Približno rješavanje jednadžba (skica)

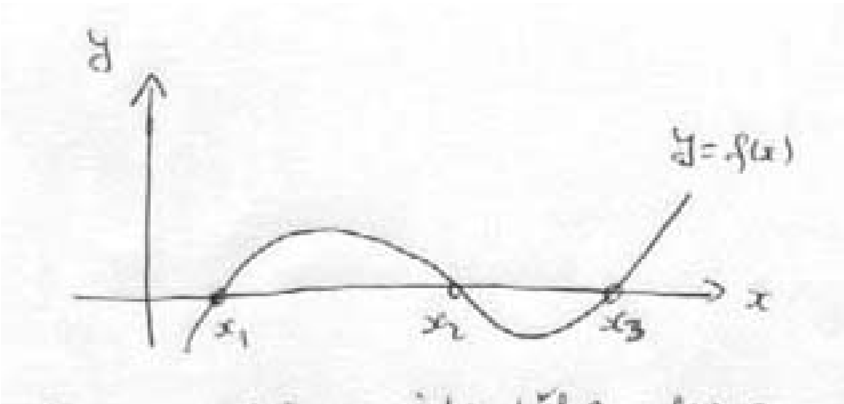
1. Uvod

Većina se inženjerskih problema svodi na rješavanje jednažba: s jednom ili više nepoznanica, sustava jednadžba, matričnih jednadžba, diferencijalnih jednadžba, integralnih jednadžba itd. U pravilu, takve se jednadžbe ne mogu egzaktno riješiti. Zato se postavlja problem približnog rješavanja jednadžba. Ovdje ćemo skicirati osnovne metode približnog rješavanja jednadžba s jednom nepoznanicom.
Jednadžba s jednom nepoznanicom je jednadžba oblika:
$f(x)=0$,
gdje je f funkcija jedne varijable. Tu se ograničavamo na slučaj kad je f realna funkcija realne varijable definirana na nekom intervalu realnih brojeva, koja je **neprekinuta** na tom intervalu (tj. graf joj je neprekinuta crta), štoviše, u pravilu mislimo na **elementarne funkcije** f (tj. na funkcije koje se mogu zadati s konačno mnogo operacija na kalkulatoru), posebice te funkcije imaju derivacije bilo kojeg reda.

Rješenje jednadžbe je bilo koji realni broj x^* takav da je $f(x^*)=0$.
Može se dogoditi da jednadžba nema rješenja, da ima konačno mnogo rješenja, ili da ima beskonačno mnogo rješenja.

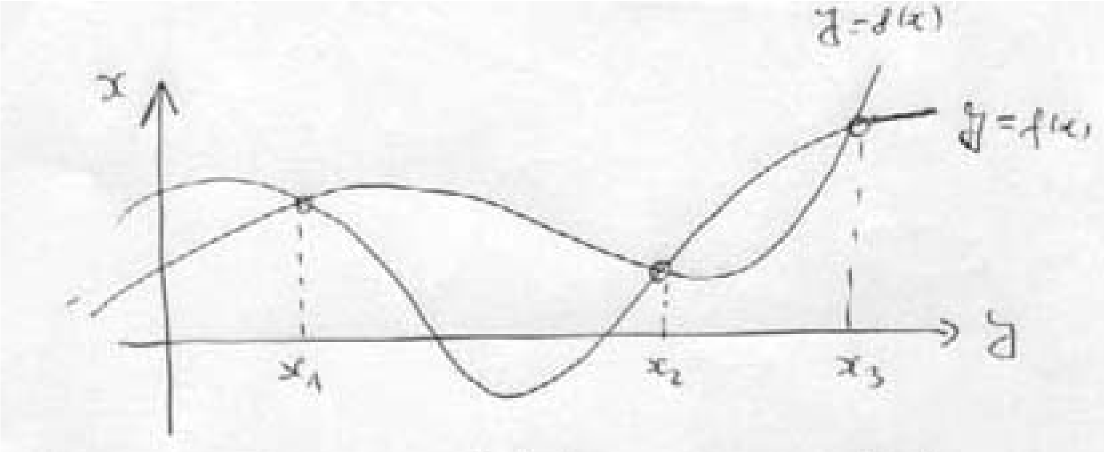
Primjer 1. (i) Jednadžba $x^2+1=0$ nema (realnih) rješenja.
(ii) Jednadžba $x^2-1=0$ ima dva rješenja: $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
(iii) Jednadžba $\sin x = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja: realne brojeve $k\pi$, gdje k prolazi skupom cijelih brojeva.

Grafička interpretacija rješenja. Realna rješenja jednadžbe $f(x)=0$ jesu upravo oni realni brojevi u kojima graf funkcije f siječe x-os (sl.1).



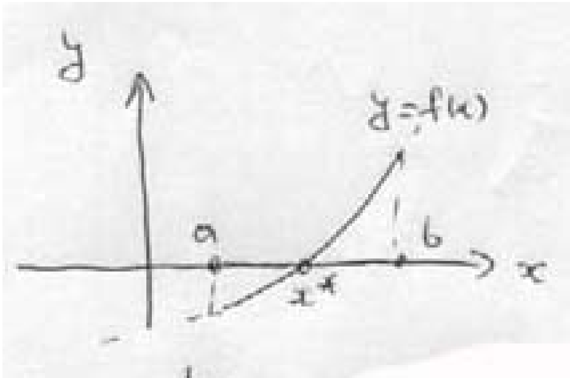
Sl.1. Rješenja jednadžbe f(x)=0

Varijanta: Realna rješenja jednadžbe $f(x)=g(x)$ je skup prvih koordionata točaka u kojima se sijeku grafovi funkcija f i g (sl.2.).



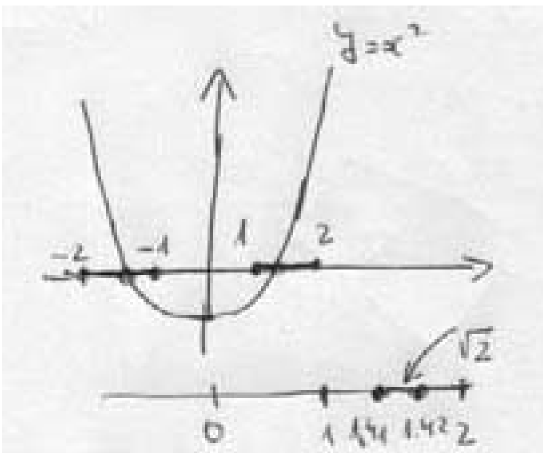
Sl.2. Rješenja jdnžbe f(x) = g(x)

Interval izoliranosti rješenja. To je svaki interval [a,b] unutar kojega ima točno jedno rješenje jednadžbe (sl.3.).



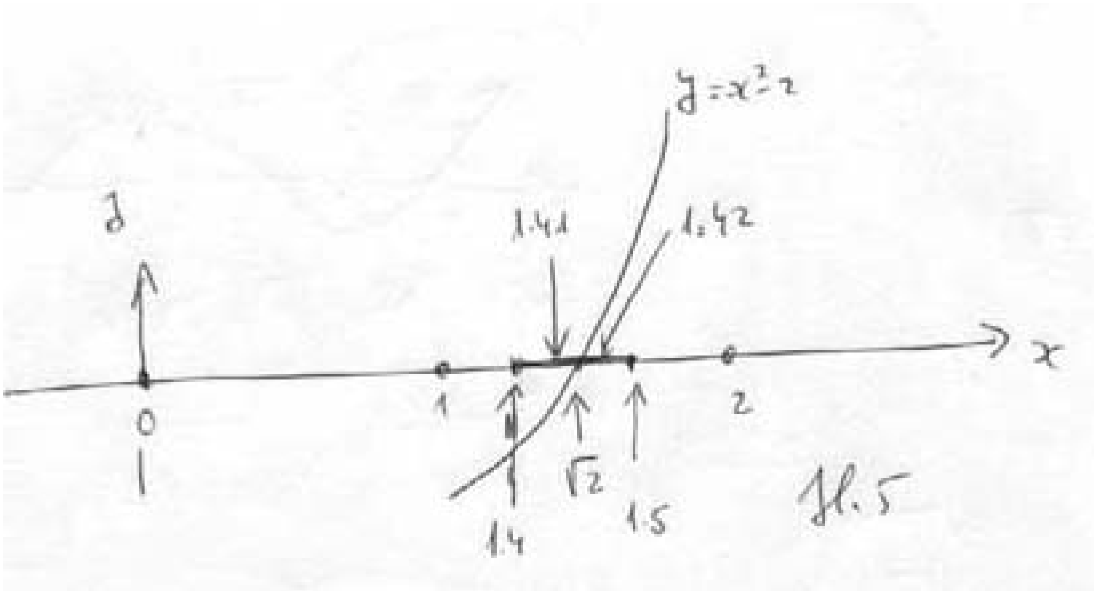
Sl.3

Primjer 2. Interval [-2,-1] je interval izoliranosti rješenja $-\sqrt{2}$ jednadžbe $x^2-2=0$, a interval [1,2] je interval izoliranosti rješenja $\sqrt{2}$ te iste jednadžbe (sl.4.). Naravno da ima i užih intervala izoliranosti od tih. Na primjer, [1.41, 1.42] takodjer je interval izoliranosti rješenja $\sqrt{2}$ jer je $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.



Sl. 4.

Približno rješenje jednadžbe f(x)=0. To je svaki broj α za koji vrijedi $f(\alpha) \approx 0$.
Na primjer, 1.4 je približno rješenje jednadžbe $x^2-2=0$. Naime,
$1.4^2-2= 1.96-2 = - 0.04 \approx 0$.
Kažemo da je 1.4 **aproksimacija** rješenja $\sqrt{2}$ te jednadžbe jer je $\sqrt{2} \approx 1.41$.
Takodjer, 1.41 je približno rješenje te jednadžbe, jer je
$1.41^2-2= 1.9881-2 = - 0.0119 \approx 0$.
Vidimo da je 1.41 **bolja aproksimacija** te jednadžbe od aproksimacije 1.4 ; to se očituje time što je 1.41 bliže broju $\sqrt{2}$ nego što je 1.4 (sl.5.).



Pogrješka aproksimacije. To je udaljenost ε stvarnog rješenja x^* i približnog rješenja (aproksimacije) α, dakle:
$\varepsilon := |x^* - \alpha|$.
U pravilu ne znamo točno pogrješku aproksimacije, jer bismo onda znali i rješenje. Zato je potrebno znati neku ocjenu za pogrješku. Ta se ocjena zove **ocjena grješke**. Na primjer, za aproksimaciju 1.4 od $\sqrt{2}$, vrijedi da je $\varepsilon < 0.1$ (to je ocjena grješke), jer je
$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

Metoda približnog rješavanja jednadžba. To je svaka metoda kojom se startajući od nulte aproksimacije x_0, unutar intervala izoliranosti rješenja x^*, redom dobivaju sve bolje aproksimacije $x_1, x_2, \ldots$ koje se približavaju (konvergiraju) pravom rješenju x^*.

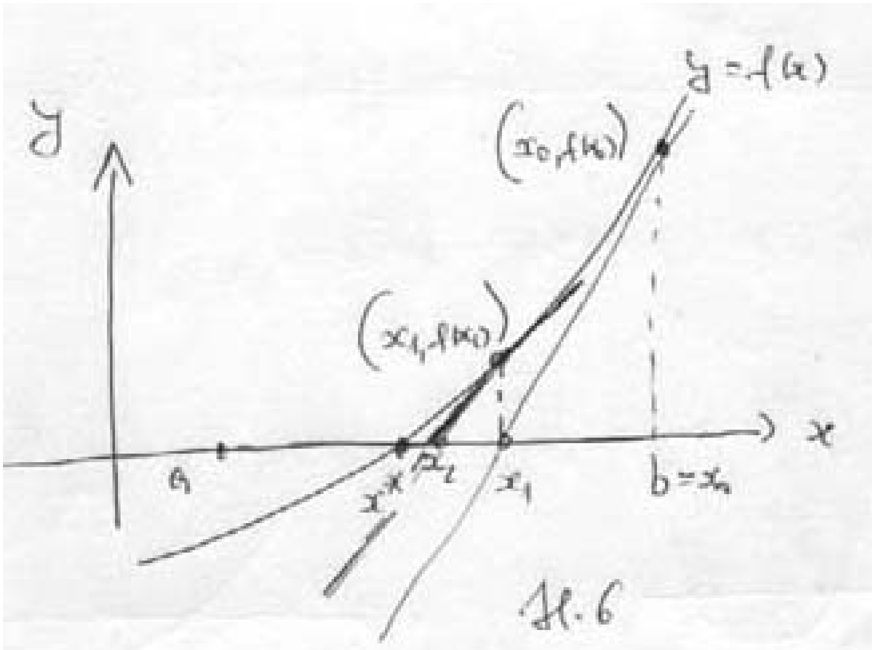
2. Metoda tangente (Newtonova metoda).

Ta se metoda geometrijski zasniva na povlačenju tangente na graf funkcije *f* koja sudjeluje u jednadžbi f(x)=0 (sl.6.).
Analitički, nakon biranja nulte aproksimacije (x_0=a ili x_0=b, za interval izoliranosti [a,b]), dobijemo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ i, općenito,

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

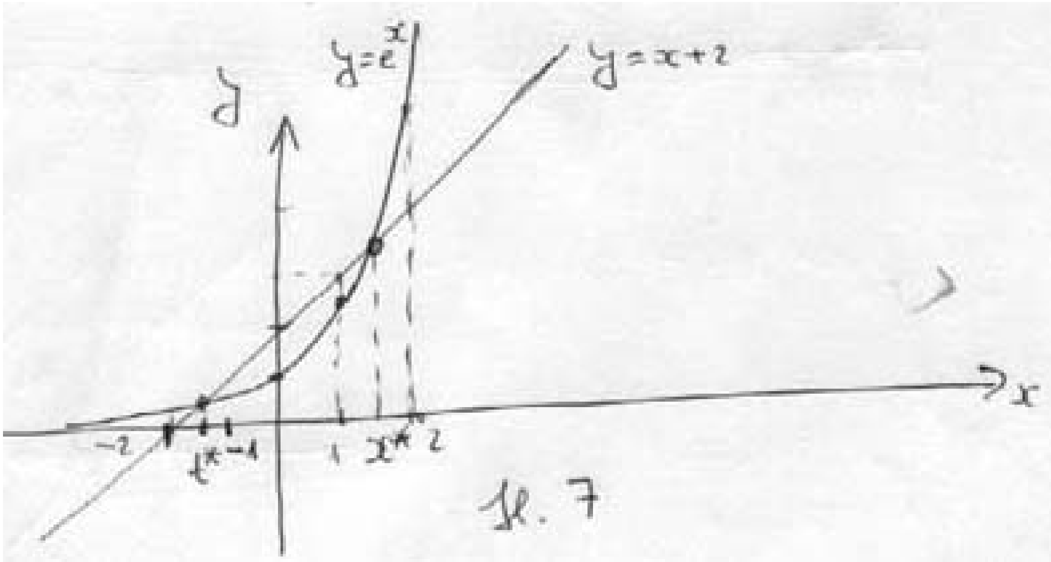


Primjer 3. Metodom tangente približno riješimo jednadžbu $e^x = x + 2$.
Važna napomena. Od 7. sljedećih koraka, za kolegij su relevantni samo 1,2, 6 i 7. Ostali se mogu zanemariti.

1. korak. Izolacija rješenja.
Provodimo je **grafičkom** i **analitičkom metodom**.
Grafička metoda: nacrtamo u istom koordinatnom sustavu krivulje s jednadžbama:
$y=e^x$ i $y = x+2$.
Vidimo da se te krivulje sijeku u dvjema točkama, zato jednadžba ima dva rješenja (sl.7.). Prvo je rješenje između –2 i –1, a drugo između 1 i 2.

Analitička metoda

x	e^x-x-2
0	-1
1	-0.28
2	3.39
-1	-0.6
-2	0.13



S objema metodama dolazimo do istog zaključka o broju rješenja.

2. korak. Računanje 1. i 2. derivacije funkcije $f(x) := e^x-x-2$.
$f'(x) = e^x-1$; $f''(x) = e^x$.

3. korak. Provjeravanje monotonosti funkcija f', f'' na dobivenim intervalima, potom njihovim neponištavanjem na tim intervalima.
Polazimo od druge derivacije (jer pomoću nje lakše možemo ocijeniti prvu; iako u ovom primjeru to nije potrebno jer sve teče glatko).
Očito je f'' rastuća i pozitivna svugdje, posebice na tim intervalima.
f' je također rastuća (što vidimo izravno, ali i iz toga što je f'' svugdje pozitivna);
Dalje: $f'(x) > 0$, za sve x iz [1,2] (što je zbog rasta dovoljno provjeriti u x=1)
$f'(x) < 0$, za sve x iz [-2,-1] (što je zbog rasta dovoljo provjeriti u x= -1).

4. korak. Određivanje minimuma apsolutnih vrijednosti prve derivacije te maksimuma apsolutnih vrijednosti 2. derivacije na tim intervalima. Točnije:
$m<\min|f'(x)|$, za x u pojedinom intervalu
$M>\max|f''(x)|$, za x u pojedinom intervalu.
(ove smo znakove izabrali jer će nam se *m* nalaziti u nazivniku određene formule, a *M* u brojniku te formule).
Moramo posebno raditi na svakom od intervala. Iz koraka 3. znademo da su f' i f'' monotone na tim intervalima i da na njima ne mijenjaju predznak. To nam omogućuje da m,M izaberemo računajući samo vrijednosti funkcija u rubovima (inače tako nebismo smjeli).
Interval [1,2]. Skicirajmo grafove od f' i f''.
Zaključujemo:
$\min|f'(x)| = e-1$, pa možemo uzeti m=1.7
(približni smo rezultat dobili
zaokruživanjem na niže, odnosno odbacivanjem znamenaka).
$\max|f''(x)|=e^2$, pa možemo uzeti M=7.4
(zaokruživanje na više).

Interval [-2,-1]. Opet skicirajmo grafove.
Zaključujemo:

$\min|f'(x)| = 1 - e^{-1}$, pa možemo uzeti $m=0.6$

$\max|f''(x)| = e^{-1}$, pa možemo uzeti $M= 0.4$.

5. korak. Određivanje uvjeta za zadanu točnost.

Iz formule $|x^*-x_{n+1}| < \frac{f^2(x_n)}{2} \cdot \frac{M}{m^3}$

i zahtjeva u zadatku: $|x^*-x_{n+1}|<0.001$,

vidimo da je dovoljno uzeti da bude: $\frac{f^2(x_n)}{2} \cdot \frac{M}{m^3} < 0.001$, odnosno

$$f^2(x_n) < \frac{2m^3}{M} \cdot 0.001$$

Taj uvjet treba posebno računati za svaki od intervala.

Interval [1,2].
Dobijemo:
$f^2(x_n)<0.003$ (uzimamo manji broj, odnosno, zaokružujemo na niže).

Interval [-2,-1]
Dobijemo:
$f^2(x_n)< 0.0037$

Smisao ove ocjene je sljedeći: kad dođemo da takvog n za koji će to vrijediti, onda stajemo, a za dobru približnu vrijednost uzimamo x_{n+1}.

6. korak. Biranje nulte aproksimacije x_0.
Biramo je tako da bude rubna točka intervala uz uvjet $f(x_0)f''(x_0)>0$.
Treba posebno birati za svaki od intervala.

Interval [1,2].
Dobijemo
$x_0=2$

Interval [-2,-1]
Dobijemo
$x_0=-2$

7. korak. Računanje aproksimacija pomoću formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,

tj. pomoću formule:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$$

I to se provodi posebno za svaki interval.

Interval [1,2].

$$x_1 = 2 - \frac{e^2 - 2 - 2}{e^2 - 1} = 1.46955$$

$$x_2 = 1.46955 - \frac{e^{1.46955} - 1.46955 - 2}{e^{1.46955} - 1} = 1.2073$$

$x_3=1.1488$
$x_4=1.1462$

(Rješenje zadovoljava tražene uvjete, jer je $(e^{1.1488}-1.1488-2)^2 <0.000032 < 0.003$)

Interval [-2,-1].

$$x_1 = -2 - \frac{e^{-2} - (-2) - 2}{e^{-2} - 1} = -1.843\,48$$

$x_2= -1.8414$

(Rješenje zadovoljava tražene uvjete.)

3. Metoda iteracije

Ta se metoda zasniva na zgodnu zapisivanju originalne jednadžbe f(x)=0, u obliku φ (x)=x i iteriranju:

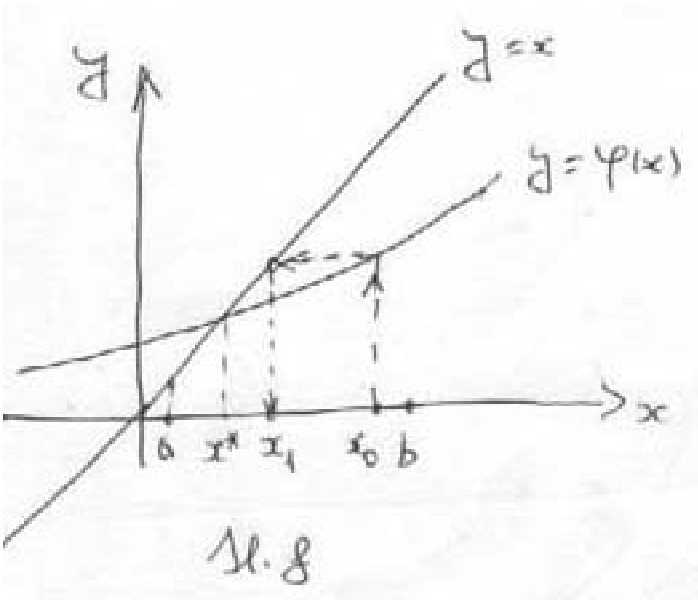
$x_1 = \varphi(x_0)$

$x_2 = \varphi(x_1)$

i općenito

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Geometrijski je metoda predočena slikom 8.



Sad ćemo jednadžbu iz Primjera 3 riješiti metodom iteracije.

Primjer 3. Metodom iteracije približno riješimo jednadžbu $e^x = x + 2$.
Važna napomena. Od 6 koraka za kolegij su relevantna samo 1,2 i 6; ostali se mogu zanemariti. Umjesto 3. i 4. koraka , ako uočimo da aproksimacija bježi izvan izabranog intervala izoliranosti, interval treba suziti, ili, ako to ne pomaže, prijeći na inverznu funkciju, kako ćemo i pokazati u ovom primjeru.

1. **korak**. Izolacija rješenja.

Ostaje isti kao kod metode tangente.

2. **korak**. Zapisivanje jednadžbe u obliku φ(x) = x.

   To se posebno radi za svaki od intervala jer se može dogoditi da za svaki bude posebna funkcija φ. Biranje te funkcije povezano je sa zahtjevom $|\varphi'(x)|<1$ na tom intervalu.

Interval [1,2]

Pokušaj da se jednadžba napiše u obliku $e^x-2 = x$, tj. biranje $\varphi(x) := e^x-2$, propada jer bi tada bilo $\varphi'(x) := e^x$, što je >1 za sve x>0, posebice za x između 1 i 2.

Interval [-2,-1]

Tu je dobro $e^x-2 = x$, tj. $\varphi(x) := e^x-2$ (jer je $e^x<1$ za x iz [-2,-1]).

Zato treba pokušati s inverznom funkcijom,
tj. sa zapisom: $e^x=x+2$, iz kojega dobijemo:
$x=\ln(x+2)$, tj. $\varphi(x) := \ln(x+2)$.
To će biti dobro jer je sada
$\varphi'(x) := 1/(x+2)$ što je <1 na intervalu $[1,2]$.

3. korak. Provjeravanje da φ preslikava interval u interval.
Provjeravanje se vrši posebno za svaki od intervala. Da bi se provelo dovoljno je provjeriti da je φ monotona na intervalu; tada će biti dovoljno provjeriti uvjet u rubovima (ako bude potrebno, početni interval možemo i smanjiti).

Interval $[1,2]$
Kako je ln rastuća funkcija i $\varphi(x) = \ln(x+2)$ je rastuća funkcija. Provjerimo je li $1<\varphi(1)<2$ i $1<\varphi(2)<2$.
Kako je $\varphi(1) = \ln 3 = 1.0986\ldots$ i
$\varphi(2) = \ln 4 = 1.386..$
to je ispunjeno.

Interval $[-2,-1]$
Kako je e^x rastuća funkcija i $\varphi(x) = e^x-2$ je rastuća, posebice i na tom intervalu, gledamo:
$\varphi(-2) = -1.8647$; $\varphi(-1)=-1.6321$.
Uvjet je zadovoljen.

4. Određivanje broja μ, tako da bude $|\varphi'(x)| \le \mu < 1$ za sve x iz intervala.
Taj je korak povezan s drugim i posebno se radi za svaki od intervala. Da bi se mogao provesti dovoljno je pokazati da je φ' monotona na svakom od intervala (pa se provjera vrši samo u rubnim točkama). Ako bude bilo potrebno, možemo smanjiti početni interval (naravno, pazeći da rješenje ostane u njemu i da uvjet iz prethodnog koraka ne bude narušen).

Interval $[1,2]$.
Kako je $1/(x+2)$ padajuća funkcija i pozitivna na tom intervalu, dovoljno je gledati $\varphi'(1)$ tj. $1/3$ pa možemo uzeti $\mu=0.34$

Interval $[-2,-1]$
Kako je sada $\varphi'(x) = e^x$, što je rastuća i pozitivna funkcija, dovoljno je gledati $\varphi(-1)$, tj. $1/e$ pa možemo uzeti $\mu=0.37$.

5. Određivanje uvjeta točnosti.
To radimo koristeći se ocjenom $|x^*-x_n| \le \frac{\mu}{1-\mu}|x_n - x_{n-1}|$
odakle se dobije da je dovoljno da bude:
$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-\mu}{\mu}\varepsilon .$$
To se posebno radi za svaki od intervala.

Interval $[1,2]$
Dobijemo
$|x_n-x_{n-1}|<0.0019$ (biramo manji broj od stvarno izračunatog).

Interval $[-2,-1]$
Dobijemo
$|x_n-x_{n-1}|<0.0017$

Smisao je ovih ocjena u tome da prestajemo za onaj *n* kad one budu ispunjene, a za dobru aproksimaciju uzimamo x_{n+1}.

6. korak. Računanje aproksimacija prema formuli $x_{n+1}=\varphi(x_n)$.

I ovo se provodi posebno za svaki od intervala. Nultu aproksimaciju biramo po volji u početnom intervalu (obično neku od rubnih točaka).

Interval [1,2].
Formula je $x_{n+1}=\ln(x_n+2)$
$x_0=1$ (mogli smo izabrati bilo koji broj intervala [1,2])
$x_1= \ln(1+2) = \ln 3 = 1.0986$
$x_2 = \ln 3.0986 = 1.13095$
$x_3= 1.141338$
1.14465
1.14570
1.14604
Kako je razlika 5. i 4. aproks.
manja od 0.0019,
dobra je 6. aproksimacija
za zadanu točnost.

Interval [-2,-1]
Formula je $x_{n+1}=e^{x_n}-2$
$x_0= -1.$
$x_1=e^{-1}-2= -1.63212$
-1.80449
- 1.83544
- 1.84046
- 1.84126
- 1.84138

Komentar. Objema smo metodama približno dobili ista rješenja. Metodom tangente teže je računati, ali treba manje koraka (u ovim primjerima); dok je metodom iteracije puno lakše računati.