokažite sljedeće nejednakosti za $x, y \in R$:

$$\begin{aligned} |x+y| &\geq |x| - |y| \\ |x-y| &\geq |x| - |y| \\ |x-y| &\geq |y| - |x| \\ |x| &\leq |x+y| + |y| \end{aligned}$$

2. Ako su $x, y \geq 0$, pokažite da vrijedi:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

3. Neka su b, ϵ brojevi i $\epsilon > 0$. Pokažite da broj x zadovoljava uvjet $|x-b| < \epsilon$ ako i samo ako

$$b - \epsilon < x < b + \epsilon.$$

4. Uz oznake kao u prethodnoj vježbi pokažite da postoje točno dva broja x koja zadovoljavaju uvjet $|x-b| = \epsilon$ i grafički interpretirajte vježbe 3 i 4.

5. Odredite sve intervale brojeva koji zadovoljavaju sljedeće jednakosti i nejednakosti:

(a) $\quad x + |x-2| = 1 + |x|, \qquad$ (b) $\quad |x-3| + |x-1| \leq 4.$

6. Ako je $a > 0$, u koordinatnoj ravnini odredite sve točke (x, y) koje zadovoljavaju uvjet

$$||x+a| - |y-a|| < a.$$

7. Grafičkim putem rješiti nejednadžbu:

$$|x+1| + |y-2| \leq 1.$$

8. Riješite nejednakosti:

   (a) $x + |x| < 1$,

   (b) $x - |x| > 2$,

   (c) $|x^2 - x| + x > 1$,

   (d) $\sin x + |\sin x| > 1$.

9. Definiramo *udaljenost* $d(x, y)$ između dva broja x, y kao $|x - y|$. Pokažite da tako definirana funkcija udaljenosti ima sljedeća svojstva

   D1 $d(x, y) = d(y, x)$,

   D2 $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,

   D3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in R$
   (i jednakost ako i samo ako z leži između x i y).

10. Dokažite indukcijom da za brojeve $x_1, x_2, \ldots x_n$ vrijedi:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|$$

1.1.4 Kompleksni brojevi

Definicija 1.1.6 *Kompleksan broj je uređeni par (a, b) realnih brojeva.*

Neka su $x = (a, b)$ i $y = (c, d)$ dva kompleksna broja. Iz definicije uređenih parova izlazi da je $x = y$ ako i samo ako $a = c$ i $b = d$. Dalje definiramo:

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c, b + d), \\ xy &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Trivijalno slijedi da za realne brojeve a i b imamo:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

Navedene tvrdnje daju da, uz identifikaciju $a = (a, 0)$, realne brojeve možemo promatrati kao podskup kompleksnih.

Definicija 1.1.7 *Uvodimo novu oznaku, imaginarnu jedinicu: $i = (0, 1)$.*

Propozicija 1.1.8 *Vrijedi: $i^2 = (-1, 0) = -1$. Dalje, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, onda $(a, b) = a + ib$.*

Dokaz: Trivijalan. □

Definicija 1.1.9 *Ako su a i b realni brojevi i $z = a + bi$, onda kažemo da je kompleksni broj $\overline{z} = a - bi$ konjugiran broju z. Brojevi a i b se zovu realni, odnosno imaginarni dio od z.*

Ponekad pišemo:

$$a = Re(z), \quad b = Im(z).$$

Vrijedi:

Propozicija 1.1.10 *Ako su z i w kompleksni brojevi, onda:*

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

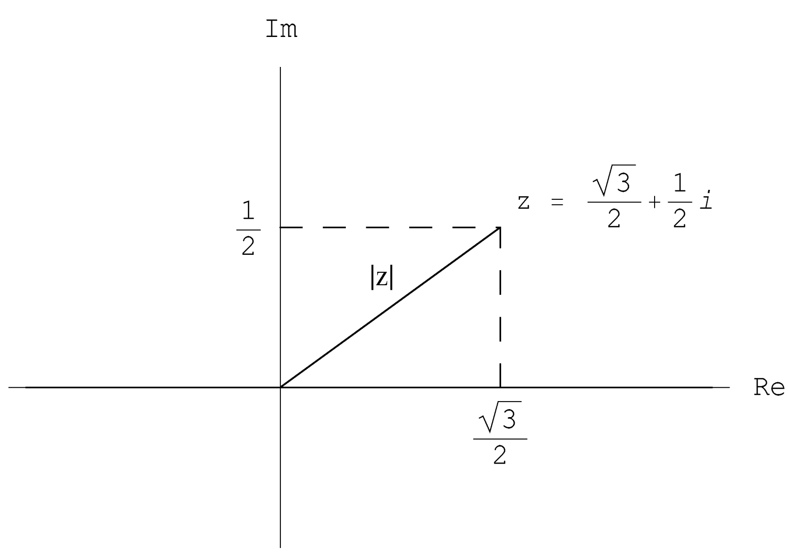
(c) $z + \overline{z} = 2Re(z),\ z - \overline{z} = 2iIm(z)$

(d) $\overline{\overline{z}} = z$

(e) $z\overline{z}$ *je realan i pozitivan (osim za $z = 0$ kada je $z\overline{z} = 0$).*

Dokaz: Trivijalno. □

Definicija 1.1.11 *Ako je z kompleksni broj, njegova apsolutna vrijednost ili modul $|z|$ se definira kao drugi korijen od $z\overline{z}$ tj. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. U kompleksnoj ravnini, za $z = (x, y) = x + iy$, apsolutna vrijednost $|z|$ možemo predočiti kao udaljenost točke z od ishodišta (vidi sliku).*



Slika 1.1: Prikaz kompleksnog broja u kompleksnoj ravnini

Propozicija 1.1.12 *Neka su z i w kompleksni brojevi. Onda*

(a) $|z| > 0$ *za* $z \neq 0$ *i* $|0| = 0$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z|\ |w|$,

(d) $|Re(z)| \leq |z|$,

(e) $|z+w| \leq |z| + |w|$
a jednakost vrijedi ako i samo ako su z i w na istoj zraci kroz ishodište.

Dokaz: Dokazat ćemo jedino tvrdnju *(e)*, ostale su trivijalne. Primjetimo da vrijedi: $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w$ pa je $z\overline{w} + \overline{z}w = 2Re(z\overline{w})$. Stoga

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z|\ |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Jednakost gornjem izrazu vrijedi ako i samo ako:

$$\begin{aligned} Re(z\overline{w}) = |z\overline{w}| &\Leftrightarrow z\overline{w} = \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow z|w|^2 = \alpha w \\ &\Leftrightarrow w = 0 \text{ ili } z = \frac{\alpha}{|w|^2} w \\ &\Leftrightarrow z \text{ i } w \text{ su na istoj zraci kroz ishodište.} \end{aligned}$$

□

Neka je $a + bi$ kompleksni broj apsolutne vrijednosti jedan, tj. neka $a^2 + b^2 = 1$. Znamo da onda postoji jedinstveni realni broj $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi)$ takav da $a = \cos\theta$ i $b = \sin\theta$. Dakle, možemo napisati

$$z = a + bi = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Neka je sada $z = x + iy$ proizvoljan kompleksni broj različit od nule . Onda je apsolutna vrijednost broja $z \setminus |z|$ jednaka jedan. Slijedi da postoji kut θ takav da

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

tj.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Takav zapis zovemo *polarnom formom* ili *trigonometrijskim oblikom* od z, a $(|z|, \theta)$ zovemo *polarnim koordinatama* kompleksnog broja (pri tome je θ *argument*, $arg(z)$, a $|z|$ *modul*).

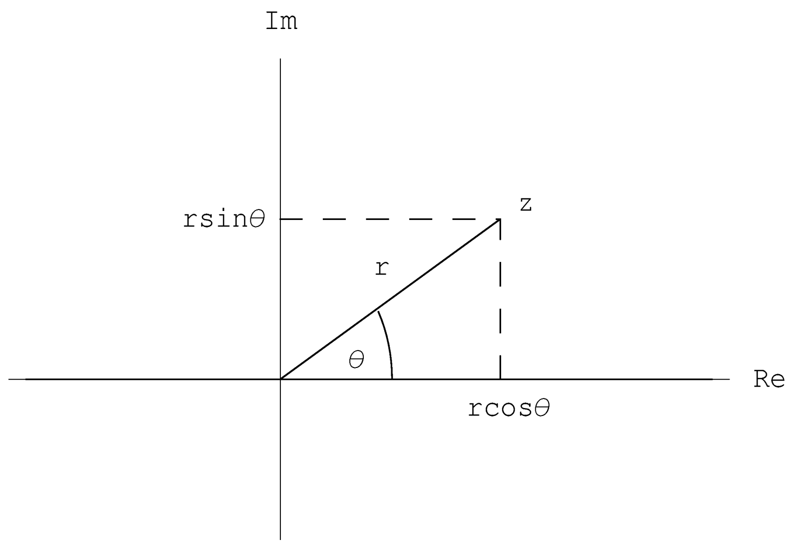
Očito (vidi gornju sliku)

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{i} \quad y = |z|\sin\theta$$

i dva kompleksna broja $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ su jednaka ako i samo ako

$$|z_1| = |z_2| \qquad \text{i} \qquad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

gdje $k \in \mathbb{Z}$.



Slika 1.2: Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Neka su sada $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \ldots, z_n = |z_n|(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ kompleksni brojevi. Matematičkom indukcijom lako se dokazuje da vrijedi formula:

$$z_1 z_2 \ldots z_n = |z_1||z_2|\ldots|z_n|(\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)),$$

iz čega odmah slijedi:

$$arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = arg(z_1) + arg(z_2) + \ldots + arg(z_n) + 2k\pi, \qquad \text{gdje} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prethodna formula pokazuje nam također kako se potenciraju kompleksni brojevi; ako uvrstimo $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, dobivamo:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

(Za $|z| = 1$ to je poznata Moivreova formula).

Neka je zadan kompleksni broj $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Kompleksni broj $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ za koji vrijedi $w^n = z$ zove se *n-ti korijen broja z.* U tom slučaju pišemo:

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Ta jednakost poprima sljedeći oblik

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

iz čega izjednačavanjem modula i agrumenta (jednakost kompleksnih borjeva u trigonometrijskom obliku!) slijedi:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \text{i} \qquad \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

1. Ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksni brojevi, dokažite da:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

2. Ako su z i w kompleksni, pokažite da:

$$||z|-|w|| \leq |z-w|.$$

3. Neka je z kompleksan broj takav da $|z|=1$. Izračunajte $|1+z|^2+|1-z|^2$.

4. Riješite jednadžbe:

   (a) $|z+1|+z+i=0$,

   (b) $z^2+iz+1=0$,

   (c) $\left|\frac{z}{z+i}\right|=1 \quad$ i $\quad \frac{z}{\overline{z}}=1$,

   (d) $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|$.

5. Dokažite da

$$Re(z)>0 \quad \text{i} \quad Re(a)>0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{a-z}{\overline{a}+z}\right|<1.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} |a-z|^2-|\overline{a}+z|^2 &= (a-z)(\overline{a}-\overline{z})-(\overline{a}-z)(a-\overline{z}) \\ &= -(a\overline{z}+\overline{a}z+az+\overline{a}\overline{z}) \\ &= -(a+\overline{a})(z+\overline{z}) \\ &= -4Re(a)\cdot Re(z). \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$|a-z|^2-|\overline{a}+z|^2<0 \quad \Rightarrow \quad |a-z|^2<|\overline{a}+z|^2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a-z}{\overline{a}+z}\right|<1.$$

6. Skicirajte u kompleksnoj ravnini brojeve koji zadovoljavaju sljedeće nejednakosti:

$$|z-i|\leq 1 \qquad \text{i} \qquad |z-1|\leq 1.$$

Rješenje: Presjek krugova $x^2+(y-1)^2\leq 1$ i $(x-1)^2+y^2\leq 1$.

7. Geometrijski prikazati rješenja sljedeće jednadžbe:

$$Re((1+i)z)=0.$$

Rješenje: Pravac $y=x$.

8. Pokažite da je

$$Im(\frac{z-z_1}{z_2-z_1})=0$$

jednadžba pravca koji prolazi fiksnim točkama z_1 i z_2 te nacrtati skup koji zadovoljava $Im(\frac{z-z_1}{z_2-z_1})>0$.

9. Izračunajte:

$$\text{(a)} \qquad (1-i)^{15} \qquad\qquad \text{(b)} \qquad (3-i\sqrt{3})^7.$$

10. Dokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj za k prirodan broj, $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Primjetimo da je

$$(1+i)^2 = 2i \quad \text{i} \quad (1+i)^4 = -4.$$

Odatle odmah slijede tvrdnje zadatka.

11. Neka je $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Dokažite da

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Zaključite da $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

12. Neka je w kompleksni broj i neka $w \neq 0$. Pokažite da postoje dva različita kompleksna broja takva da je njihov kvadrat w.

13. Neka je n pozitivan cijeli broj. Pokažite da postoji točno n razičitih kompleksnih brojeva z takvih da $z^n = 1$. Napišite te brojeve u polarnoj formi i skicirajte ih u kompleksnoj ravnini.

14. Ako je θ realan, pokažite da

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

Zadaci sa rokova:

1. Odredite trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^{12}\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})}{(i-1)^8}$.

2. Odredite zbroj rješenja jednadžbe $(z+2i)^6 = (1+i)^{12}$.

3. U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $(z-2i)^8 = 3^8$.

4. U skupu $\mathbb{C}$ riješite sustav jednadžbi: $\left|\frac{z-8i}{12-z}\right| = \frac{3}{5}, \left|\frac{z-8}{4-z}\right| = 1$.

5. Riješite u skupu $\mathbb{C}$ jednadžbu $|z+1-2i| = |z|$ i rješenje predočite u ravnini.

6. U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžu $(z+6-2i)^4 = 3^4$.

7. Odredite zbroj rješenja jednadžbe: $z^4 + 2 + 2\sqrt{3}i = 0$.

8. (a) Izračunajte $(1-\sqrt{3}i)^6$ (b) Riješite u $\mathbb{C}$ jednadžbu $z^4 = (1-\sqrt{3}i)^6$.

9. Odredite $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju sustav $\arg(z^4 \cdot i^{25}) = \pi/2$, $|z| = 1$.