II. SLUČAJNE VARIJABLE

Uvod: Pojam slučajne varijable i razdiobe vjerojatnosti

Primjer 1. Bacamo kocku dva puta zaredom i potom:
a) zbrojimo dobivene rezultate,
b) oduzmemo drugi od prvog rezultata,
c) registriramo koliko se puta pojavio broj 6,
d) registriramo koliko se puta pojavio broj 5,
e) registriramo veći od rezultata,
f) registriramo manji od rezultata.
Komentirajmo taj primjer.

Pretpostavimo da se u pokusu dogodio ishod 36 (prvi put 3, drugi put 6). Tada je:
rezultat u a) 9
rezultat u b) –3
rezultat u c) 1
rezultat u d) 0
rezultat u e) 6
rezultat u f) 3.
Pretpostavimo pak da se dogodio ishod 44 (oba puta 4). Tada je:
rezultat u a) 8
rezultat u b) 0
rezultat u c) 0
rezultat u d) 0
rezultat u e) 4
rezultat u f) 4.

Zaključujemo da je u tom primjeru riječ o funkcijama kojima su vrijednosti realni brojevi, a koje ovise o ishodu koji se dogodio. Dakle te su funkcije definirane na skupu svih ishoda u pokusu i slučajno (ovisno o ishodu koji se dogodio) postižu određene vrijednosti. Zato se te funkcije zovu slučajnim varijablama. Dakle:

Slučajna varijabla jest funkcija koja svakom ishodu pridružuje neki realni broj.

Kraće:

Slučajna varijabla jest funkcija X: S $\to$ R, gdje je S skup ishoda u nekom pokusu

(slučajne ćemo varijable obično označavati velikim slovima X,Y,Z,U,V,W,…).

S matematičke strane gledišta gornja definicija nije općenito korektna. O tome ćemo nešto više reći poslije, a za sada napominjemo da je ta definicija korektna u slučaju pokusa s konačno ili prebrojivo mnogo ishoda (u početku ćemo razmatrati samo takve pokuse).
Skup vrijednosti slučajne varijable X označavamo oznakom R(X).

Primjer 2. Odredimo skupove vrijednosti slučajnih varijabla iz početnog primjera bacanja kocke dva puta.

a) R(X) = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
b) R(Y) = {-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}
c) R(Z) = {0,1,2,3,4,5,6}
d) R(U) = {0,1,2,3,4,5,6}
e) R(V) = {1,2,3,4,5,6}
f) R(W) = {1,2,3,4,5,6}.

Slučajne su varijable funkcije, pa su dvije slučajne varijable jednake ako su jednake kao funkcije. Treba uočiti da su slučajne varijable Z,U odnosno V,W međusobno različite iako imaju iste domene i iste skupove vrijednosti. Na primjer:
Z(35) = 0, U(35) = 1.
Slično:
V(35) = 5, W(35) = 3.
Ipak, svi će se složiti da su varijable Z,U srodne. O čemu je tu riječ, saznat ćemo uskoro.

Primjer 3. Bacamo novčić 3 puta. Slučajna varijabla X registrira koliko se puta pojavio P. Zapišimo X.
Očito je da je R(X) = {0,1,2,3}. Da bismo zapisali slučajnu varijablu X moramo joj odrediti vrijednosti u svakom ishodu u tom pokusu. Ima ukupno 8 ishoda:
S = {PPP,PPG,PGP,PGG,GPP,GPG,GGP,GGG}. Vrijedi:

X(PPP) = 3	X(GPP) = 2
X(PPG) = 2	X(GPG) = 1
X(PGP) = 2	X(GGP) = 1
X(PGG) = 1	X(GGG) = 0.

U tom primjeru treba uočiti da ima više izgleda da slučajna varijabla X poprimi vrijednost 2, nego 3, a da ima jednake izglede da poprimi rezultat 1 kao i rezultat 2. To je zato što postoje 3 ravnopravne mogućnosti za postizanje broja 1 (odnosno za postizanje broja 2), a samo 1 mogućnost za postizanje broja 3. Možemo govoriti o vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi neku vrijednost, primjerice:

vjerojatnost da X poprimi rezultat 2 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 1 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 3 jednaka je 1/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 0 jednaka je 1/8
vjerojatnost da X poprimi rezultat 4 jednaka je 0.

To se može obrazložiti ovako:

reći da X poprimi rezultat 2 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPG,PGP,GPP}, a vjerojatnost tog događaja je 3/8,
reći da X poprimi rezultat 3 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPP}, a vjerojatnost tog događaja je 1/8,
reći da X poprimi rezultat 4, je isto što i reći da se dogodilo nešto nemoguće, a vjerojatnost nemogućeg događaja je 0, itd.

Vidimo da se neki događaji u pokusu mogu zapisati u terminima slučajne varijable. Da bismo tako zapisivanje događaja pojednostavnili, uvodimo sljedeće označivanje:

[X=a]: slučajna varijabla postiže rezultat a (gdje je a neki realni broj).

Drugim riječima:

$[X=a] = \{ \ w \in S : X(w) = a \ \}$

Umjesto p([X=a]) pisat ćemo kraće p(X=a), dakle,
$p(X=a) = p(\{ \ w \in S : X(w) = a \ \})$

Za slučajnu varijablu X iz prethodnog primjera vrijedi:
p(X=0) = 1/8
p(X=1) = 3/8
p(X=2) = 3/8
p(X =3) = 1/8

To se kraće zapisuje kao:

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

U gornjem su redu tablice vrijednosti koje slučajna varijabla postiže, a u donjem dijelu vjerojatnosti s kojima se te vrijednosti postižu. Treba uočiti da je zbroj brojeva u drugom redu jednak 1. To je zato što je ukupna vjerojatnost 1 (događaji [X=0], [X=1], [X=2],[X=3] čine potpun skup događaja: međusobno se isključuju i zbroj im je sigurni događaj).
Kažemo da je tom tablicom zadana slučajna varijabla X.
Točnije, tom je tablicom zadana **razdioba vjerojatnosti** slučajne varijable X, tj. zadane su vjerojatnosti s kojima slučajna varijabla X postiže pojedine vrijednosti.
Da bismo to pojasnili promotrimo slučajnu varijablu Y koja registrira koliko se puta pojavio G u pokusu bacanja novčića 3 puta. Ta slučajna varijabla ima razdiobu:

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

Dakle, slučajne varijable X, Y (koje se odnose na isti pokus) imaju iste razdiobe vjerojatnosti. Kažemo i da su te slučajne varijable **jednako distribuirane**. Međutim X i

Y nisu jednake kao funkcije. Na primjer, X(PPP) = 3, a Y(PPP) = 0. Dakle, slučajne varijable mogu biti različite, a da imaju istu razdiobu vjerojatnosti. U razmatranom slučaju treba uočiti da je zbog simetrije jasno da slučajne varijable X,Y moraju biti jednako distribuirane (zamjenom slova P,G prelaze jedna u drugu).
U teoriji vjerojatnosti slučajne varijable klasificiramo s obzirom na razdiobu vjerojatnosti. U tom ćemo smislu govoriti da je slučajna varijabla zadana svojom razdiobom vjerojatnosti (pritom treba imati na umu da ima više slučajnih varijabla s istom razdiobom vjerojatnosti).

Primjer 4. U pokusu bacanja kocke dva puta, označimo, kao i prije:
Z: registrira koliko se puta pojavio broj 6,
U: registrira koliko se puta pojavio broj 5,
V: registrira najveći broj
W: registrira najmanji broj.
Diskutirajmo razdiobe vjerojatnosti tih slučajnih varijabla.

Očito je da su te slučajne varijable međusobno različite. Također, bez računanja njihovih razdioba, jasno je da su Z i U jednako distribuirane (to se može obrazlažiti zamjenom znakova 5 i 6 na stranama kocke, odnosno ravnopravnošću brojeva 5 i 6). Razdiobom vjerojatnosti tih slučajnih varijabla pozabavit ćemo se poslije.
Razmotrimo sad slučajne varijable V i W. Ako bi netko na kocki brojeve 1,2,3,4,5,6 redom zamijenio brojevima 6,5,4,3,2,1 slučajna varijabla V postala bi slučajna varijabla W i obratno. To znači da bi pri zamjeni redoslijeda tablica razdiobe slučajne varijable V prešla u tablicu razdiobe slučajne varijable W. Pokažimo to i tako da odredimo te razdiobe.

Već smo vidjeli da je R(V) = R(W) = {1,2,3,4,5,6}.
p(V=1) = p(11) = 1/36
p(V=2) = p(12+21+22) = 3/36
tumačenje: slučajna varijabla V postiže rezultat 2 ako veći od rezultata bude 2, tj. ako se dogodi ishod 12 (prvi put 1, drugi put 2) ili ishod 21 (prvi put 2 drugi put 1) ili ishod 22 (oba puta 2); kako se događaji 12, 21, 22 međusobno isključuju, a svaki ima vjerojatnost 1/36, vjerojatnost njihova zbroja je 3/36; slično dobijemo dalje:
p(V=3) = p(13+23+31+32+33) = 5/36
p(V=4) = p(14+24+34+41+42+43+44) = 7/36
p(V=5) = p(15+25+35+45+51+52+53+54+55) = 9/36
p(V=6) = p(16+26+36+46+56+61+62+63+64+65+66) = 11/36

p(W=1) = p(11+12+13+14+15+16+21+31+41+51+61) = 11/36
p(W=2) = p(22+23+24+25+26+32+42+52+62) = 9/36
p(W=3) = p(33+34+35+36+43+53+63) = 7/36
p(W=4) = p(44+45+46+54+64) = 5/36
p(W=5) = p(55+56+65) = 3/36
p(W=6) = p(66) = 1/36.

Dakle, razdiobe tih varijabla jesu:

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Treba uočiti da su V,W različite slučajne varijable u istom pokusu, dapače i njihove razdiobe vjerojatnosti su različite, ali vrlo bliske. Točno značenje te bliskosti objasnit ćemo poslije.

Primjer 5. Bacamo kocku dok se ne pojavi broj 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Odredimo razdiobu vjerojatnosti od X.

Već smo vidjeli da je to pokus s beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda. Slučajna varijabla X primjer je slučajne varijable koja poprima beskonačno mnogo (ali prebrojivo) vrijednosti:
R(X) = **N =** {1,2,3,4, …}.
Izračunajmo nekoliko početnih vjerojatnosti:

p(X=1) = p(prvi put 6) = 1/6
p(X=2) = p(prvi put nije 6, drugi put 6) = 5/61/6
p(X=3) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6) = $(5/6)^2 1/6$
p(X=4) = p(prva tri puta nije 6, četvrti put 6) = $(5/6)^3 1/6$.

Zato je razdioba vjerojatnosti slučajne varijable X:

1	2	3	4 ……………	n……….	
1/6	5/61/6	$(5/6)^2 1/6$	$(5/6)^3 1/6$……	$(5/6)^{n-1} 1/6$…..	

Koristeći se formulom za sumu beskonačnog reda možemo provjeriti da je zbroj vjerojatnosti zaista jednak 1.

$$1/6 + 5/61/6 + (5/6)^2 1/6 + (5/6)^3 1/6 + \ldots = 1/6(1 + 5/6 + (5/6)^2 + (5/6)^3 + \ldots)$$
$$= 1/6 \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$$
$$= 1.$$

S druge strane, intuitivno je jasno da je zbroj vjerojatnosti jednak 1, pa smo time, koristeći se vjerojatnošću, odredili sumu beskonačnog reda.

Diskretna slučajna varijabla

Definicija diskretne slučajne varijable

Na osnovi razmatranih primjera uvodimo sljedeću definiciju.

Diskretna slučajna varijabla jest slučajna varijabla kojoj je skup vrijednosti konačan ili beskonačan prebrojiv.
Drugim riječima slučajna varijabla X je diskretna ako je
$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ ili $R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$

Događaji $[X=x_i]$ čine potpun skup događaja. To znači da se oni međusobno isključuju i da je suma njihovih vjerojatnosti 1:
$\sum p(X=x_i) = 1$.

Ako označimo:
$p_i = p(X=x_i)$,
onda se razdioba vjerojatnosti slučajne diskretne varijable X može zapisati kao:

x1	x2	x3	xn
p1	p2	p3	pn

ako je skup vrijednosti konačan, odnosno kao:

x1	x2	x3…..
p1	p2	p3 ….

ako je skup vrijednosti beskonačan prebrojiv.

Primjer 6. Bacamo kocku 2 puta. Slučajna varijabla X zbraja dobivene rezultate, a slučajna varijabla Y oduzima drugi rezultat od prvoga. Odredimo razdiobe vjerojatnosti tih slučajnih varijabla.

Već smo rekli da je $R(X) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Nadalje:
$p(X=2) = p(11) = 1/36$
$p(X=3) = p(12+21) = 2/36$
$p(X=4) = p(13+22+31) = 3/36$
Sličnim razmatranjem zaključujemo da X ima razdiobu vjerojatnosti:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Također je $R(Y) = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Nadalje:
$p(Y = -5) = p(16) = 1/36$

p(Y = -4) = p(15+26) = 2/36
p(Y=0) = p(11+22+33+44+55+66) =6/36
Zaključujemo da Y ima razdiobu vjerojatnosti:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Zadatak 1. Objasnite zašto su vjerojatnosti u tablici razdiobe vjerojatnosti slučajnih varijabla X, Y simetrične u odnosu na vrijednost 6/36.

Zadatak 2. Dvojica igrača bacaju po kocku. Ako zbroj bude 5 dobija prvi, ako bude 6 dobija drugi, inače ne dobija njedan od njih. U kojem odnosu mora biti uložen novac da bi igra bila pravedna?

Treba uočiti sličnost razdioba vjerojatnosti slučajnih varijabla X,Y iz Primjera 6. Te slučajne varijable nisu jednako distribuirane, međutim ako bi vrijednosti slučajne varijable X umanjili za 7, dobili bismo slučajnu varijablu koja je jednako distribuirana kao Y. Točnije, neka je Z slučajna varijabla koja zbroji dobivene rezultate, potom tom zbroju oduzme 7. Ta je slučajna varijabla jednako distribuirana kao i Y (uočite da Z i Y nisu jednake). Slučajnu varijablu Z možemo zapisati kao X-7, dakle

$$Z = X-7$$

(slučajna varijabla definirana kao slučajna varijabla koja postiže vrijednost x-7 ako X postigne vrijednost x).

Općenito, neka je X slučajna varijabla i *h* realna funkcija kojoj područje definicije sadrži R(X), tj. koja je definirana na svakoj vrijednosti slučajne varijable X. Tada je definirana slučajna varijabla h(X) prema pravilu:

Ako X postigne vrijednost x, onda h(X) postigne vrijednost f(x).

Primjer 7. Neka je X slučajna varijabla iz prethodnog primjera i *h* realna funkcija zadana formulom h(x):= x-7. Tada je h(X) = Z.
Naime, h(X) postiže vrijednost x-7 ako X postigne vrijednost x. Zato je h(X) = X-7 = Z.

Treba uočiti sljedeće:
Ako je *h* injektivna onda vrijedi: h(X) postiže vrijednost h(x) ako i samo ako X postigne vrijednost x.
Tako nešto **ne mora** vrijediti ako *h* nije injekcija, što potvrđuje i sljedeći primjer.

Primjer 8. Neka je X slučajna varijabla kojoj je razdioba vjerojatnosti:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Odredimo skup vrijednosti i razdiobu vjerojatnosti slučajne varijable $Y = X^2$.

Tu je $h(x) := x^2$. Vrijedi:
Ako X postigne vrijednost –5, Y postigne vrijednost 25,
ako X postigne vrijednost –4, Y postigne vrijednost 16,
ako X postigne vrijednost 5, Y postigne vrijednost 25, itd.
Dakle Y postigne vrijednost 25 ako i samo ako X postigne vrijednost 5 ili –5, Y postigne vrijednost 16 ako i samo ako X postigne vrijednost 4 ili –4, Y postigne vrijednost 0 ako i samo ako X postigne vrijednost 0, itd.
Zaključujemo da je $R(Y) = \{0,1,4,9,16,25\}$. Također,
$p(Y=0) = p(X=0) = 6/36$,
$p(Y=1) = p([X=1]+[X=-1]) = 10/36$,
$p(Y=4) = p([X=2]+[X=-2]) = 8/36$, itd.
Dakle, razdioba vjerojatnosti od Y zadana je tablicom:

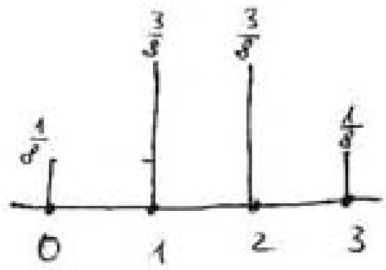
0	1	2	3	4	5
6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36.

Očekivanje i varijanca diskretne slučajne varijable

Razdioba slučajne varijable može se grafički predočiti točkama pravca (vrijednosti slučajne varijable) nad kojima su podignuti štapovi kojma su visine pripadne vjerojatnosti. Evo nekoliko razdioba s kojima smo se već susretali i njihovih grafičkih predodžba:

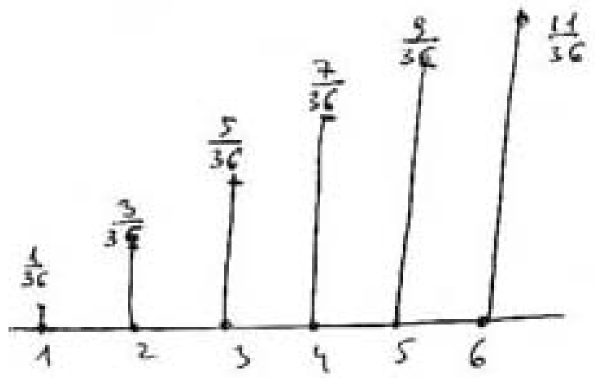
(X)

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8



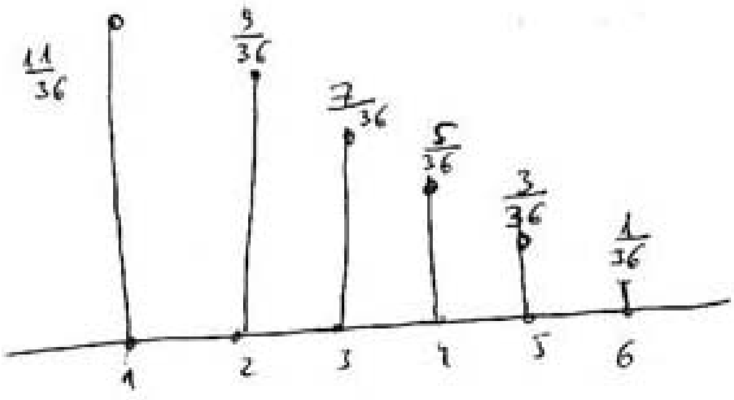
(Y)

1	2	3	4	5	6
1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36



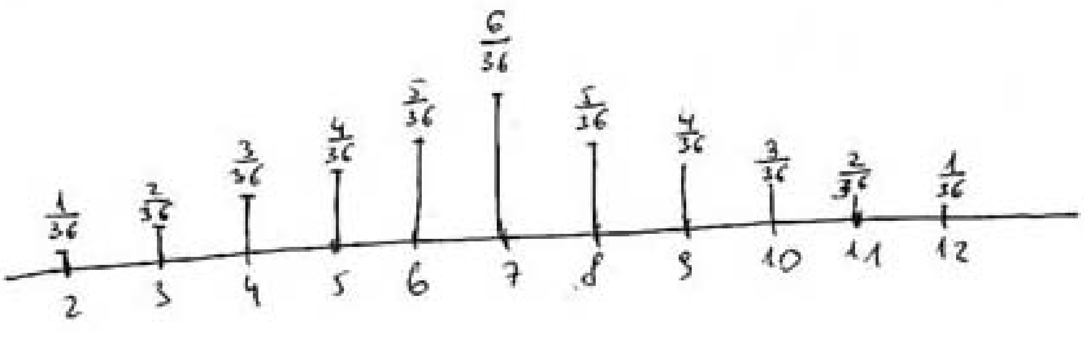
(Z)

1	2	3	4	5	6
11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36



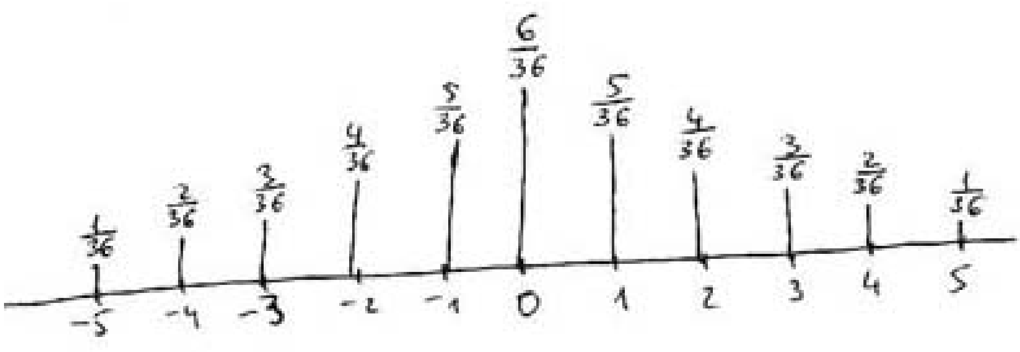
(U)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



(V)

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

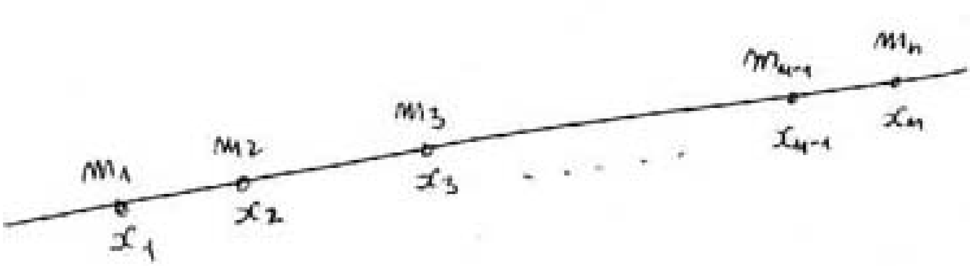


Grafički prikazi diskretnih slučajnih varijabla podsjećaju na **sustav materijalnih čestica na pravcu**.

Podsjetimo se:

sustav materijalnih čestica na pravcu čine čestice masa $m_1,m_2,\ldots,m_n$ smještene u točkama pravca s koordinatama $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

To se kraće može zapisati kao $(x_1,m_1),(x_2,m_2),\ldots(x_n,m_n)$ i predočiti kao:



Pri razmatranju sustava čestica uobičajeno je definirati **ukupnu masu**

$m := m_1+m_2+\ldots+m_n$

i **relativne mase**, brojeve:

$m_1/m,\ m_2/m,\ldots,m_n/m$.

Treba uočiti da je zbroj relativnih masa 1:

$$\begin{aligned} m_1/m+m_2/m+\ldots+m_n/m &= (m_1+m_2+\ldots+m_n)/m \\ &= m/m \\ &=1. \end{aligned}$$

Zato je tablicom

x_1	x_2	x_n
m_1/m	m_2/m	m_n/m

zadana razdioba vjerojatnosti.
Obratno, svaka razdioba vjerojatnosti diskretne slučajne varijable zadaje neki sustav čestica na pravcu (kojemu je ukupna masa 1).
Pri toj korespondenciji, vjerojatnosti $p_i=p(X=x_i)$ korespondiraju relativnim masama mi/m.

Dvije temeljne karakteristike (značajke) sustava čestica jesu njegovo **težište** i **moment inercije oko težišta**. Sjetimo se koordinate težišta:

$$
\begin{aligned}
x_T &=(x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n)/m \\
&= x_1m_1/m+x_2m_2/m+\ldots+x_nm_n/m.
\end{aligned}
$$

Analogno težištu sustava čestica definira se **očekivanje** E(X) diskretne slučajne varijable X kojoj je razdioba vjerojatnosti zadana tablicom

x_1	x_2	x_3	x_n
p_1	p_2	p_3	p_n

$$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

Primjer 9. Izračunajmo očekivanja slučajnih varijabla (odnosno njihovih razdioba vjerojatnosti) (X)-(V) navedenih na početku.

Prije egzaktnog rješavanja pokušajmo bar nešto reći o tim očekivanjima bez računanja. Oslanjajući se na analogiju sa sustavom čestica i na intuitivnu predodžbu o težištu, zaključujemo da trebalo biti:

$E(X) = 1.5$
$E(U) = 7$ (jer su podaci simetrično razmješteni)
$E(V) = 0$
Također, zaključujemo da bi E(Y) trebalo biti bliže broju 6, a E(Z) bliže broju 1 i da bi ta dva broja trebala biti simetrična s obzirom na broj 3.5. Provjerimo naše procjene računanjem.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot 1/8+1\cdot 3/8+2\cdot 3/8+3\cdot 1/8 \\
&= 12/8 \\
&= 1.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= 1\cdot 1/36+2\cdot 3/36+3\cdot 5/36+4\cdot 7/36+5\cdot 9/36+6\cdot 11/36 \\
&= 161/36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= 1\cdot 11/36+2\cdot 9/36+3\cdot 7/36+4\cdot 5/36+5\cdot 3/36+6\cdot 1/36 \\
&= 91/36
\end{aligned}
$$

Treba uočiti da je $3.5-E(Z)=E(Y)-3.5$ što znači da su

$E(Y), E(Z)$ simetrični s obzirom na 3.5.

$$
\begin{aligned}
E(U) &= 2\cdot 1/36+3\cdot 2/36+4\cdot 3/36+5\cdot 4/36+6\cdot 5/36+7\cdot 6/36+8\cdot 5/36+9\cdot 4/36+10\cdot 3/36+11\cdot 2/36 \\
&\quad +12\cdot 1/36 \\
&= 252/36 \\
&= 7.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(V) &= -5\cdot 1/36+(-4)\cdot 2/36+(-3)\cdot 3/36+(-2)\cdot 4/36+(-1)\cdot 5/36+0\cdot 6/36+ \\
&\quad 1\cdot 5/36+2\cdot 4/36+3\cdot 3/36+4\cdot 2/36+5\cdot 1/36. \\
&= 0 \quad \text{(jer su to, po parovima, suprotni brojevi).}
\end{aligned}
$$

Ako diskretna slučajna varijabla postiže beskonačno mnogo, ali prebrojivo vrijednosti, očekivanje se definira analogno:

$$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ldots$$

To je **beskonačni red** i može se dogoditi da **divergira** (ili da **konvergira**, ali ne **konvergira apsolutno**). Tada slučajna varijabla **nema očekivanja** (odnosno pripadni sustav čestica nema težište).

Primjer 10. Bacamo kocku dok se ne pojavi 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Izračunajmo E(X).

Ta slučajna varijabla postiže beskonačno mnogo, ali prebrojivo vrijednosti; vidjeli smo da ima sljedeću razdiobu:

1	2	3	4	……………	n	………
1/6	5/6 1/6	$(5/6)^2 1/6$	$(5/6)^3 1/6$	……	$(5/6)^{n-1} 1/6$	…

Prije računanja pokušajmo predvidjeti očekivanje. Intuitivno, zbog ravnopravnosti brojeva 1,2,3,4,5,6 očekujemo da će se u 6 bacanja pojaviti jednom pojaviti 6 (slično je za ostale brojeve). Provjerimo to predviđanje računom. Koristit ćemo se formulom:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots= 1/(1-x)^2, \quad -1<x<1.$$

Ta se formula dobije deriviranjem formule za zbroj geometrijskog reda:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = 1/1-x, \quad -1<x<1.$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1\cdot 1/6+ 2\cdot 5/6 1/6+3\cdot(5/6)^2 1/6+ 4\cdot (5/6)^3 1/6+\ldots+n\cdot (5/6)^{n-1} 1/6+\ldots \\
&=1/6(1+2\cdot 5/6+3\cdot(5/6)^2 +4\cdot(5/6)^3+\ldots+n\cdot(5/6)^{n-1}+\ldots) \\
&=1/6\cdot 1/(1-5/6)^2 \\
&= 6 \qquad \text{(kako smo i predvidjeli).}
\end{aligned}
$$

Varijanca slučajne varijable.

Vratimo se na sustav čestica na pravcu. Sjetimo se momenta inercije oko težišta tog sustava.
$I_T = (x_1-x_T)^2m_1+(x_2-x_T)^2m_2+\ldots+(x_n-x_T)^2m_n$.
Po uzoru na tu formulu, definiramo **disperziju** iliti **varijancu** V(X) diskretne slučajne varijable X (odnosno razdiobe vjerojatnosti slučajne vjerojatnosti):

$$V(X) := (x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\ldots+(x_n-E(X))^2p_n.$$

Ako X postiže beskonačno mnogo (ali prebrojivo) vrijednosti, taj je red beskonačan i može biti divergentan (tada razdioba vjerojatnosti nema varijancu, odnosno pripadni sustav čestica nema moment inercije).
Treba uočiti da je varijanca V(X) pozitivna i da može biti 0 ako i samo ako postiže samo jednu vrijednost (s vjerojatnošću 1).
Za računanje varijance katkad je jednostavnija formula:

$$V(X) = (x_1^2p_1+x_2^2p_2+\ldots+x_n^2p_n) - E^2(X)$$

(slično je ako je R(X) beskonačan, prebrojiv skup). Tu je $E^2(X)$ kraća oznaka za $((E(X))^2$.

Zadatak 3. Izvedite gornju formulu.

Primjer 11. Bacamo novčić 2 puta. Slučajna varijabla X registrira koliko puta se pojavio P. Izračunajmo varijancu od X.

Vidjeli smo da X ima sljedeću razdiobu vjerojatnosti:

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

i da je E(X) = 1.5.

$$\begin{aligned}V(X) &= (0-1.5)^2 1/8+(1-1.5)^2 3/8+(2-1.5)^2 3/8+(3-1.5)^2 1/8\\ &= 2.25\cdot 1/8+0.25\cdot 3/8+0.25\cdot 3/8+2.25\cdot 1/8\\ &= 0.75\end{aligned}$$

To ćemo izračunati i pomoću druge formule.

$$\begin{aligned}V(X) &= 0^2\cdot 1/8+1^2\cdot 3/8+2^2\cdot 3/8+3^2\cdot 1/8 - 1.5^2\\ &= 3-2.25=0.75.\end{aligned}$$

Zadatak 4. Izračunajte varijance slučajnih varijabla (Y)-(V) iz početnog primjera.

Moment inercije je **mjera disperzije masa u odnosu na težište**; što je masa koncentriranija uz težište, moment inercije je manji i obratno. Analogno tome, varijanca slučajne varijable je mjera disperzije (raspršenosti) vjerojatnosti u odnosu na očekivanje; što je vjerojatnost koncentriranija uz očekivanje, varijanca je manja i obratno.

Ako je X diskretna slučajna varijabla i $h(x) = ax+b$, linearna funkcija, onda je slučajna varijabla $Y := h(X)$, tj. $Y := aX+b$ također diskretna. Vrijedi:

$E(aX+b) = aE(X)+b$,
$V(aX+b) = a^2V(X)$.

Te formule lako je obrazložiti pomoću fizikalne interpretacije očekivanja i varijance. Pretpostavima da se sustav čestica translatira po pravcu za b. Tada se i težište sustava translatira za b, moment inercije oko težišta ostaje isti. Prevedeno na jezik slučajnih varijabla, to znači da je
$E(X+b) = E(X)+b$ i $V(X+b) = V(X)$.
Pretpostavimo sad da se koordinte svake čestice pomnože brojem a (tj. da se sustav čestica stisne ili rastegne s koeficijentom a). Tada se i težište pomnože brojem a, dok se moment inercije promijeni s faktorom a^2. Prevedeno na jezik slučajnih varijabla, to znači da je
$E(aX)=aE(X)$ i $V(aX)=a^2V(X)$.
Kombiniranjem tih formula dobiju se tražene formule.

Zadatak 5. Dokažite formule $E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Jednolika diskretna razdioba

To je najjednostavnija diskretna razdioba. Skup vrijednosti joj je neki konačan skup:

$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$,
a sve su pripadajuće vjerojatnosti jednake:
$p(X=x_i)=1/n$, za svaki $i=1,2,\ldots,n$

(odatle i naziv jednolika razdioba). Uočite da diskretna slučajna varijabla s jednolikom razdiobom nužno ima konačan skup vrijednosti (ne može imati beskonačno mnogo prebrojivo vrijednosti).
Tipični primjer takve razdiobe već smo vidjeli i on je jedan od najuobičajenijih u nastavi vjerojatnosti: to je razdioba slučajne varijable X koja registrira rezultat kod bacanja kocke. Kod nje je
$R(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$,
a sve su odgovarajuće vjerojatnosti 1/6.
Uočite da su rezultati koje postiže ova slučajna varijabla **ekvidistantno raspoređeni** (među njima su jednaki razmaci; ovaj put razmak je 1), međutim to nije općenito, tj. podatci $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ kod jednolike razdiobe nisu nužno ekvidistantni.

I slučajna varijabla koja registrira rezultat kod bacanja novčića je jednoliko distribuirana (međutim tu treba dogovor: umjesto ishoda P,G treba staviti neke brojčane vrijednosti:

najbolje je 0,1; to radimo zato što slučajna varijabla, prema definiciji prima vrijednosti u skupu realnih brojeva, simboli P,G nisu realni brojevi).

Primjer 12. Izračunajmo očekivanje i varijancu diskretne jednolike razdiobe.

Ako zadržimo oznake kao do sada, dobit ćemo:
$E(X)= (x_1+x_2\ldots+x_n)/n$,
$V(X)=(x_1^2+x_2^2 +\ldots+x_n^2)/n-((x_1+x_2\ldots+x_n)/n)^2$

Binomna razdioba.

Razmotrimo pokus bacanja kocke 3 puta. Odredimo razdiobu slučajne varijable X koja registrira broj koliko se puta pojavio broj 6.
Jasno je da je
$R(X) = \{0,1,2,3\}$.
Nadalje:
$p(X=0)$ = p(nijednom 6)
= p(prvi put nije 6, drugi put nije 6, treći put nije 6)
(zbog nezavisnosti)
= p(prvi put nije 6)·p(drugi put nije 6) ·p(treći put nije 6)
$= (5/6)^3$
$p(X=1)$ = p(jednom 6, dvaput ne)
= p(prvi put 6, drugi i treći put ne ili prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije ili prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog disjunktnosti)
= p(prvi put 6, drugi i treći put put ne)+p(prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije) + p(prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6\cdot 5/6\cdot 5/6 + 5/6\cdot 1/6\cdot 5/6 + 5/6\cdot 5/6$
$= 3\cdot 1/6\cdot (5/6)^2$
Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor, možemo tumačiti kao broj na koliko načina od 3 mjesta možemo izabrati jedno mjesto za šesticu, dakle $3=\binom{3}{1}$.

$p(X=2)$ = p(dvaput 6, jednom ne)
p(prva dva puta 6, treći put ne ili prvi i treći put 6, drugi put ne ili prvi put nije 6, drugi i treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
= p(prva dva puta 6, treći put ne)+p(prvi i treći put 6, drugi put ne) + p(prvi put nije 6, drugi treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6\cdot 1/6\cdot 5/6 + 1/6\cdot 5/6\cdot 1/6 + 5/6\cdot 1/6\cdot 1/6$
$= 3\cdot (1/6)^2\cdot 5/6$.

Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor možemo tumačiti kao broj na koliko načina možemo od 3 mjesta izabrati dva mjesta za šestice, dakle $3 = \binom{3}{2}$.

p(X=3) = p(sva tri puta 6)
=p(prvi put 6, drugi put 6, treći put 6)
(zbog nezavisnosti)
= $1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6$
= $(1/6)^3$
Zapišimo tu razdiobu.

0	1	2	3
$(5/6)^3$	$31/6(5/6)^2$	$3(1/6)^2 5/6$	$(1/6)^3$

To je primjer **binomne razdiobe**. Treba uočiti da se pokus *bacanje kocke 3 puta* sastoji od **tri uzastopna nezavisna izvođenja** pokusa *bacanje kocke 1 put.*
Također, u pokusu *bacanje kocke 1 put* treba uočiti događaj *pojavio se broj 6* kojemu je vjerojatnost p=1/6 i njemu suprotni događaj *nije se pojavio broj 6*, kojemu je vjerojatnost q=5/6.
Općenito, možemo zamisliti neki pokus i neki događaj *A* u tom pokusu kojemu je vjerojatnost p(A) = p (tada suprotni događaj događaja *A* ima vjerojatnost q=1-p).
Zamislimo da taj pokus nezavisno izvodimo *n* puta i da slučajna varijabla X registrira **koliko se puta pojavio događaj** *A*. Tada je:

R(X) = {0,1,2,…,n}

(događaj *A* može se dogoditi ili nikako ili jednom ili dvaput itd. a najviše *n* puta).
Također:
p(X=i) = p(*i* puta se dogodio događaj *A*, a *n-i* puta se nije dogodio *A*)
$= \binom{n}{i}$ p(prvih *i* puta dogodio se *A*, a ostalih *n-i* puta nije se dogodio *A*)
$= \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$.

Broj $\binom{n}{i}$ koji se tu pojavljuje kao faktor može se shvatiti kao broj načina na koliko možemo od *n* mjesta izabrati *i* mjesta za događaj *A*. Treba uočiti da se taj faktor pojavljuje i za i=0, odnosno za i=n (kada je jednak 1).

To je bio **tipični primjer binomne razdiobe**. Treba uočiti da se ta razdioba opisuje pomoću **prirodnog broja** *n* (broj nezavisnih izvođenja pokusa) i **realnog broja** *p* između 0 i1 (vjerojatnost pojavljivanja događaja *A* u jednom izvođenju pokusa). Ti brojevi nazivaju se **parametrima razdiobe** (treba uočiti da je *n* **diskretan**, a *p* **kontinuiran** parametar).

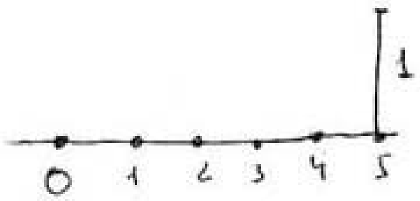
Definicija 1. Slučajna varijabla X distribuirana je po binomnom zakonu s parametrima *n* i *p*, ako je

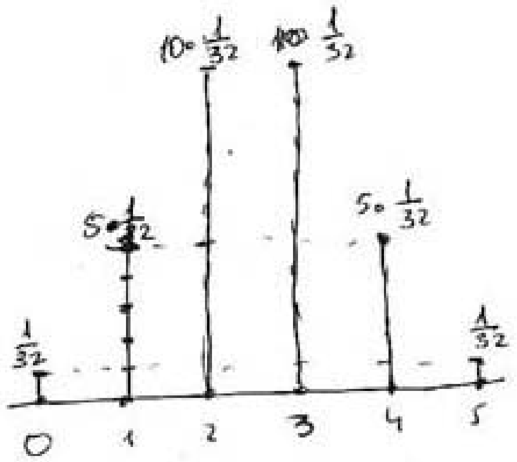
$$R(X) = \{0,1,\ldots,n\} \text{ i } \quad p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \ i \in R(X).$$

Ako je tako pišemo X~B(n,p).

Uočite da X ovisi o dvama parametrima: diskretnom parametru n i kontinuiranom parametru p.

Primjer 13. Grafički predočimo binomne razdiobe B(5,1); B(5,1/10), B(1,1/2), B(1,9/10).





$X \sim \beta(5,1)\,;\ q=0$

$P(X=0) = q^5 = 0^5 = 0$

$P(X=1) = \binom{5}{1} q^4 p = 0$

$P(X=2) = 0$

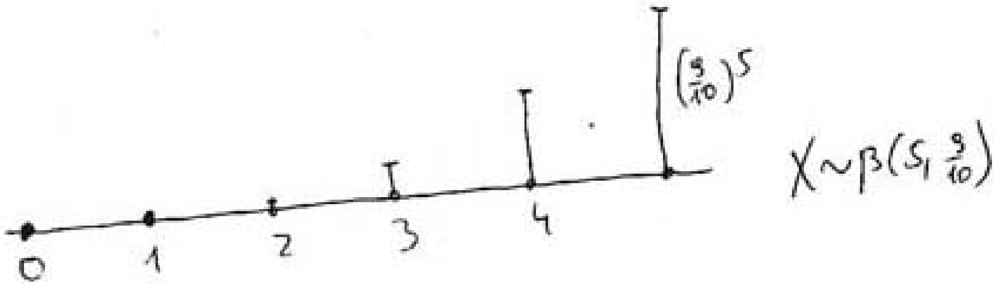
$P(X=3) = 0$

$P(X=4) = 0$

$P(X=5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 1 \cdot 1^5 \cdot 0^0 = 1$

$X \sim \beta(5, \frac{1}{2})$

$P(X=i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} = \binom{5}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$



Primjer 14. Odredimo očekivanje binomne slučajne varijable X~B(n,p).

Pokušajmo najprije problem riješiti zdravorazumski. Pođimo od posebnog primjera kada je
p=1/6 i n= 120.
Možemo smatrati da je X slučajna varijabla koja broji koliko je bilo šestica pri 120 bacanja kocke. Jasno je da očekujemo 20 šestica (jednako kao i petica, četvorka itd.).
Dakle
$E(X) = 20 = 120:6 = 120 \cdot 1/6$
Analognim zaključivanjem dobili bismo:

Ako je X~ B(n,p), onda je E(X) = np.

To se može dokazati i izravnim računanjem.

Primjer 15. Bacamo kocku 6 puta.
a) Koliko šestica očekujemo da ćemo dobiti?
b) Koliko puta treba baciti kocku pa da vjerojatnost da bude bar jedna šestica bude veća od 0.5?

Ako slučajna varijabla registrira broj šestica, onda je X=B(6,1/6).

a) Očekivani broj šestica upravo je očekivanje slučajne varijable X, dakle $E(X)=6\cdot 1/6=1$.
b) Pretpostavimo da kocku treba baciti *n* puta. Zadatak se može zapisati kao: $p(X\geq 1) \geq 0.5$.

Međutim:

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)$$
$$=1-(5/6)^n.$$

Dakle, mora biti:
$1-(5/6)^n \geq 0.5$
odakle se dobije $n \geq 4$.

Primjer 16. Bacamo kocku 17 puta. Slučajna varijabla X registrira broj šestica. Izračunajmo E(X) i pokušajmo procijeniti pomoću toga **najvjerojatniji broj** šestica. Izračunajmo najvjerojatniji broj šestica i usporedimo s procjenom.

Tu je $X \sim B(17,1/6)$; zato je $E(X) = 17/6 = 2+5/6$.
Izračunajmo nekoliko početnih vjerojatnosti:
$p(X=0) = (5/6)^{17}$
$p(X=1) = 17\cdot 1/6\cdot(5/6)^{16} > p(X=0)$
$p(X=2) = 8\cdot 17\cdot(1/6)^2(5/6)^{15} > p(X=1)$
$p(X=3) = 5\cdot 8\cdot 17\cdot(1/6)^3(5/6)^{14} < p(X=2)$.
Zaključujemo da je najvjerojatnije da će biti dvije šestice iako je na osnovi vrijednosti očekivanja netko mogao pomisliti da je najvjerojatnije da će biti 3 šestice.

Primjer 17. Odredimo varijancu slučajne varijable $X \sim B(n,p)$.

Dobije se **V(X) = npq, gdje je q =1- p.**
To se može i dobiti izravnim računanjem.

Zadatak 6. Od svih binomnih razdioba s istim parametrom *n*, odredite onu koja ima najveću disperziju.

Primjer 18. Odredimo rekurzivnu vezu koja povezuje dvije uzastopne vrijednosti binomne razdiobe.

Neka je $X \sim B(n,p)$ i $p_i = p(X=i)$, $i=0,1,\ldots,n$. Tada je (nakon uvrštavanja i skraćivanja)
$p_{i+1}/p_i = (n-i)p/(i+1)q$,
što se može zapisati i u obliku:
$$p_{i+1} = p_i \frac{(n-i)p}{(i+1)q}$$
Uočite da je tu izraz p/q stalan i on se na početku računanja može izračunati, a da se razlomak $(n-i)/(i+1)$ mijenja (kako *i* raste, brojnik se smanjuje, a nazivnik povećava). Rekurzivna je formula naročito potrebna za računanje vjerojatnosti binomne razdiobe kad je *n* jako velik (već za *n* oko 100 većina kalkulatora ne može računati faktorijele pa ni binomne koeficijente). Međutim, ova formula omogućuje da se, kad se izračuna p_0, da se sve ostale vjerojatnosti lako izračunaju: sljedeća se vjerojatnost dobije iz prethodne množenjem s jednostavnim razlomkom.

Primjer 19. Neka je $X \sim B(100,0.1)$. Izračunajmo nekoliko prvih vjerojatnosti.

Tu je $p/q=1/9.9$ pa se taj faktor u rekurzivnoj formuli može shvatiti kao dijeljenje s 9.9

$p_0=0.9^{100}=0.000026561$

$p_1=\frac{p_0}{9.9}\cdot\frac{100}{1}$ = 0.000268297 (dakle, početni rezultat koji je očitan na monitoru, prema rekurzivnoj formuli za i=0, množimo sa 100, a dijelimo s 9.9).

$p_2=\frac{p_1}{9.9}\cdot\frac{99}{2}$ = 0.001341485

$p_3=\frac{p_2}{9.9}\cdot\frac{98}{3}$ = 0.004426448

Sad uviđamo koje je pravilo: rezultat koji vidimo na monitoru množimo, odnosno dijelimo prema tom pravilu. Tako dalje dobivamo:
p_4= 0.010842562
p_5= 0.021028
p_6= 0.033630639
i tako dalje.
Uočite da je ova rekurzivna formula vrlo pogodna za izradu programa koji će nam davati vrijednosti vjerojatnosti u binomnoj razdiobi za različite parametre p i n.

Razdiobe koje su bliske (približno jednake) binomnoj.

Predpostavimo da imamo N predmeta dviju vrsta i da iz tog skupa predmeta slučajno uzimamo, bez vraćanja, n predmeta.
Jasno je da će vjerojatnost da među izabranih n predmeta bude i predmeta 1. vrste (dakle n-i predmeta druge vrste), i=0,1,…,n
ovisiti o početnoj razdiobi predmeta 1., odnosno 2. vrste (tj. o vjerojatnosti da slučajnim biranjem izaberemo predmet 1. vrste).
Također je jasno da razdioba koja registrira koliko smo slučajno odabrali predmeta 1. vrste **nije binomna**. Pojasnimo to na konkretnim primjerima.

Primjer 20. Neka je u spremištu N=20 predmeta od kojih je 15 prve, a 5 druge vrste i neka slučajno biramo n=4 predmeta (bez vraćanja). Slučajna varijabla X registrira koliko je među njima predmeta 1. vrste. Odredimo razdiobu od X.

Prije rješavanja nekoliko napomena.
(i) Prema uvjetima, ako slučajno biramo jedan predmet, onda je vjerojatnost da on bude 1. vrste jednak p=15/20=0.75, a da bude druge vrste q=0.25.
(ii) Da smo izvršili pokus slučajnog biranja četiriju predmeta, jedan po jedan, ali da smo svaki put predmet vratili natrag, onda bi slučajna varijabla koja registrira koliko je bilo predmeta 1. vrste bila binomna s parametrima n=4, p=0.75 (međutim mi ne vraćamo predmete natrag, pa nije tako; vidjet ćemo kako je).
(iii) Obično je u primjeni da su predmeti prve vrste ispravni, a predmeti 2. vrste neispravni (ili da su jedni od jednog proizvođača, drugi od drugoga i sl.).

Vratimo se na rješavanje izvornog problema. Očito je da je
R(X) = {0,1,2,3,4},

što znači da
možda ni jedan izabrani predmet nije 1. vrste (tj. X=0),
možda je točno jedan 1. vrste (tj. X=1),
možda ih je točno dva 1. vrste (tj. X=2),
možda ih je tri 1. vrste (tj. X=3),
i, konačno, možda su sva četiri 1. vrste (tj. X=4).

Vidimo:
Slučajna varijabla X postiže vrijednost 0, ako prvi izabrani bude 2. vrste, potom i drugi izabrani 2. vrste itd. Vjerojatnost da prvi izabrani bude 2. vrste je 5/20, međutim, vjerojatnost da tada i drugi izabrani bude 2. vrste nije više 5/20 (jer ne vraćamo predmet natrag, pa sada imamo 19 predmeta od kojih je 4 predmeta 2. vrste), već 4/19 itd. Tako dobijemo.
$p(X=0)=(5/20)\cdot(4/19)\cdot(3/18)\cdot(2/17)$,
a ne $(5/20)^4$, što bismo dobili da smo vraćali predmet, tj. da je bila riječ o binomnoj razdiobi.

Slučajna varijabla X postiže vrijednost 1, ako izaberemo 1 predmet 1. vrste i 3 predmeta 2. vrste. Međutim, taj jedan predmet 1. vrste možemo izabrati prvi put, možemo drugi put, možemo treći put, odnosno možemo tek 4. put. To su sve **disjunktne situacije** pa pripadajuće vjerojatnosti treba zbrojiti.
$p(X=1)=$
$15/20\cdot5/19\cdot4/18\cdot3/17+5/20\cdot15/19\cdot4/18\cdot3/17+5/20\cdot4/19\cdot15/18\cdot3/17+5/20\cdot4/19\cdot3/18\cdot15/17$
$4\cdot15/20\cdot5/19\cdot4/18\cdot3/17$
Treba uočiti da su sva četiri gornja pribrojnika, iako naizgled različita, u stvari jednaka. To se vidi nakon pomljivog razmatranja njihovih brojnika i nazivnika, međutim to se moglo i očekivati i objasniti prije ikakva računanja. Naime ta su četiri pribrojnika vjerojatnosti od 4 elementarna događaja (ishoda) u ovom pokusu, pa trebaju biti međusobno jednaki.
Također, treba uočiti da se rezultat razlikuje od onoga da smo vraćali predmete, tj. da je bila riječ o binomnoj razdiobi.

Za p(X=2), postupili bismo slično; tu bi bilo 6 (što je jednako $\binom{4}{2}$) mogućnosti jer je toliko mogućnosti da se u 2 od 4 biranja pojavi predmet prve vrste itd.

Primjer 21. Neka je u spremištu N=20 000 predmeta od kojih je 15 000 predmeta 1. vrste, a 5 000 je 2. vrste i neka biramo slučajno (bez vraćanja) n=40 predmeta. Neka slučajna varijabla X registrira koliko je među izabranim onih 1. vrste. Opišimo X.

Ovaj se primjer **samo po brojevima razlikuje od prethodnog** i, prema tome, mogao bi se riješiti po uzoru na taj. Međutim, **zbog velikog broja** ***N*** i **velikog broja** predmeta 1. vrste i predmeta 2. vrste, zaključujemo da se ovaj pokus **neće bitno razlikovati** od pokusa kad bismo birali 40 predmeta, jedan po jedan, i pritom uvijek predmet vraćali natrag. Naime, izborom nekoliko predmeta iz skupa od 20 000 predmeta, neće se bitno

promijeniti struktura između onih 1. i onih 2. vrste. Zato je naša slučajna varijabla **približno jednaka** binomnoj razdiobi
$B(40;0.75)$, jer je $n=40$ i $p=15\,000/20\,000 = 0.75$.
Tako se i pripadajuće vjerojatnosti, koje bi bilo mukotrpno računati izravno, mogu približno, ali vrlo precizno, izračunati pomoću pripadajućih vrijednosti binomne razdiobe (a i inače je važno da znamo da je neka razdioba bliska binomnoj, jer potonju dobro poznajemo). Očekivanje naše slučajne varijable približno je jednaka $40\cdot 0.75 = 30$, a varijanca $40\cdot 0.75\cdot 0.25 = 7.5$.

Poissonova razdioba.

Binomna razdioba primjer je diskretne razdiobe s konačno mnogo vrijednosti.
Poissonova razdioba također je diskretna, međutim prima beskonačno mnogo (prebrojivo) vrijednosti.
Točnije.

Definicija 2. Kažemo da je diskretna slučajna varijabla X distribuirana prema Poissonovu zakonu s parametrom $a>0$, ako je:
1. $R(X) = \{0,1,2,\ldots\}$
2. $p(X=i) = e^{-a}a^i/i!$, $i=0,1,2,3,\ldots$

Ako je tako pišemo $X\sim P(a)$.

Uočite da ta razdioba ovisi samo o jednom parametru (za razliku od binomne razdiobe koja ovisi o dvama parametrima).

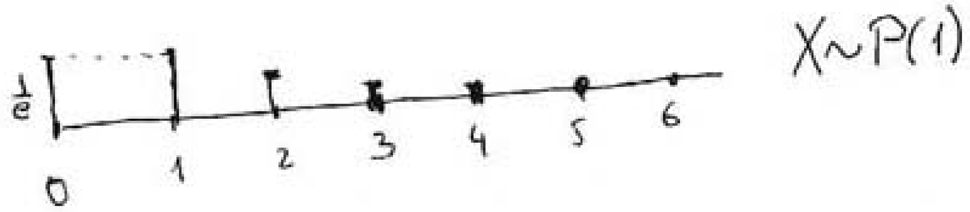
Zadatak 7. Pokažite da je $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+\ldots = 1$.

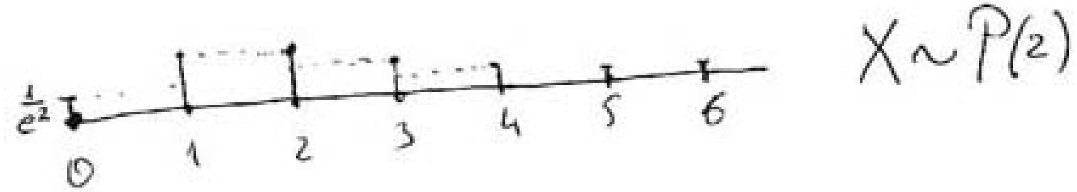
Uputa: Koristite se formulom za razvoj u red eksponencijalne funkcije.

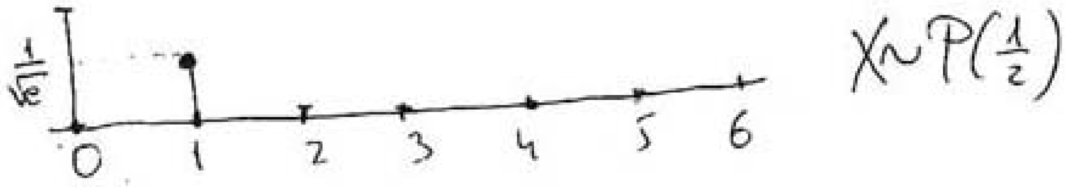
Zadatak 8. Provjerite da 1. i 2. zaista definiraju razdiobu vjerojatnosti.

Uputa: Zbog $a>0$, $p(X=i)>0$ za sve i, a iz zadatka 2. proizlazi da je zbroj tih brojeva jednak 1.

Primjer 22. Predočimo $P(a)$ za $a=1$, $a=2$ i $a=1/2$.







Primjer 23. Pokažimo: ako je $X \sim P(a)$, onda je $E(X) = a$ i $V(X) = a$.

Uvrštavajući u formulu:
$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \ldots + x_i p_i + \ldots$
$x_i = i$, $p_i = e^{-a} a^i / i!$, dobit ćemo:
$E(X) = e^{-a}(0 \cdot a^0/0! + 1 \cdot a^1/1! + 2 \cdot a^2/2! + \ldots + i \cdot a^i/i! + \ldots)$
$\quad = e^{-a} \cdot a(1 + a^1/1! + a^2/2! + \ldots)$
$\quad = e^{-a} \cdot a \cdot e^a$
$\quad = a.$
Slično se izračuna $V(X)$.

Dakle:

Ako je $X \sim P(a)$, onda je $E(X) = a$, $V(X) = a$

Poissonova se razdioba pojavljuje na primjer kod slučajnih varijabla koje broje broj poziva u jedinici vremena na nekoj telefonskoj centrali, broj ulaza na neku adresu, broj kvarova na nekom složenom uređaju i sl. Primjenu Poissonove razdiobe pokazujemo na nekoliko primjera.

Primjer 24. Prosječan broj poziva u minuti na nekoj telefonskoj centrali je 8. Odredite vjerojatnost da na toj centrali u nekoj minuti bude:

a) najviše 8 poziva,
b) između 5 i 10 poziva,
c) barem 5 poziva

Prije rješavanja pokušajte procijeniti ove vjerojatnosti odoka.
Da bismo riješili zadatak, **moramo prihvatiti jedan dogovor**, a to je da se **broj poziva ponaša prema Poissonovu zakonu**. Ako je tako, onda je slučajna varijabla X koja registrira broj poziva u minuti na toj centrali, Poissonova s parametrom a=8 (naime, parametar a je očekivanje, a očekivanje odgovara prosječnom broju poziva, odnosno prosječnoj vrijednosti što je postiže ta slučajna varijabla). Sad se pitanja mogu formulirati ovako:

a) $p(X\leq 8)=p_0+p_1+\ldots+p_8=e^{-8}(1+8/1!+8^2/2!+\ldots+8^8/8!)=0.5925$ (na 4 decimalna mjesta)
c) $p(5<X<10) = p_6+p_7+p_8+p_9 = e^{-8}(8^6/6!+\ldots+8^9/9!)= 0.4168$
d) $p(X>4)=1-p(X\leq 4)=1-p_0-p_1-p_2-p_3-p_4=0.9004$.

Zadatak 9. Predpostavimo da netko dobije prosječno 3 poruke na sat (na mobitelu).
(a) Koliko je puta vjerojatnije da tijekom sata dođe jedna poruka od toga da ne dođe ni jedna?
(b) Koji je najvjerojatnij broj poruka u jednom satu i koja mu je vjerojatnost.
(c) Kontroliranjem u 1000 sati dobiveni su rezultati o broju poruka. U koliko odprilike od tih 1000 sati neće biti ni jednog poziva, u koloko će biti točno jedan poziv itd.

Primjer 25. Uređaj se sastoji od dva dijela koji se nezavisno kvare jedan od drugoga. Jedan ima prosječno 3 kvara godišnje, a drugi 2. Uređaj radi ako mu oba dijela rade. Kolika je vjerojatnost da će uređaj raditi bez kvara

a) mjesec dana
g) cijelu godinu?

Prije rješavanja pokušajte provjeriti svoju intuiciju i procijeniti vremena odoka.
Neka X označava slučajnu varijablu koja mjeri broj kvarova u mjesecu prvog uređaja, a Y slučajnu varijablu koja označava broj kvarova u mjesecu na drugom uređaju (mjesec smo uzeli da bismo mogli riješiti a) zadatak, a za b) zadatak uzet ćemo da slučajne varijable registriraju broj kvarova godišnje). Da bismo mogli riješiti zadatak moramo pretpostaviti da je prosječni broj kvarova mjesečno 12 puta manji od prosječnog broja kvarova godišnje.
Zato je $X\sim P(1/4)$, $Y\sim P(1/6)$.
Budući da uređaj radi ako oba dijela rade i budući da je njihov rad, odnosno kvarenje nezavisno, imamo:

a) $p(X=0 \text{ i } Y=0)=p(X=0)p(Y=0)=e^{-1/4}e^{-1/6}=0.6592$.

b) Sad je $X\sim P(3)$, $Y\sim P(2)$ pa je
$p(X=0 \text{ i } Y=0)=p(X=0)p(Y=0)= e^{-3}e^{-2}=0.0067$.

Primjer 26. Riješimo prethodni primjer uz pretpostavku da uređaj radi ako mu bar jedan dio radi.

Sada je, uz iste oznake u oba slučaja:

a) p(uređaj bez prekida radi mjesec dana) = p(bar jedan od dijelova se neće kvariti mjesec dana) = p(X=0 ili Y=0)=p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0) zbog nezavisnosti
= 0.9660
b) p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0)=0.1919.

Napomena.

1. Iako je vjerojatnosti Poissonove razdiobe lakše računati nego binomne i ovdje je često dobro koristiti rekurzivnu formulu koju je lako izvesti:
   $p_{i+1}/p_i = a/(i+1)$.
2. Može se pokazati da Poissonova razdioba nastaje kao limes binomnih razdioba kod kojih parametar *n* teži u beskonačnost, a umnožak *np* je stalan broj. Tada taj niz razdioba (tj. njihovih vrijednosti i pripadnih vjerojatnosti) teži upravo k razdiobi P(np). Drugim riječima, ako želimo tako dobiti razdiobu P(a), onda parametar *n* redom uzima vrijednosti 2,3,4,…, a , parametar *p* redom uzima vrijednosti a/2, a/3, a/4,….
   Zato se nekada Poissonova razdioba koristi za aproksimaciju binomne (jer za dosta veliki *n* i ne prevelik *np*, vjerojatnosti možemo računati kao kod Poissonove razdiobe).

Zadatak 10. Smislite strategiju za izvođenje Poissonove razdiobe.