

Primer 1. Zadataci iz Primjenjene matematike

- Kocku bacamo 4 puta. Odredite vjerovatnost da bude:
 - sveći put 6
 - sveći put isti broj
 - Bav jedan put 6
 - Bav jedan put 5.
 - Bav jedna šestica i bav jedna petica.
- Događaj A u nekom pokusu događaje S vjerovatnoći $p = 0,4$. Pokus izvodimo dokle se ne dogodi A . slučajna varijabla X registira broj izvođenja pokusa. Opišite X .
- Opišite slučajnu varijablu X ako je:
 - $X \sim B(20; 0,3)$
 - $X \sim B(4,5)$
 - $X \sim E(2,5)$
 - $X \sim W(50; 3,2^2)$
- Ua nekom odnesu dade prosječno 4,5 poruka na sat.
 - Opišite slučajnu varijablu X koja registira broj poruka
 - Odredite vjerovatnost da bude bar jedna poruka
 - Odredite vjerovatnost da bude najviše 5 poruka.

5. Prosječno vrijeme između duji poruka je 2.5 minute. a) Kolika je vjerojatnost da između duji poruka prođe bar 5 minute.

b) Kolika je vjerojatnost da između duji poruka prođe više od 2 minute, ali manje od 4 minute.

6. Od 100 kg suzane, u tehnološkom procesu se oblije 50 kg proizvoda uz standardnu odstupnju 3.2 kg.

a) Zapišite slučajnu varijablu X koje mjeri količinu proizvoda.

b) Odredite intervale prema pravilu 1 σ , 2 σ i 3 σ .

c) Izračunajte $P(45 < X < 55)$, $P(X > 45)$ i $P(X < 55)$.

Rješenje - Upute

1. a) $P(\text{sveukupno } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

b) $P(\text{sveukupno istobroj}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$
mikača 6

c) $P(\text{bar jednom } 6) = 1 - P(\text{mikača } 6)$
 $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

d) $P(\text{bar jednom } 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

e) Štenimo; $A := \text{bar jednom } 6$; $B := \text{bar jednom } 5$
 $\bar{A} := \text{mikača } 6$; $\bar{B} := \text{mikača } 5$

$$P(\text{bar jednom } 6 \text{ i bar jednom } 5) = P(A \cdot B)$$

$$= 1 - P(\overline{A \cdot B}) \quad \text{De Morgan}$$

$$= 1 - P(\bar{A} + \bar{B})$$

$$= 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cdot \bar{B})]$$

$$= 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

2.

x_i	1	2	3	4	...
P_i	0.4	$0.6 \cdot 0.4$	$0.6^2 \cdot 0.4$	$0.6^3 \cdot 0.4$...

Dobro $R(X) = N$ i $P(X=i) = 0.6^{i-1} \cdot 0.4$

3. a) X ima binomnu raspodjelu s $n=20$ i $p=0.3$

$$E(X) = np = 6; \quad V(X) = npz = 4.2$$

$$P(X=i) = \binom{20}{i} 0.3^i 0.7^{20-i}, \quad i=0, 1, 2, \dots, 20.$$

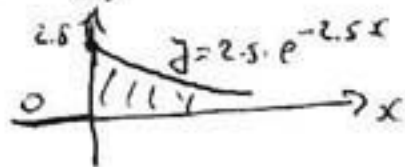
b) X ima Poissonovu raspodjelu s očekivanjem $E(X) = 4.5$
i $V(X) = 4.5$. $P(X=i) = e^{-4.5} \frac{4.5^i}{i!}, \quad i=0, 1, 2, \dots$

c) X ima eksponenčni podeli z razlobo $\lambda = 2.5$;

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5} = 0.4 \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{2.5^2} = 0.16$$

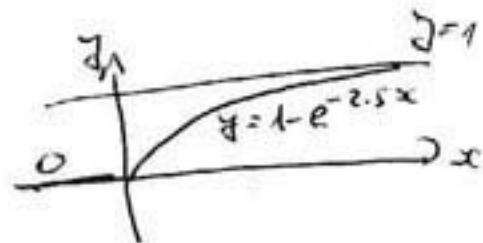
Funkcija gostote:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 2.5 e^{-2.5x} & ; x > 0 \end{cases}$$



Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-2.5x} & ; x > 0 \end{cases}$$

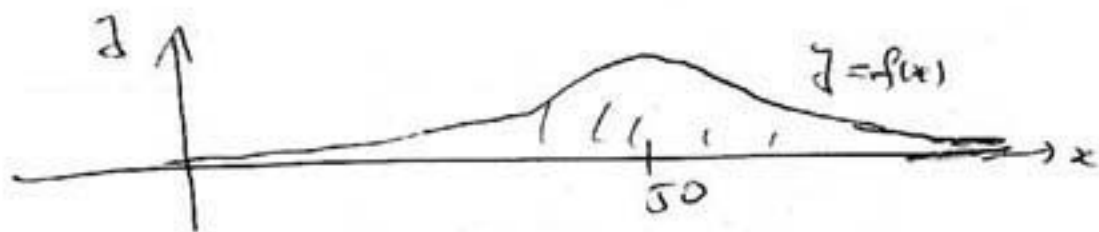


d) X ima normalno porazdelitev z razlobo 1

$$E(X) = \mu = 50 \quad ; \quad V(X) = \sigma^2 = 3.2^2$$

Funkcija gostote:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3.2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-50}{3.2} \right)^2}$$



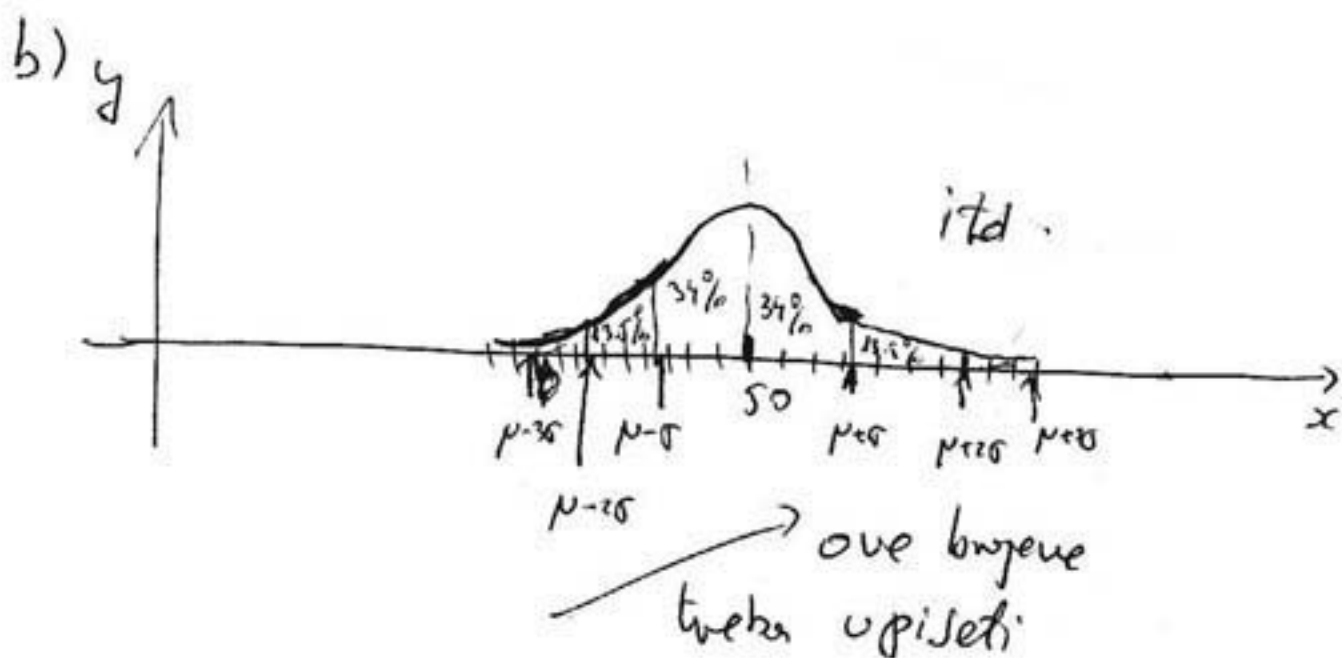
5. Neka slučajna spremenljivka X upeni vsaj eno izmedu dveh pomanjk. Torej $X \sim E(2.5)$ (vidi zad. 3)

a) $P(X \geq 5) = P(5 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(5) = 1 - (1 - e^{-2.5 \cdot 5}) = e^{-12.5} \approx$

b) $P(2 < X < 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-10}) - (1 - e^{-5}) = e^{-5} - e^{-10} \approx$

6.

$$a) X \sim N(50, 3.2^2) \quad (\text{ind. zad. 3.})$$

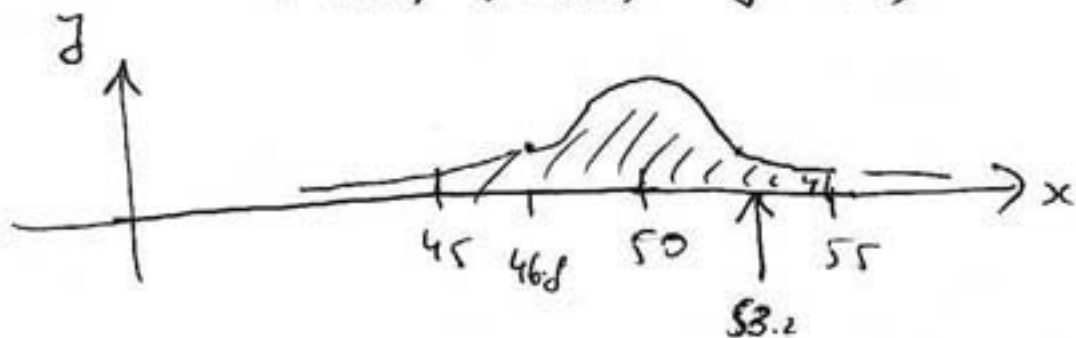


c)

$$P(45 < X < 55) = \Phi\left(\frac{55-50}{3.2}\right) - \Phi\left(\frac{45-50}{3.2}\right)$$

(2 računati + tablice)

$$= \Phi\left(\frac{5}{3.2}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{3.2}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3.2}\right)$$



$$P(X > 45) = P(45 < X < +\infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{45-50}{3.2}\right)$$

$$= 0.5 + \Phi\left(\frac{5}{3.2}\right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{1 računati} \\ \text{+} \\ \text{tablice} \end{array}$$

$$P(X < 55) = P(-\infty < X < 55)$$

$$= \Phi\left(\frac{55-50}{3.2}\right) - \Phi(-\infty)$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{3.2}\right) + 0.5 \quad \text{itd.}$$