Poglavlje 1

Funkcije

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Definicija 1.1.1 *Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa f, svakom elementu x iz X pridružen točno jedan element y iz Y, kažemo da je na skupu X zadana funkcija f sa vrijednostima u Y.*

To simbolički označavamo sa $f : X \longrightarrow Y$. Skup X nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije f, a skup Y *područje vrijednosti* ili *kodomena* of f. Vrijednost x zovemo ponekad *varijabla*. Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, kažemo da je f *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija $f : X \longrightarrow Y$. Podskup skupa Y,

$$f(X) = \{y|y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije f*.

Graf realne funkcije realne varijable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$.

1. Izračunajte $f(-1), f(0), f(1), f(3)$ i $f(5)$ ako je $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.
2. Neka je $f(x) = 2x + 3$. Odredite:
   (a) $f(-2), f(1)$ i $f(\frac{1}{4})$,
   (b) $f(a^2)$,
   (c) $f^2(a)$,
   (d) $f(1) - f(-1)$ i $f(a^2 + 1) - f^2(a + 1)$.
3. Odredite $f(0), f(-1)$ i $\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$ ako je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4. Odredite linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ ako je
   (a) $f(-2) = 10$ i $f(1) = -5$,
   (b) $f(-3) = 3$ i $f(b) = 0$.
5. Odredite kvadratnu funkciju $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ako je:

(a) $f(-1) = -1, f(3) = -3$ i $f(6) = 12$,

(b) $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$ i $f(2\sqrt{2}) = -7$.

6. Neka je dano pridruživanje:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 3x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Da li je f funkcija?

7. Neka je

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Pokažite da je

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

8. Izračunajte $f(x+1)$ ako je $f(x-1) = x^2$.

9. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

napišite pomoću jedne formule koristeći se oznakom apsolutne vrijednosti.

10. Odredite graf funkcije f, Γ_f, ako je:

(a) $f(x) = 3x + 4 \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{i} \quad x \in [-1, 1]$

(c) $f(x) = |x| \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = A \sin 2x \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$,

(e) $f(x) = x + \cos x \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$,

(f) $f(x) = \arctan(x+1) - 1 \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$,

(g) $f(x) = \arcsin(\sin x) \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.2 *Za funkciju $f : X \longrightarrow Y$ kažemo da je injekcija ako za bilo koja dva elementa $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili, ekvivalentno tome, ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Ako je $f(X) = Y$, tj. ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, kažemo da je f surjekcija. Za funkciju koja je istovremeno i surjekcija i injekcija, kažemo da je bijekcija.*

1. Provjerite injektivnost slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = 3$, (b) $f(x) = 2x + 1$, (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-x}$.

2. Pokažite da je funkcija $f : [-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = x^2 + 2x + 3$ injektivna.

3. Neka je $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Odredite Y tako da $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ bude surjekcija.

Definicija 1.1.3 *Neka su zadane dvije funkcije,* $f : X \longrightarrow Y$ *i* $g : Y_1 \longrightarrow Z$ *uz uvjet* $Y \subset Y_1$*. Funkcija koja svakom elementu* $x \in X$ *pridružuje element* $g(f(x)) \in Z$ *zove se kompozicija funkcija* f *i* g *i označava sa* $g \circ f$*.*

Dakle, po definiciji je

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada $f : X \longrightarrow Y$ injekcija. Onda za svaki element $y \in f(x)$ postoji jedinstveni $x \in X$ takav da je $y = f(x)$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, f^{-1}.

Definicija 1.1.4 *Funkcija* $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ *koja svakom elementu* $y \in f(X)$ *pridružuje* $x \in X$ *sa svojstvom da* $f(x) = y$ *zove se inverzna funkcija polazne funkcije* f*.*

Jasno, ako je polazna funkcija f bijekcija, onda $f(X) = Y$ pa imamo $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. U tom slučaju očito vrijedi

$$f^{-1} \circ f = id_X \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

1. Neka je $f(x) = x^3 - x$. Odredite:

   $$\text{(a)} \quad f \circ f, \qquad \text{(b)} \quad f \circ (f \circ f)(-1).$$

2. Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. Da li vrijedi $f \circ g = g \circ f$? Za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f \circ g(x) = g \circ f(x)$?

3. Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ i $h(x) = x^2 + 3$. Provjerite: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   Napomena: Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije f, g i h za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

4. Neka je $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ i $h(x) = x^2$. Da li vrijede jednakosti:

   $$\text{(a)} \quad k \circ (g + f) = k \circ g + k \circ f, \qquad \text{(b)} \quad (g + f) \circ h = g \circ h + f \circ h?$$

5. Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju ako je

   (a) $f(x) = x^2 - 1$,

   (b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$,

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$,

   (d) $f(x) = (5 + 3^x)^2$.

Definicija 1.1.5 *Funkciju* $f(x)$ *definiranu u simetričnom području* $-l < x < l$ *(ovdje* $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$*) nazivamo parnom ako je* $f(-x) = f(x)$ *i neparnom ako je* $f(-x) = -f(x)$ *za svako* x *iz domene od* f*.*

1. Odredite parnost ili neparnost slijedećih funkcija:

   (a) $f(x) = x^2 - x^4$,

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$,

(c) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$,

(d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,

(e) $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2)\sin x}$,

(f) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

2. Dokažite da svaku funkciju koja je definirana na simetričnom intervalu $-l < x < l$ možemo predočiti kao zbroj parne i neparne funkcije.

3. Dokažite da je produkt dviju parnih ili dviju neparnih funkcija parna funkcija, a produkt parne funkcije sa neparnom da je neparna funkcija.

Definicija 1.1.6 *Funkciju f nazivamo periodičkom ako postoji pozitivan broj T takav da je $f(x+T) = f(x)$ za sve x iz domene od f. Najmanji pozitivan broj T sa gornjim svojstvom naziva se period od f.*

1. Provjerite da li sljedeće funkcije periodične i ako jesu, odredite njihov period.

   (a) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$,

   (b) $f(x) = 3\cos x + \cos 2x$,

   (c) $f(x) = \cos 3\pi x + \sin 2\pi x$,

   (d) $f(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$,

   (e) $f(x) = 2^{\sin x}$.

Definicija 1.1.7 *Neka je formulom zadana neka funkcija f. Područje definicije te funkcije je skup svih onih realnih brojeva za koje propisane operacije u formuli daju određenu realnu vrijednost. Taj skup realnih brojeva označavamo sa $D(f)$.*

1. Odredite domenu od f ako je:

   (a) $f(x) = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$,

   (b) $f(x) = \sqrt{\sin(\arcsin x)} + \sqrt{x^3 - \frac{1}{4}x}$,

   (c) $f(x) = \log_x\left(-x^4 + 245x^2 - 9604\right) + \frac{\sqrt{\sin x}}{x-8}$,

   (d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{(x+1)^2}}$,

   (e) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + (1 - \log_2 x)^{-2}$,

   (f) $f(x) = \sqrt{\arcsin x + \arccos x} + \sqrt{\log_x(x - 0.5)}$,

   (g) $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \log \frac{2+x}{2-x}$,

   (h) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(\log^2_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x - 2)$,

   (i) $f(x) = \sqrt[4]{\log^2_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} x - 6} + \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

   (j) $f(x) = (\log_3 x - \frac{1}{9}\log_x 3)^{-1}((1-2x)(5x-6-x^2))^{\frac{1}{2}}$.

1.2 Limesi

1.2.1 Definicija i osnovna pravila računanja

Definicija 1.2.1

1° *Limes niza: Broj* a *nazivamo limesom niza* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *i označavamo*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ *postoji takav broj* $N = N(\varepsilon)$ *da je*

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{za} \quad n > N.$$

2° *Limes funkcije: Kažemo da funkcija* f *teži u* A*, (oznaka* $f(x) \to A$*) kada* x *teži u* a*, (oznaka* $x \to a$*) i pišemo*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *takav da je*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{za} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Analogno je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

ako je $|f(x) - A| < \varepsilon$ *za* $|x| > N(\varepsilon)$*. Po dogovoru pišemo*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

ako za svaki pozitivan broj E *možemo naći* $\delta(E) = \delta > 0$ *tako da je*

$$|f(x)| > E \qquad \text{za} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Vrijedi sljedeće: ako postoje limesi $\lim_{x\to a} f_1(x)$ i $\lim_{x\to a} f_2(x)$, onda

1) $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$,

2) $\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$,

3) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ ako $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

1. Koristeći definiciju limesa, dokažite:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+2} \neq 1$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 31n + 4}{2n^2 + 17n - 57} = \frac{1}{2}$.

2. Neka je $x_1 = 0.23$, $x_2 = 0.233$, $x_3 = 0.2333$, ..., $x_n = 0.233\ldots3$ itd. Odredite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Odredite pomoću definicije limesa

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.

4. Izračunajte

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u x kada $x\to\infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n gdje je n najveća potencija tih polinoma. analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka sa iracionalnim izrazima.
Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a)\neq 0$ ili $Q(a)\neq 0$, limes

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a)=Q(a)=0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x-a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

1. Izračunajte:
   (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+4)^3(3x-1)^2}{x^5+6}$
   (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$
   (c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
   (d) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$
   (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
   (f) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
   (g) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
   (h) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

1. Izračunajte:
   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$
   (b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$
   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}}{x}$
   (d) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
   (e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$
   (f) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$
   (g) $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$
   (h) $\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a ($a\neq x$). Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=C,$$

vrijedi sljedeće:

1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

gdje je $0 \leq A + \infty$ i $-\infty < B < +\infty$ tada je $C = A^B$.

2) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ onda C pronalazimo neposredno,

3) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, onda stavljamo $f(x) = 1+\alpha(x)$ gdje $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to a$ i prema tome

$$C = \lim_{x\to a} \left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila lako dobivamo da je općenito

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2} x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$

2. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

(b) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

(c) $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

(e) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

(f) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x\to a} f(x)$, onda

$$\lim_{x\to a} (\ln f(x)) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} (\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$

(b) $\lim_{x\to \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

1.2.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo: koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Neka su zadane funkcije f i g derivabilne za $0 < |x-a| < \varepsilon$ pri čemu je derivacija $g'(x)$ različita od nule. Ako su f i g obje beskonačno male ili obje beskonačno velike kada $x \to a$, tj. ako razlomak $\frac{f(x)}{g(x)}$ predstavlja u toj točki $x = a$ neodređeni oblik tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x = a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} f_2(x) = \infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty - \infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, onda razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right).$$

1. Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4}$
   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$
   (d) $\lim_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$
   (e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$
   (f) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$
   (g) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$
   (h) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Zadaci sa rokova:

1. Izračunajte:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$
   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan \pi x}{\sqrt{x}-1}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 3x \ln(1+x)}{\tan x - \sin x}$
   (d) $\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}} \frac{1+2\cos\frac{\pi}{2}}{3x-4\pi}$
   (e) $\lim_{x\to 0, x>0} \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right)$
   (f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}$
   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-4\cos x+3\cos^2 x}{x^2}$
   (h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos x} - x\tan x\right)$

1.3 Deriviranje funkcija

1.3.1 Tablično deriviranje i osnovna pravila

Definicija 1.3.1 *Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kada x teži u x_0, odnosno*

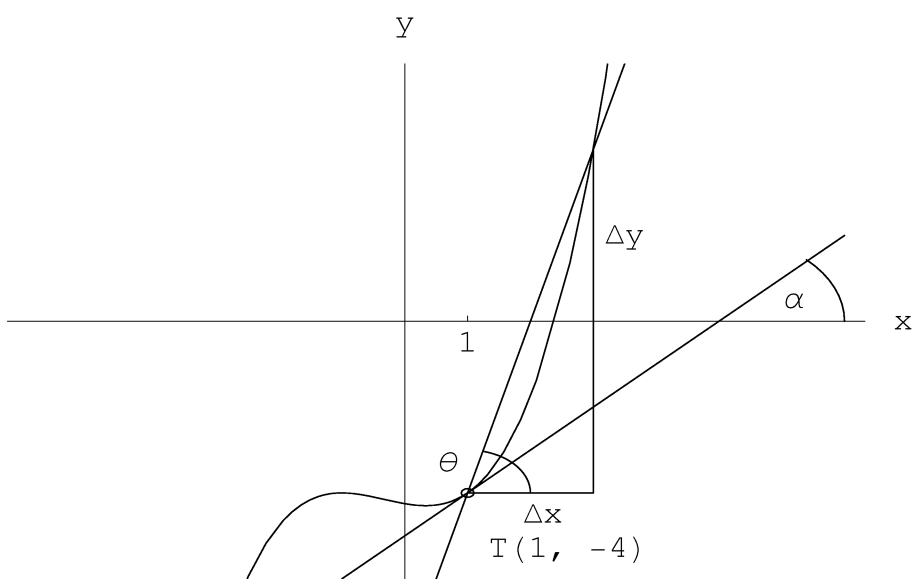
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0. Uobičajeno je pisati i

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

gdje Δx označava razliku $\Delta x = x - x_0$ i analogno $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje *koeficijent smjera* tangente u točki x_0 na graf funkcije f (vidi sliku). Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije.*



Slika 1.1: Očito je $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pa dobivamo $f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

1. Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:

   a) $f(x) = x$,
   b) $f(x) = x^n$ gdje je $n \in \mathbb{N}$,
   c) $f(x) = \sqrt{x}$,
   d) $f(x) = \sin x$.

   Osnovna pravila deriviranja: Neka je c konstanta a f i g funkcije koje imaju derivacije. Onda je

1) $(c)' = 0,$

2) $(x)' = 1,$

3) $(f \pm g)' = f' \pm g',$

4) $(cf)' = cf',$

5) $(fg)' = f'g + fg',$

6) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0).$

2. Koristeći definiciju derivacije, dokažite gornja pravila.

3. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$

(b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$

(d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

(e) $f(x) = 6 \sin x + \cos x$

(f) $f(x) = x^2 \tan x$

(g) $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$

(h) $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Pravilo deriviranja složenih funkcija: Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije f i g imaju derivacije u $g(x)$, tj x, onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{5 \sin x - \cos x}{x}}$

(b) $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$

(c) $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$

(d) $f(x) = \ln(4 \sin x - \arccos 2x)$

(e) $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln \sqrt{x} + x$

(f) $f(t) = t^2 \sin e^t$

(g) $f(x) = \left(\frac{ax^n + b}{cx^n - d}\right)^m$

(h) $f(x) = \arctan \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5. Izračunajte $f'(x)$ ako je

$$\text{(a)} \quad f(x) = |x|, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = x|x|, \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \ln |x|.$$

6. Izračunajte $f'(x)$ i $f'(0)$ ako je $f(x) = e^{-5x} \sin 3x$.

7. Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ako je $f(x) = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Pokažite da je $((\sin x)^n \cos(nx))' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$.

9. Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = (1-x)y$.

Logaritamsko deriviranje: Logaritamskom derivacijom funkcije $y = f(x)$ nazivamo derivaciju logaritma te funkcije, tj.

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjer 1 Primjenom gornjeg logaritmiranja nađimo derivaciju funkcije $f(x) = x^x$.

Rješenje: Logaritmiranjem dobivamo:

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x.$$

Deriviramo obje strane jednadžbe po x i dobivamo:

$$[\ln f(x)]' = (x \ln x)',$$

odnosno

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1.$$

Odavde slijedi

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

1. Primjenom logaritamskog deriviranja izračunajte $f'(x)$ ako je:
   (a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$
   (b) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
   (c) $f(x) = x^{x^2}$
   (d) $f(x) = x^{\sin x}$
   (e) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
   (f) $f(x) = x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x^x}$.

Derivacija inverzne funkcije: Neka f ima inverznu funkciju g. Ako je $f'(x) \neq 0$, onda imamo:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primjer 2 Nađite derivaciju funkcije $f(y) = \arcsin y$ koristeći gornje pravilo.
Rješenje: Kako je $\arcsin y$ inverzna funkcija funkcije $\sin x$, imamo
(za $y = \sin x$) :

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

1. Izračunajte $f'(x)$ ako je

   (a) $f(x) = \arccos x$, (b) $f(x) = \arctan x$, (c) $f(x) = \text{arcsh } x$.

2. Nađite derivaciju inverzne funkcije ako je $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x$. Izračunajte $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$.

3. Nađite derivaciju inverzne funkcije ako je $f(x) = x^3 - 1$. Izračunajte $(f^{-1})'(7)$.

Derivacija implicitno zadane funkcije: Neka je funkcija $y = f(x)$ zadana u implicinom obliku
$$F(x, y) = 0.$$
Onda derivaciju y' možemo naći tako da izračunamo derivaciju po x funkcije F, izjednačimo je s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu po y'.

Primjer 3 Nađite derivaciju funkcije zadane implicitno sa
$$x^3 + x^2y + y^2 = 0.$$

Rješenje: Ovdje je $F(x, y) = x^3 + x^2y + y^2$. Deriviramo tu funkciju po x i dobivamo:
$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy'.$$
Izjednačimo gornju derivaciju sa nulom
$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$$
i riješimo dobivenu jednadžbu po y':
$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

1. Odredite y' ako je

   (a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, (c) $xy = \arctan\dfrac{x}{y}$.

2. Odredite y' i y' u točki $T(1, 1)$ ako je

   (a) $ye^y = e^{x+1}$, (b) $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$, (c) $\arctan(x + y) = x$.

3. Nađite y' u točki $T(1, 2)$ ako je
$$y^2 = x + \ln\frac{y}{x}.$$

Zadaci sa tangentama i normalama na krivulju:

1. Odredite jednadžbu tangente i normale krivulje $f(x) = \arccos 3x$ u točki u kojoj ta krivulja siječe os ordinatu.
2. Odredite jednadžbu tangente krivulje $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ u točki $T(1, 0)$.
3. Odredite jednadžbu tangente povučene iz točke $T(-2, -3)$ na krivulju $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.
4. Odredite jednadžbu tangente i normale krivulje $y^4 = 4x^4 + 6xy$ u točki $T(1, 2)$.
5. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $y = x^2$ i $y = x^3$?
6. Pod kojim kutem krivulja $y = e^{2x}$ siječe os y?

1.3.2 Ekstremi funkcija i primjene derivacija

Ekstremi funkcije: Neka je zadana funkcija f. Ako postoji okolina točke x_0 takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku x_0 nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije f. Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funckije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f, onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji (vidi sliku). Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke ekstrema. Dovoljni uvjeti za lokalne ekstreme funkcije su slijedeći:

1. ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kritične točke x_0 takva da je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f. Ako nađemo takav pozitivan broj δ da $f'(x)$ zadržava nepromijenjeni predznak na intervalu $0 < |x - x_0| < \delta$, onda f nema lokalni ekstrem u x_0. Ti uvjeti analogni su sljedećem:

2. ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), onda je x_0 točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije; ako je pak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, onda x_0 nije točka ekstrema funkcije.

Primjer 1 Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje: Prvo ispitujemo koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Rješimo gornju kvadratnu jednadžbu i dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od f u tim točkama.

$$f''(x) = 12x + 6 \quad \text{pa} \quad f''(x_1) = 18,\ f''(x_2) = -18.$$

Zaključujemo da f ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$.

1. Istražite ekstreme slijedećih funkcija:

   (a) $f(x) = x^2(x-12)^2$

   (b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

   (c) $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$

   (d) $f(x) = x - \ln(1+x)$

   (e) $f(x) = x^2 e^{-x}$

   (f) $f(x) = x - \arctan x$.

Najveće i najmanje vrijednosti: Najmanja (najveća) vrijednost funkcije f na zadanom intervalu $[a, b]$ dobiva se ili u kritičnim točkama funkcije ili na krajevima intervala.

Primjer 2 Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ na intervalu $[-3, 2]$.

Rješenje: Prvo tražimo kritične točke funkcije f. Kako je $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, kandidati su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Obje točke nalaze se u zadanom intervalu pa provjeravamo vrijednost funkcije:

$$\begin{array}{rcccl} & f(x_1) & = & f(1) & = 2+3-12-1=8, \\ \text{i} & f(x_2) & = & f(-2) & = -16+12+24-1=12. \end{array}$$

Ostaje ispitati ponašanje funkcije na rubovima:

$$\begin{array}{rcl} f(-3) & = & -54+27+36-1=8, \\ \text{i} \quad f(2) & = & 16+12-24-1=3. \end{array}$$

Zaključujemo da najmanja vrijednost na intervalu $[-3,2]$ funkcijea $f(x)=2x^3+3x^2-12x-1$ postiže na rubu $x=2$ a najveću u točki $x=-2$.

1. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije na zadanom intervalu (ako interval nije označen, misli se na cijelu domenu).

   (a) $f(x)=x^3-3x$ na intervalu $[-2,3]$,

   (b) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$,

   (c) $f(x)=\arcsin x$,

   (d) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

2. Pokažite da za pozitivne vrijednosti od x vrijedi nejednakost:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2.$$

   Rješenje: Gledamo funkciju $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$ i ispitujemo njezin minimum na intervalu $[0,+\infty)$. Tražimo kritične točke i deriviranjem dobivamo kandidate:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1.$$

   U zadanom intervalu je samo $x=1$ i tu je $f(1)=0$. Na rubovima intervala funkcija teži u $+\infty$ pa zaključujemo da je u $x=1$ postignuta minimalna vrijednost i ona iznosi nula. Drugim riječima, vrijedi:

$$x\in[0,+\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x)=x+\frac{1}{x}-2\geq 0$$

   što je i trebalo dokazati.

3. Dokažite nejednakosti:

   (a) $e^x>1+x \quad$ za $\quad x\neq 0$,

   (b) $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad$ za $\quad x\neq 0$.

4. U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje maksimalan zbroj. Odredite taj zbroj!

5. Na krivulji $f(x)=\sqrt{-\ln x}$ odredite točku najbl'ižu ishodištu.

6. Od svih stožaca upisanih u kuglu polumjera $R=1$ odredite onaj maksimalnog volumena.

Zadaci sa rokova:

1. Među svim jednakokračnim trokutima opsega 16 nađite onaj koji ima najveću površinu.
2. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \cdots x^2+12x+y^2-4y+15=0$, $C_2 \cdots x-y^2+4y-3=0$.
3. Nađite kut među krivuljama: $C_1 \cdots x=0$, $C_2 \cdots y=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$.
4. Među svim jednakokračnim trokutima s jednim vrhom u ishodištu i sa druga dva vrha na krivulji $y=\frac{1}{x^2}$, nađite onaj koji ima minimalni opseg.
5. U zadanu sferu upišite valjak maksimalnog obujma.
6. Iz točke $T(0,2)$ povucite tangente na krivulju $y+\ln x^2=0$.
7. Na krivulju $\mathrm{C} \ldots y-x^3+3x^2-2x=0$ povucite tangentu koja je okomita na pravac $x+11y-12=0$.
8. Koji uvjet mora zadovoljavati funkcija $f(x)=x^3+ax+b$ da bi njen graf dodirivao os x (naći vezu izmedju a i b)?
9. Odredite normalu grafa funkcije $f(x)=e^{2x-2}+e^{x-1}-2$ u točki u kojoj graf siječe x os.
10. Od tri daske širine 20cm treba napraviti žlijeb maksimalnog poprečnog presjeka. Kolika je površina tog poprečnog presjeka?
11. Medju svim jednakokračnim trokutima opsega 1 mm nadjite onaj koji ima najveću površinu.
12. Na krivulji $C \ldots y-x^2-\sqrt{5}=0$ nadjite točku najbližu točki $T(0,1+\sqrt{5})$. Slika!
13. Dokažite da za bilo koju vrijednost realnog parametra a postoji tangenta grafa funkcije $f(x)=x^3-a^2x$ okomita na pravac $x+y=0$.
14. Iz tjemena parabole $y=3x^2-2x+1$ povucite tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{2x-5}{3x-1}$. Slika!

1.3.3 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa funkcije moramo prvo u nekoliko koraka odrediti sljedeće parametre:

(1) domena funkcije,

(2) nultočke,

(3) asimptote,

(4) kandidate za ekstreme (prva derivacija),

(5) ekstreme i točke infleksije (druga derivacija),

(6) tok (prva derivacija).

Asimptote :

vertikalne asimptote: točke prekida funkcije

horizontalne asimptote: $\lim_{x\to-\infty} f(x) \longrightarrow$ lijeva horizontalna asimptota,
$\lim_{x\to+\infty} f(x) \longrightarrow$ desna horizontalna asimptota

kosa asimptota: $y = kx+l$ gdje je $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$,
$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Ekstremi i točke infleksije :

$f'(x_0) = 0 \longrightarrow x_0$ je kandidat; $f''(x_0) > 0$ lokalni minimum,
$f''(x_0) < 0$ lokalni maksimum,
$f''(x_0) = 0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji će biti točka infleksije ako f'' u intervalima $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$ za neko δ zadržava konstantne predznake i ako su ti predznaci suprotni.

Tok :

$f'(x) > 0$ funkcija raste,
$f'(x) < 0$ funkcija pada.

Primjer 1 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

Rješenje: Jednostavno slijedimo upute:

(1) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

(2) Nultočke: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow$
$x_1 = -1 \quad (-1, 0)$,
$x_2 = 3 \quad (3, 0)$.

(3) Asimptote:
$V.A.\quad x = 0,\; x = 2$
$H.A.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = 1$.
$K.A.$ nema

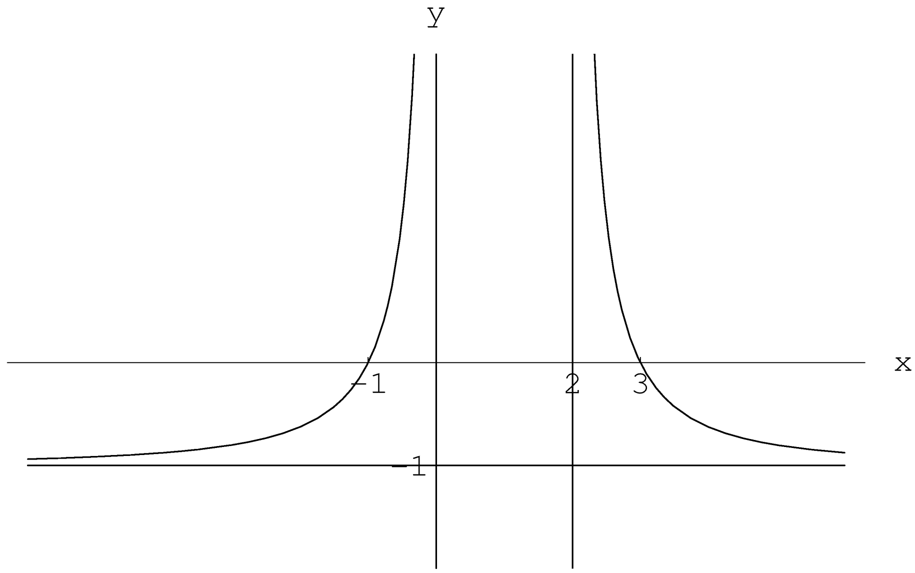
(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \cdots = \frac{-6x+6}{(2x-x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = \frac{-6-2(-6x+6)(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}$.
Sada imamo

$$f''(1) = -6 < 0 \quad \text{pa je u} \quad x = 1 \quad \text{lokalni maksimum.}$$

(6) Tok:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty) \quad \text{pa tu funkcija pada,}$$
$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \quad \text{pa tu funkcija raste.}$$



Slika 1.2: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$

Na temelju gornjih opažanja sada je lako nacrtati graf:

Primjer 2 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

Rješenje:

(1) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(2) Nultočke: $x = 0$

(3) Asimptote:
V.A. nema
H.A. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.
K.A. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.

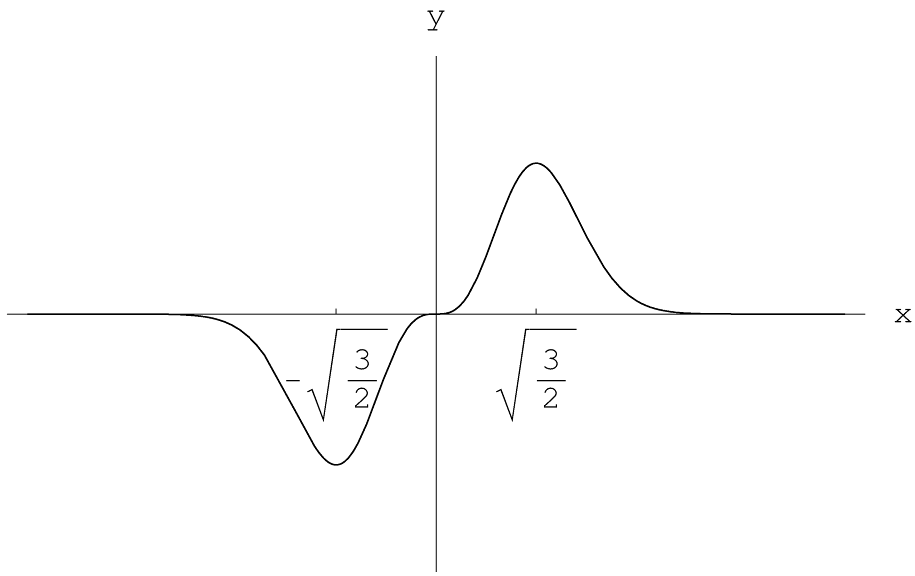
(4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = xe^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \quad \text{pa je} \quad x = 0 \quad \text{točka infleksije,} \\ f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &< 0 \quad \text{pa je u} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni maksimum,} \\ f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &> 0 \quad \text{pa je u} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni minimum.} \end{aligned}$$

(6) Tok: $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow\; |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada, a $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.

Crtamo graf:



Slika 1.3: Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Zadaci sa rokova:

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\sin x}$.
2. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
4. Odredite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
5. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{-1}$.
6. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \arctan x - x$.
7. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + 5\right) - \ln 2$.
9. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^2 2^{-x}$.
10. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = 1 - e^{-\mathrm{cosx}}$.
11. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+8x^2+27x+27}{2(x+2)^2}$.
12. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = x - 1 + e^{\frac{1}{1-x}}$.

13. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = \arctan(1 - \frac{1}{x})$.
14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x-1)^{-1/2} \cdot \ln(x-1)$.
17. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.
18. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.