Pitanja iz Primjenjene matematike

Na usmenom ispitu iz primjenjene matematike student (studentica) slučajno bira kuvertu u kojoj su 5 od navedenih 34 pitanja. Za pozitivnu ocjenu treba odgovoriti na sva pitanja.

Opća pitanja

1. Što je skup ishoda (elementarnih događaja) u nekom pokusu? Ispišite skup ishoda u pokusima: a) bacanje kocke 1 put, b) bacanje novčića 2 puta, c) biranje dvočlanog podskupa iz n-člana skupa.

2. Kako se skupovno interpretira događaj? Zapišite skup svih događaja u pokusima bacanja kocke 1 put, te bacanja novčića 2 puta. Objasnite zašto ima jednako dvočlanih i četveročlanih podskupova kod bacanja kocke jedan put.

3. Definirajte operacije zbrajanja i množenja događaja te objasnite kako se te operacije skupovno interpretiraju. Što je suprotni događaj i kako se skupovno interpretira?

4. Što je algebra događaja i koja su svojstva operacija u algebri događaja?

5. Što je vjerojatnost događaja i koja su joj svojstva? Objasnite to u slučaju pokusa s konačno mnogo ravnopravnih ishoda.

6. Objasnite formulu za vjerojatnost zbroja dvaju događaja. Kako se pomoće nje izvodi formula vjerojatnosti zbroja triju ili više događaja? Što je s tim formulama ako se događaji isključuju, a što ako su nezavisni?

7. Što je uvjetna vjerojatnost događaja i kako se računa? Objasnite to na nekom primjeru. Objasnite produktnu formulu (formulu za vjerojatnost umnoška događaja).

8. Što znači da se događaji isključuju, a što da su nezavisni? Objasnite tipični primjer nezavisnosti događaja. Objasnite kako se ti pojmovi očituju kod formula za vjerojatnost zbroja (dvaju ili više) događaja i za vjerojatnost umnoška (dvaju ili više) događaja.

9. Što je potpun skup događaja? Napišite nekoliko potpunih skupova događaja u pokusu bacanja kocke 3 puta.

10. Napišite i izvedite formulu potpune vjerojatnosti. Navedite neki primjer uporabe te formule.

11. Napišite i izvedite Bayesovu formulu. Zašto se ta formula zove i provjera hipoteze? Formulirajte neki primjer.

12. Definirajte slučajnu varijablu. Koja je osnovna podjela slučajnih varijabla? Navedite primjere važnih slučajnih varijabla (razdioba vjerojatnosti)?

13. Definirajte diskretnu slučajnu varijablu. Navedite važne diskretne slučajne varijable.

14. Definirajte kontinuiranu slučajnu varijablu. Objasnite kako se računa vjerojatnost u slučaju takvih varijabla. Navedite važne kontinuirane slučajne varijable.

15. Što je funkcija distribucije, a što funkcija gustoće slučajne varijable? Koja je veza među njima? Napišite te funkcije za važne slučajne varijable.

16. Što je očekivanje, a što varijanca slučajne varijable i koja je njihova fizikalna interpretacija? Napišite te veličine u slučaju važnih razdioba vjerojatnosti?

17. Objasnite analogiju između diskretnih i kontinuiranih slučajnih varijabla.

18. Definirajte binomnu razdiobu vjerojatnosti te navedite i objasnite tipičnu situaciju u kojoj se ona pojavljuje.

19. Definirajte Poissonovu razdiobu vjerojatnosti, navedite tipičnu situaciju u kojoj se ona pojavljuje te izvedite očekivanje i varijancu te razdiobe.

20. Definirajte eksponencijalnu razdiobu vjerojatnosti, navedite tipičnu situaciju u kojoj se pojavljuje, izvedite funkciju distribucije i očekivanje.

21. Definirajte normalnu razdiobu vjerojatnosti, navedite tipične primjere u kojima se pojavljuje, objasnite kako se računa vjerojatnost i objasnite pravilo *tri sigme*.

22. Definirajte jediničnu normalnu razdiobu, Laplaceovu funkciju i objasnite kako se ostale normalne razdiobe svode na jediničnu.

23. Što je transformacija slučajne varijable. Objasnite i na primjeru normalne razdiobe.

24. Što znači da su dvije slučajne varijable nezavisne? Kako se nezavisnost slučajnih varijabla odražava na očekivanje i varijancu.

25. Kako procjenjujemo očekivanje, a kako varijancu slučajne varijable na osnovi nezavisnih mjerenja te slučajne varijable? Što je to standardna grješka i kojio joj je smisao?

26. Što je interval pouzdanosti i kako se određuje? Objasnite uloge jedinične normalne i t-razdiobe.

27. Objasnite t-test i F-test.

28. Objasnite χ^2 - test.

29. Što je približno rješenje jednadžbe? Što je interval izoliranosti rješenja? Objasnite na primjeru jednadžbe $2x^3 + 3x^2 - 5x - 1 = 0$.

30. Objasnite metodu tangente. Pripremite za tu metodu jednadžbu $e^{x-3} = x + 1$.

31. Objasnite metodu iteracije. Pripremite za tu metodu jednadžbu $e^{x-3} = x+1$.

32. Što je ocjena grješke približne metode rješavanja jednadžbe, a što je točnost rješenja jednadžbe? Objasnite na primjeru metoda tangente i iteracije.

33. Objasnite metodu najmanjih kvadrata i navedite tipične primjere u inženjerstvu u kojima se primjenjuje ta metoda.

34. Izvedite metodu najmanjih kvadrata u slučaju linearne veze. Navedite primjere nelinearnih veza koje se svode na linearne.

Odgovori na neka pitanja

2. Događaj se skupovno interpretira kao podskup skupa ishoda. U toj interpretaciji događaj se sastoji od onih ishoda koji čine taj događaj.
Bacanje kocke jedan put.
U tom se pokusu skup ishoda interpretira skupom S={1,2,3,4,5,6}, a događaji podskupovima skupa S. To su:
Ø (nemogući događaj);
{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6};
{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{1,6},{2,3},{2,4},{2,5},{2,6},{3,4},{3,5},{3,6},{4,5},{4,6},{5,6};
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,2,6},{1,3,4},{1,3,5},{1,3,6},{1,4,5},{1,4,6},{1,5,6},{2,3,4},
{2,3,5},{2,3,6},{2,4,5},{2,4,6},{2,5,6},{3,4,5},{3,4,6},{3,5,6},{4,5,6};
{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,6},{1,3,4,5},{1,3,4,6},{1,3,5,6},{2,3,4,5},{2,3,4,6},{2,4,5,6},
{3,4,5,6};
{1,2,3,4,5},{1,2,3,4,6}{1,2,3,5,6},{1,2,4,5,6},{1,3,4,5,6},{2,3,4,5,6};
S (sigurni događaj).
Dvočlanih podskupova ima jednako kao i četveročlanih jer je komplement svakog dvočlana podskupa šesteročlana skupa četveročlan posdskup i obratno. To se može objasniti i simetričnošću binomnih koeficijenata.
Bacanje novčića dva puta.
U tom se pokusu skup ishoda interpretira skupom S = {PP,PG,GP,GG}, a događaji podskupovima skupa S. To su:
Ø;
{PP},{PG},{GP},{GG};
{PP,PG},{PP,GP},{PP,GG},{PG,GP},{PG,GG},{GP,GG};
{PP,PG,GP},{PP,PG,GG},{PP,GP,GG},{PG,GP,GG};
S.

5. Vjerojatnost je funkcija *p* koja svakom događaju pridružuje neki broj iz segmenta [0,1], a ima svojstva:
(i) p(S) = 1 (vjerojatnost sigurnog događaja je 1)
(ii) p(A+B) = p(A) + p(B), ako se događaji A,B isključuju.
Funkcija p ima dodatna svojstva koja se mogu izvesti iz svojstva (i), (ii):
(iii) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ (formula vjerojatnosti suprotnog događaja),
posebice je p(Ø) = 1.

(iii) p(A+B) = p(A) + p(B) – p(AB), za svaka dva događaja A,B.

U slučaju pokusa s konačno mnogo ravnopravnih ishoda vjerojatnost događaja može se definirati kao kvocijent broja povoljnih mogućnosti i broja svih mogućnosti. To znači da ako ukupno ima n ishoda i ako se događaj A sastoji od m ishoda, onda je $p(A) = \frac{m}{n}$. Drugim riječima, ako su događaji ravnopravni, onda njihove vjerojatnosti moraju biti međusobno jednake, a budući da je ukupna vjerojatnost 1 (svojstvo (i)), iz uzastopne primjene svojstva (ii) slijedi da je vjerojatnost svakog ishoda $\frac{1}{n}$. Kako se A sastoji od m ishoda, iz (ii) slijedi da je p(A) = $m\frac{1}{n}$.

14. Kontinuirana slučajna varijabla jest slučajna varijabla koja prima svaku vrijednost iz nekog intervala, svaku od njih s vjerojatnošću 0. Također, kontinuirana slučajna varijabla jest takva slučajna varijabla kojoj je funkcija distribucije neprekinuta.
Neka je X kontinuirana slučajna varijabla, neka je f njena funkcija gustoće i neka je F njena funkcija distribucije. Tada je vjerojatnost da X postigne vrijednost između realnih brojeva a,b jednaka razlici vrijednosti funkcije F u tim brojevima, odnosno površini ispod grafa funkcije f između a i b.
Kraće: $p(a<X<b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.
Primjeri važnih kontinuiranih slučajnih varijabla: normalna, eksponencijalna, Studentova.

24. Diskretne slučajne varijable X, Y međusobno su nezavisne ako vrijedi: p((X=a)(Y=b)) = p(X=a)p(Y=b), za svaka dva realna broja a,b.
Kontinuirane slučajne varijable X,Y nezavisne su ako vrijedi $p((a<X<b)(c<Y<d)) = p(a<X<b)p(c<Y<d)$, za svaka dva intervala <a,b>, <c,d>.
Te se definicije mogu zapisati i pomoću uvjetne vjerojatnosti.
Očekivanje umnoška dviju nezavisnih slučajnih varijabla jednak je umnošku njihovih očekivanja: E(XY) = E(X)E(Y).
Za varijancu linearne kombinacije nezavisnih slučajnih varijabla vrijedi:
V(aX+bY) = $a^2V(X) + b^2V(Y)$.
Slično je za više nezavisnih slučajnih varijabla.

26. Interval poudanosti jest interval unutar kojeg se s određenom vjerojatnošću nalazi mjerena veličina koja je normalno distibuirana. Neka je očekivanje μ mjerene veličine

procijenjeno aritmetičkom sredinom $\overline{x}$ dobivenom iz n mjerenja te veličine, neka je $s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$ procjena varijance te veličine i $s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ standardna grješka.

Interval pouzdanosti uz vjerojatnost 1-2p jest interval $\langle \overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon \rangle$, ako vrijedi:

$$p(\overline{x} - \varepsilon < \mu < \overline{x} + \varepsilon) \geq 1 - 2p$$

Obično se uzima 1-2p = 0.95.

Ako je broj mjerenja veći od 30, onda se ε određuje iz jednakosti $2\phi(\frac{\varepsilon}{s_{\overline{x}}}) = 1 - 2p$ (gdje je ϕ Laplaceova funkcija), tj. $\varepsilon = \phi^{-1}(0.5 - p) \cdot s_{\overline{x}}$

Ako je broj mjerenja mali, onda je $\varepsilon = t_p(k) \cdot s_{\overline{x}}$, gdje je $k = n\text{-}1$, T Studentova razdioba s k stupnjeva slobode i $p(|T| \geq t_p(k)) = 2p$. Broj $t_p(k)$ očitavamo iz tablice t-razdiobe i on je veći od pripadne vrijednosti dobivene pomoću Laplaceove funkcije, što znači da je interval pouzdanosti (uz istu vjerojatnost) širi ako je broj mjerenja mali.

Jedinična normalna (u prvom slučaju), odnosno t-razdioba (u drugom slučaju) pojavljuje se zato što je $\frac{\overline{x} - \mu}{s_{\overline{x}}}$ jedinična normalna razdioba ako je mjerena veličina normalno distribuirana (odnosno Studentova razdioba s k stupnjeva slobode ako je mjerena veličina normalno distribuirana). Ako je k dovoljno velik (oko 30), Studentova razdioba približno je jednaka jediničnoj normalnoj.

29. Približno rješenje jednadžbe f(x) = 0, jest bilo koji realni broj α takav da je $f(\alpha) \approx 0$.
Interval izoliranosti rješenja jednadžbe jest zatvoreni interval [a,b] unutar kojega se nalazi samo jedno rješenje te jednadžbe.
Dovoljni uvjeti da bi [a,b] bio interval izoliranosti rješenja jednadžbe f(x) = 0, za neprekinutu funkciju f kojoj su prva i druga derivacija također neprekinute na [a,b]:

(i) f(a)f(b)<0 (time se osigurava da jednadžba ima bar jedno rješenje u tom intervalu; tu je važno da f bude neprekinuta)

(ii) f´ nema nultočaka na intervalu [a,b] (to znači da je f´ ili strogo pozitivna ili strogo negativna na [a,b]; to pak znači da funkcija f ili strogo raste ili strogo pada na tom intervalu; time se postiže da jednadžba ima točno jedno rješenje na tom intervalu; tu je važno da je f´ neprekinuta funkcija na [a,b])

Za metodu tangente zahtijeva se da interval izoliranosti ima i svojstvo:

(iii) f´´ nema nultočaka na intervalu [a,b] (to znači da je f´´ ili strogo pozitivna ili strogo negativna na [a,b]; to pak znači da je funkcija f ili strogo konveksna ili strogo konkavna na tom intervalu; tu je važno da je f´´ neprekinuta na [a,b]).

Ako je $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$, onda je $f´(x) = 6x^2 + 6x - 5$, $f´´(x) = 12x + 6$, a jednadžba f(x) = 0 ima tri rješenja. Za intervale izoliranosti možemo uzeti redom intervale [-3,-2], [-0.4,0], [1,2]. Naime:

f(-3)f(-2) = -13·5 < 0,
Lako se vidi da je
f´´ < 0 na intervalu [-3,-2];
specijalno f´ je strogo padajuća
na tom intervalu. Kako je
f´(-2) = 7 > 0, zaključujemo da je

prva derivacija strogo pozitivna
na tom intervalu.

f(-0.4) f(0) = 1.352·(-1) < 0,
Lako se vidi da je
f´´ > 0 na intervalu [-0.4,0];
specijalno f´ je strogo rastuća
na tom intervalu. Kako je
f´(0) = -5 < 0, zaključujemo da je
prva derivacija strogo negativna
na tom intervalu.

f(1)f(2) = (-1) ·17 < 0,
Lako se vidi da je
f´´ > 0 na intervalu [1,2];
specijalno f´ je strogo rastuća
na tom intervalu. Kako je
f´(1) = 7 > 0, zaključujemo da je
prva derivacija strogo pozitivna
na tom intervalu.

Primjer usmenog ispita

1. Objasnite formulu za vjerojatnost zbroja dvaju događaja. Kako se pomoće nje izvodi formula vjerojatnosti zbroja triju ili više događaja? Što je s tim formulama ako se događaji isključuju, a što ako su nezavisni?

2. Definirajte slučajnu varijablu. Koja je osnovna podjela slučajnih varijabla? Navedite primjere važnih slučajnih varijabla (razdioba vjerojatnosti)?

3. Što je funkcija distribucije, a što funkcija gustoće slučajne varijable? Koja je veza među njima? Napišite te funkcije za važne slučajne varijable.

4. Objasnite metodu iteracije. Pripremite za tu metodu jednadžbu $e^{x-3} = x+1$.

5. Objasnite metodu najmanjih kvadrata i navedite tipične primjere u inženjerstvu u kojima se primjenjuje ta metoda.