# Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

## Uvodna lekcija

U ovoj ćemo lekciji ukratko opisati sadržaj kolegija i natuknuti neke važne pojmove i primjere. Ako su $x, y$ dvije veličine ovisne jedna o drugoj, onda je najvažniji inženjerski problem pronalaženje te veze. Eksplicitno rješenje tog problema je, na primjer, pronalaženje funkcije $f$ tako da bude

$$y = f(x)$$

Vezu izmedju $x$ i $y$ eksperimentalno proučavamo izvodjenjem niza pokusa, na primjer tako da mijenjamo vrijednosti veličine $x$, a očitavamo pripadne dobivene vrijednosti od $y$. Tada funkciju $f$ možemo shvatiti i kao zapis rezultata beskonačno mnogo takvih zamišljenih pokusa. Sve je intuitivno jasnije ako umjesto veličine $x$ imamo vrijeme $t$. Tada razmatramo mijenjanje veličine $y$ u vremenu (njen život, proces koji teče). Takodjer nas zanimaju brzina kojom se $y$ mijenja i akceleracija, tj. brzina promjene brzine. Poznato je da vrijedi:
ako je $y = f(t)$, onda je
brzina kojom se $y$ mijenja $v(t) = f'(t)$ (prva derivacija po varijabli $t$),
a akceleracija $a(t) := v'(t) = f''(t)$ (druga derivacija po varijabli $t$).
To se katkad kraće zapisuje ovako:
$y(t)$ vrijednost veličine $y$ u vremenu $t$
$y'(t)$ vrijednost brzine promjene veličine $y$ u vremenu $t$
$y''(t)$ vrijednost akceleracije promjene veličine $y$ u vremenu $t$.
Često se još više skraćuje pa se piše samo $y, y', y''$, dok se varijabla $t$ ispušta.
Opisanu situaciju možemo zamišljati kao gibanje točke po pravcu. Naime, dok vrijeme $t$ prolazi, vrijednost $y(t)$ giba se po $y$-osi.

**Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda**
U praksi je često teško izravno doći do željene veze $y = f(t)$. Umjesto toga lakše dolazimo do veze u kojoj se, uz $t$ i $y$, pojavljuje i brzina promjene $y'$. To je **obična diferencijalna jednadžba prvog reda** koja se općenito može zapisati kao

$$F(t, y, y') = 0,$$

gdje $F$ neka funkcija triju varijabla. To je sad već matematička zagonetka u kojoj nam je cilj osloboditi se "suvišne" veličine $y'$, tako da nam ostanu samo $t$ i $y$ (rješavanje diferencijalne jednadžbe). Taj se matematički problem općenito ne može egzaktno riješiti pa se pribjegava približnim (numeričkim) metodama. Situacija je nešto jednostavnija ako se brzina promjene može eksplicitno zapisati kao funkcija od $t$ i $y$, tj. ako je

$$y' = g(t, y), \tag{1}$$

za neku funkciju $g$ dviju varijabla. Intuitivno je jasno da je ovakva diferencijalna jednadžba to složenija što je složenija funkcija $g$. Pokazuje se da su kod proučavanja prirodnih pojava najvažnije zakonitosti relativno jednostavna oblika. Naravno, ta se jednostavnost pojavljuje u idealnoj situaciji (u izoliranim uvjetima), dok se u realnim uvjetima sve posložnjuje. Jedna od glavnih strategija jest da se u prvom koraku dobro prouči idealna situacija, a da se onda vrše korekcije tog rješenja, kako bi što bolje odgovaralo stvarnosti.
Matematički najjednostavnije diferencijalne jednadžbe nastaju ako funkcija $g$ u (1) ne ovisi o $y$ već samo o $t$, tj. ako je $y' = h(t)$ za neku funkciju $h$.
Tada se problem rješava izravnim integriranjem:
$y = \int h(t)dt = H(t) + C$,
gdje je $H$ primitivna funkcija od $h$ (tj. $H' = h$) i $C$ konstanta.
Druga je jednostavna (ali ne nevažna) skupina ako $g$ u (1) ne ovisi o $t$ već samo o $y$. Za široku klasu prirodnih pojava brzina promjene veličine $y$ proporcionalna je, u svakom trenutku samoj veličini $y$, tj. za njih je

$$y' = ky, \tag{2}$$

gdje je $k$ neka konstanta.
Na primjer, ako je $y(t)$ količina jedinki u vremenu $t$ koje se slobodno i po istom zakonu razmnožavaju, onda će u malom vremenskom intervalu $\Delta t$, od vremena $t$ do vremena $t + \Delta t$, količina novonastalih jedinki $\Delta y(t)$ biti približno proporcionalna količini jedinki $y(t)$ u vremenu $t$, i proteklom vremenu $\Delta t$. Zato će biti

$$\Delta y(t) \approx ky(t)\Delta t,$$

gdje je $k$ neka pozitivna konstanta koja je to veća što je razmnožavanje brže.
Odatle dobijemo

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \approx ky(t)$$

pa je razumna predpostavka da prelaskom na limes dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ky(t),$$

što je upravo diferencijalna jednadžba $y' = ky$.
Lako se vidi da je rješenje te diferencijalne jednadžbe

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

pa smo dobili da $y$ eksponencijalno raste. Posebno, taj je rast ubrzan. Uočite da je dovoljno znati početnu količinu $y(0)$ materije i koeficijent $k$ (razmnožavanja, rasta,...) pa da možemo odrediti količinu materije u svakom trenutku $t$.
Slično bismo dobili za jednostavan raspad materije (biološke ili nežive poput radioaktivne), samo što je u tom slučaju koeficijent $k$ negativan. Naravno, tada $y$ eksponencijalno pada. Posebno, taj je pad usporen.

Prva malo složenija situacija jest ta ako količina materije koja raste ne može prijeći unaprijed zadanu vrijednost. Tada se, u idealnim okolnostima, u diferencijalnoj jednadžbi moraju pojaviti dva parametra: jedan od njih je ta maksimalna vrijednost $M$, a drugi je karakteristika rasta. Intuitivno je jasno da je najjednostavnija takva mogućnost ako $y$ starta od početne vrijednosti $y(0)$ i u početku ubrzano raste, potom prelazi u usporeni rast. Za egzaktnije odredjivanje rješenja, uočimo da bi rast trebao biti to sporiji što je $M - y$ manje (odnosno to brži što je $M - y$ veće). Naravno, rast bi trebao biti to veći što je $y$ veće. Najjednostavnija takva mogućnost je ako je količina nastale materije u intervalu $t$ do $t + \Delta t$ približno proporcionalna i količini materije $y(t)$ i $M - y(t)$. Drugim riječima:

$$\Delta y(t) \approx ky(t)(M - y(t))\Delta t,$$

gdje je $k$ neka pozitivna konstanta. To vodi do nešto složenije diferencijalne jednadžbe od one prije

$$y' = ky(M - y)$$

kojoj je rješenje tzv. **logistička funkcija**, o čemu ćemo podrobnije govoriti poslije.

**Obične diferencijalne jednadžbe drugog reda**

Kod mnogih prirodnih pojava prirodno dolazimo do veze izmedju vremena $t$, vrijednosti razmatrane veličine $y(t)$, brzine njene promjene $y'(t)$ i akceleracije $y''(t)$. To je **obična diferencijalna jednadžba** 2. **reda**, koja se općenito može zapisati kao

$$F(t, y, y'y'') = 0, \tag{3}$$

gdje je $F$ neka funkcija četiriju varijabla. Važnost tih jednadžba proizlazi i iz Newtonova zakona koji kaže da je sila proporcionalna akceleraciji, a da je koeficijent proporcionalnosti masa. Podsjetimo da svaki proces u vremenu možemo shvatiti gibanjem, koje je uzrokovano nekom silom.
Najjednostavnija od takvih jednadžba je

$$y'' = a, \tag{4}$$

koja opisuje gibanje po pravcu pod utjecajem stalne sile, kojoj odgovara akceleracija $a$. Njeno je rješenje

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + y(0)$$

gdje je $y(0)$ položaj čestice koja se giba, a $v_0$ njena početna brzina.
Nešto složenija je diferencijalna jednadžba 2. reda

$$y'' = ky$$

gdje je $k$ konstanta. Matematički i fizikalno, bitno se razlikuju slučajevi $k < 0$ i $k > 0$. Za nas je zanimljiviji slučaj kad je $k < 0$, recimo $k = -\omega^2$. Tada jednadžbu obično pišemo u obliku

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{5}$$

Pokazuje se da je to jednadžba titranja na pravcu (jedno od najjednostavnijih i najvažnijih gibanja, kako organskih, tako i anorganskih čestica). Radi jednostavnosti predpostavimo sljedeće početne uvjete:

$$(i)\ y(0) = A\ ,\ (ii)\ y'(0) = 0$$

što znači da je čestica u početku bila u položaju $A$ na $y$-osi, i u tom trenutku imala brzinu jednaku nuli (tj. bila u mirovanju). Tada se dobije rješenje

$$y(t) = A\cos(\omega t),$$

što je jedna od najjednostavnijih periodnih funkcija. Iz rješenja vidimo da čestica titra izmedju položaja $A$ i $-A$ s vremenom jednog titraja $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Iako postoje i diferencijalne jednadžbe viših redova koje dolaze od prirodnih pojava (fenomena), većina ih je 1. ili 2. reda. To je u skladu s fizikalnom intuicijom, naime da imamo dobru predodžbu o količini, brzini promjene te količine u vremenu i o akceleraciji promjene (odnosno sili), a da imamo lošu intuiciju o promjenama višeg reda. Ujedno to je u skladu i s geometrijskom intuiticijom, naime da grafom funkcije možemo vjerno predočiti vrijednost neke veličine u vremenu, brzinu i karakter njene promjene (nagib, rast, pad), brzinu promjene brzine (konveksnost, konkavnost, odnosno ubrzani rast, usporeni rast, usporeni pad, ubrzani pad), a da grafički ne možemo zadovoljavajuće predočiti promjene višeg reda.

**Parcijalne diferencijalne jednadžbe.**

Kako smo već rekli, promjenu neke veličine u vremenu matematički možemo shvatiti kao gibanje točke (nul-dimenzionalnog objekta) po pravcu (jednodimenzionalnom objektu). Prirodno složenija situacija nastaje ako razmatramo gibanje jednodimenzionalnog objekta u dvodimenzionalnom. Naime, možemo gledati veličinu $u$ koja ovisi o položaju $x$ i vremenu $t$. Tipičan, ujedno dovoljno općenit primjer je titranje žice učvršćene na krajevima. Tu je žica jednodimenzionalna i njene točke u mirovanju opisane su veličinom $x$. Titranje se odvija u ravnini, na primjer tako da se žica nategne pa pusti. Zamišljamo idealne uvjete tako da točke žice titraju okomito na početni položaj. Tada $u(x,t)$ označava vertikalni otklon u vrijeme $t$ točke koja u mirovanju ima koordinatu $x$. Pokazuje se da, u idealnim uvjetima, $t, x, u$ zadovoljavaju **parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6}$$

gdje parametar $c$ ovisi o vrsti materijala od kojeg je napravljena žica. Uočite razlike i sličnosti s jednadžbom titranja točke, za čije su nam rješenje bile potrebne trigonometrijske funkcije (temeljne periodne funkcije). Problem jednodimenzionalnog titranja složeniji je fizikalno i matematički. Za njegovo egzaktno rješavanje potrebni su **Fourierovi redovi**, najvažniji klasični matematički aparat za opisivanje periodnih pojava. Grubo rečeno, rješenje će biti u obliku beskonačnog zbroja trigonometrijskih funkcija (dok je kod titranja točke to jedna trigonometrijska funkcija ili, možda, zbroj dviju).

Parcijalna diferencijalna jednadžba (6) opisuje i druge važne periodne pojave, a ne samo titranje žice. Zato se zove **(jednodimenzionalna) valna jednadžba** i tipičan je primjer **hiperboličke parcijalne diferencijalne**

**jednadžbe**. Na primjer, razmotrimo usku cjevčicu kojom puhanjem proizvodimo zvuk. Neka $x$ označava koordinatu uzduž čestice, a $u(x,t)$ otklon tlaka zraka (od ambijentnog) u vrijeme $t$, na položaju $x$ unutar cjevčice. Tada, u idealnim uvjetima, dolazimo do identične parcijalne diferencijalne jednadžbe (sad parametar $c$ ima značenje brzine zvuka ).
Naravno daljnje poopćenje je na dvodimenzionalnu valnu jednadžbu, gdje je $u$ funkcija prostornih koordinata $x, y$ i vremenske $t$, na trodimenzionalnu u kojoj se dodaje još jedna prostorna koordinata $z$,... .
I jednadžba elektromagnetskih valova, u idealnim uvjetima, je analogna jednadžbi (6); tu $c$ ima značenje brzine svjetlosti, a umjesto funkcije $u$ dolazi električno ili magnetsko polje.
Drugu klasu problema opisuje tzv. **toplinska jednadžba**. Njen jednodimenzionalni oblik je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Tu $u(x,t)$ označava temperaturu tanke žice u vrijeme $t$ na položaju $x$, a $c$ je konstanta koja je toplinska značajka žice. Iako se naizgled samo malo razlikuje od valne (na lijevoj strani je umjesto derivacije 2. reda derivacija 1. reda), ona spada u sasvim drugu klasu i tipičan je primjer **paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe**. Ipak, i za njeno egzaktno rješenje koristit ćemo Fourierove redove.

**Sustavi običnih diferencijalnih jednadžba. Dinamički sustavi.**
Parcijalne diferencijalne jednadžbe poopćenja su običnih. One prirodno nastaju pri razmatranju problema ovisnosti jedne veličine o više drugih (na primjer, ako $u$ ovisi o $t$ i $x$). Konačan cilj je pronalaženje formule za tu ovisnost (na primjer, formule za $u(x,t)$). Ako to nije moguće, zadovoljavamo se i numeričkim rješenjem (na primjer, postupkom kojim za svaku vrijednost $t, x$ možemo približno, ali s velikom točnošću, odrediti $u(x,t)$).
Druga važna klasa problema dolazi od razmatranja više medjusobno zavisnih veličina koje ovise o vremenu $t$. Na primjer, neka su $x, y$ dvije takve veličine. Tada u svakom trenutku $t$ načelno možemo odrediti vrijednosti $x(t), y(t)$ tih veličina. Takodjer, možemo procjenjivati brzine njihovih promjena. Tako dolazimo do drugog vrlo važno poopćenje običnih diferencijalnih jednadžba, do **sustava običnih diferencijalnih jednadžba**. Ograničimo se na slučaj kada te brzine ovise samo o vrijednostima veličina $x, y$, a ne o vremenu u

kojem to gledamo. Tada sustav ima oblik

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \tag{8}$$

gdje su $f, g$ dvije funkcije. Cilj nam je riješiti sustav, tj. dobiti formule za $x(t), y(t)$ za svaki $t$ i tako opisati život ovog **dinamičkog sustava**. To općenito nije moguće, pa se pribjegava drugim metodama. Na primjer, ako je poznato stanje dinamičkog sustavu u trenutku $t_0$ (tj. **početni uvjeti** $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$) zanima nas grafička ili numerička metoda kojom ćemo približno odrediti $x(t), y(t)$ za svaki $t$. Zato su nam neophodne suvremene kompjutorske tehnike.

Da pobliže dočaramo dinamičke sustave, neka $x$ označava količinu (broj) grabežljivaca, a $y$ količinu (broj) plijena. U zatvorenom sustavu, bez drugih utjecaja, razumno je predpostaviti da brzina promjene (rasta ili odumiranja) od $x$ ovisi o količini $x$ i količini $y$, a ne o vremenu $t$ u kojemu se to odvija (slično je za brzinu promjene veličine $y$). Na primjer, brzina promjene ne ovisi o tomu je li to bilo 1900. ili 2000. godine (tj. smatramo da nije došlo do evolucijskih ili nekih drugih vremenskih promjena). Tipičan sustav koji opisuje ovakve probleme je Lotka-Volterrin sustav o kojemu će više riječi biti poslije.

Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu ima **putanja** (**orbita, trajektorija**) točke $(x_0, y_0)$, sa svojstvom da postoji vrijeme $t_0$ tako da bude $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$ (tj. putanja koja prolazi kroz zadani početni uvjet). Prema definiciji, to je skup svih $(x(t), y(t))$, gdje $t$ prolazi svim vremenima (svim realnim brojevima). To je, dakle, skup svih stanja (život) tog dinamičkog sustava koji sadrže stanje $(x_0, y_0)$. Proučavanje dinamičkih sustava vodi do novih matematičkih pojmova, poput **fraktala** i **kaosa**.