

Lorenzov sustav - Kaos

1 Uvod

Gledano matematički, Lorenzov sustav je sustav triju običnih diferencijalnih jednadžba oblika

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x + \sigma y \\ dy/dt &= rx - y - xz \\ dz/dt &= -bz + xy \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su x, y, z realne varijable ovisne o vremenskoj varijabli t , dok su σ, r i b pozitivni realni parametri (za svaki izbor parametara dobije se novi sustav). To je trodimenzijski autonomni nelinearni dinamički sustav (autonoman jer se na desnim stranama ne pojavljuje t , nelinearan jer su drugi i treći izraz s desne strane nelinearni, točnije, oni su kvadratni jer se pojavljuju izrazi xz odnosno xy koji su drugog reda - kad njih ne bi bilo sustav bi bio linearan). Do ovog oblika prvi je došao Lorenz 1963. u pokušaju matematičkog modeliranja predviđanja vremena. S inženjerskog (fizičkog) stanovišta sustav je važan u dinamici fluida, meteorologiji, kod kemijskih reakcija itd.

Sustav je rezultat mnogih idealizacija, pojednostavljenja i redukcija. U glavnim crtama, razmatra se sloj fluida (atmosfera) kojemu se donja strana održava stalno toplija od gornje uz stalnu razliku temperatura i stalnu visinu sloja. Nadalje, razmatra se samo vertikalno i horizontalno gibanje (nastalo zbog razlike temperatura na rubovima). Uz ove pretpostavke i ako se zanemare sve varijable osim triju (koje imaju najveći utjecaj), nakon određenog skaliranja dobije se (1).

U tako nastalom sustavu sve su varijable bezdimenzijske (uključujući t koja je bezdimenzijsko vrijeme). Ipak, one su zadržale određena fizikalna značenja. Intuitivno, x odgovara (proporcionalan je) intenzitetu (amplitudi) konvekcijskog gibanja dok y odgovara razlici temperatura uzlaznih i silaznih struja. Isti predznaci kod x i y naznačuju da se topli fluid diže, a hladni spušta. Nadalje, z odgovara distorziji (iskrivljenju) temperature na vertikalnom presjeku od linearnosti (idealno, nakon nekog vremena, temperatura na vertikalnom presjeku linearno bi se povećavala od hladnog prema toplom

rubu, ali zbog strujanja nije tako). Takodjer i parametri su bezdimenzijski: σ je Prandtlov broj (omjer viskoznosti i termalne vodljivosti fluida), b se odnosi na geometrijska svojstva sloja, dok je r proporcionalan stalnoj razlici temperatura između toplije i hladnije strane (odnosno Rayleighovu broju).

Treba naglasiti da x, y, z nisu prostorne koordinate (zato se umjesto njih često koriste oznake X, Y, Z , kako originalno i jest kod Lorenza koji ujedno ima i oznake parametara kao u (1)). U meteorologiji, kako je izvorno sustav i nastao, uobičajene su vrijednosti $\sigma = 10$ i $b = 8/3$ (makar one mogu biti i drukčije), dok je r promjenjiv, što je razumljivo jer isti sloj može imati razne razlike temperatura na rubovima. Intuitivno je jasno da za male vrijednosti od r (dakle, za male razlike u temperaturama donjeg i gornjeg dijela sloja), strujanje će se brzo umiriti, dok će povećavanjem parametra r dolaziti do sve nepredvidljivijih promjena strujanja. S tom se intuicijom dobro slažu i rješenja ovog sustava.

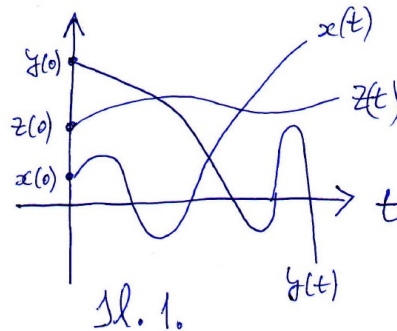
2 Trajektorije i fiksne (ravnotežne) točke.

Lorenzov sustav (1) može se gledati s čisto matematičkog gledišta. Na primjer, biranjem parametara σ, b, r dobije se konkretan sustav diferencijalnih jednačija. Egzaktno rješavanje takvog sustava u pravilu nije izgledno pa se pribjegava numeričkom rješavanju. Za to je potrebno specificirati početne uvjete, tj. vrijednosti $x(0), y(0), z(0)$ varijabla x, y, z . Koristeći se prikladnim paketom (na primjer u Matlabu), dobiju se vrijednosti $x(t), y(t), z(t)$ za t iz nekog intervala koji počinje s $t = 0$ a završava u specificiranoj vrijednosti, (u kompjutorskoj stvarnosti dobije se konačan skup tih vrijednosti za bliske susjedne vrijednosti varijable t).

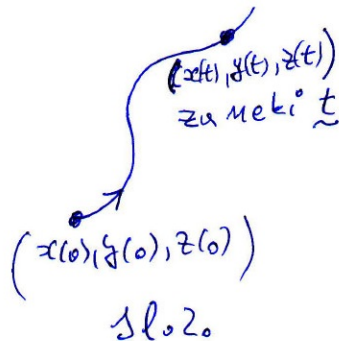
Za konkretan fizikalni problem (recimo u meteorologiji) dobro je zamišljati neki vertikalni presjek sloja atmosfere. Njegova struktura u svakom je trenutku dobro opisana vrijednostima varijabla x, y, z . Kako uređena trojka $(x(0), y(0), z(0))$ nosi informaciju o stanju presjeka sloja za $t = 0$, tako se iz trojke $(x(t), y(t), z(t))$ rekonstruira (procjenjuje) stanje u tom presjeku u trenutku t . Treba imati na umu da su to tek rješenja matematičkog problema koji mogu više ili manje dobro opisivati pravo stanje. Poslije ćemo vidjeti da ovdje problemi nastaju već kod matematičkog problema - pojava kaosa.

Sve se može i grafički predočiti. Tu ima više mogućnosti, primjerice, može se svaka od varijabla x, y, z predočiti u zavisnosti o t . Na slici 1. predočen je mogući primjer grafova za $x(t), y(t), z(t)$ u istom koordinatnom sustavu, uz konkretan izbor početnih vrijednosti $x(0), y(0), z(0)$. Tu je vre-

menska os horizontalna dok se na vertikalnoj osi predočavaju vrijednosti svih triju varijabla x, y, z (tri grafa). Iz grafova se za svaki t iz specificiranog intervala mogu (približno) očitati pripadne vrijednosti veličina x, y, z .



Druga je mogućnost da se za t iz specificiranog intervala u $x - y - z$ koordinatnom sustavu predoče točke $(x(t), y(t), z(t))$. Tako se dobije **trajektorija** - krivulja u prostoru koja počinje u točki $(x(0), y(0), z(0))$. Trajektorija zorno predočava razvoj sustava u tom vremenskom intervalu (sl. 2). Time se dobilo na kvalitativnom razumijevanju procesa. Naime, ovim se pristupom u istom koordinatnom sustavu mogu predočiti trajektorije za različite karakteristične početne uvjete (**fazni portret**), čime se naslućuje globalna slika. S druge strane, ovaj je pristup inferioran prema onom prvom u tome što je iz njega isključeno vrijeme (vidi se što se događa, ali se ne vidi u kom se trenutku to događa).



Za razumijevanje procesa opisanog dinamičkim sustavom važne su **fikсне (ravnotežne) točke**, odnosno vrijednosti veličina x, y, z pri kojima je brzina promjene svake od njih jednaka nuli (intuitivno, kad bi sustav postavili da veličine imaju te vrijednosti, onda bi one uvijek imali te vrijednosti -

sustav bi bio u ravnoteži). Matematički gledano, treba naći rješenja sustava

$$-\sigma x + \sigma y = 0; \quad rx - y - xz = 0; \quad -bz + xy = 0 \quad (2)$$

Iz prve se jednadžbe dobije $y = x$, pa kad se to uvrsti u drugu i treću dobije se $x(r - 1 - z) = 0$ i $x^2 = bz$, odakle se lako dobije da su mogućnosti

$$(0, 0, 0), \quad R_1, R_2 = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1). \quad (3)$$

Odmah se vidi da za $r < 1$ postoji samo jedna fiksna točka, $(0, 0, 0)$, jer se u izrazima za R_1, R_2 pojavljuje negativan broj ispod drugog korijena. S druge strane, ako je $r > 1$ postoje tri fiksne točke, $(0, 0, 0), R_1$ i R_2 (za $r = 1$ točke R_1, R_2 spajaju se s $(0, 0, 0)$). Uočite da koordinate točaka R_1, R_2 ovise o parametrima r i b , ali ne ovise o parametru σ .

3 Ovisnost Lorenzova sustava o r za $\sigma = 10$ i $b = 8/3$

U ovom odjeljku поближе ćemo opisati specijalni slučaj kad je $\sigma = 10$ i $b = 8/3$ (a r se mijenja), koji je uobičajen pri primjeni Lorenzova sustava u meteorologiji (a u okviru kojega i jesu nastale Lorenzove jednadžbe). U glavnim ćemo crtama opisati i predočiti crtežima kako se načelno ponašaju trajektorije s obzirom na fiksne točke. Sve se može reći preciznije i strogo matematički dokazati, ali i potvrditi kompjutorskom simulacijom. Dio problematike opisan je u lekciji **Stabilnost i Grobman-Hartmanov teorem** koju treba pogledati i radi opisa karaktera fiksnih točaka. U ovom sustavu, kad se r mijenja, fiksne točke ne mogu biti središta (da trajektorije kruže oko njih). Pojavljuju se asimptotski stabilne fiksne točke (privlačne fiksne točke, ponori, atraktori), kako čvorovi tako i fokusi (kad trajektorije spiralno idu prema njima). Od onih koje nisu privlačne pojavljuju se samo sedla (fiksna točka u pravilu odbija trajektorije od sebe, a iznimno ih privlači).

Podsjetimo da je svojstvo karaktera fiksne točke **lokalno**. To znači da to svojstvo ne vrijedi za sve trajektorije (osim iznimno) već samo za one koji počinju blizu fiksne točke (ili joj dodju blizu). Na primjer, ako su dvije fiksne točke privlačne, onda jedna od njih privlači sve trajektorije koje joj dodju blizu, a druga one koje njoj dodju blizu (a postoje trajektorije koje ne idu niti prema jednoj od tih fiksnih točaka).

Pokazuje se da u ovom slučaju, kad je $\sigma = 10$ i $b = 8/3$, a r se mijenja, vrijedi sljedeće (vidjeti i (sl. 9.)):

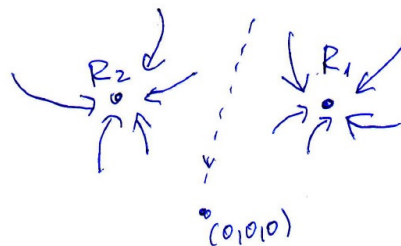
(1) Ako je $r < 1$, kada je $(0, 0, 0)$ jedina fiksna točka Lorenzove sustava (1), onda je $(0, 0, 0)$ **globalna** privlačna točka (i to čvor, što znači da se **svaka**

trajektorija (koja počinje izvan $(0, 0, 0)$) približava prema $((0, 0, 0))$.

S druge strane ako je $r > 1$ onda je fiksna točka $(0, 0, 0)$ nestabilna i to sedlo; trajektorije koje počinju izvan te točke u pravilu se ne vraćaju prema njoj, a samo iznimno idu prema njoj.

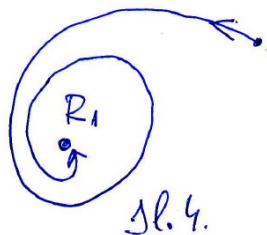
Najvažnije promjene za $r > 1$ nastaju s novim fiksnim točkama R_1, R_2 . Tu imaju tri bitno različita slučaja ovisno o dvjema kritičnim vrijednostima od r . To su $r_1 = 1.3456$ (odprilike) i $r_2 = 24.737$ (odprilike). Preciznije:

(2) Ako je $1 < r < r_1 \approx 1.3456$, onda su točke R_1, R_2 asimptotski stabilne (i to čvorovi). One privlače trajektorije koji počinju blizu njih. Općenito, trajektorije (bilo koje, a ne samo one koje počinju blizu R_1, R_2) u pravilu poniru prema tim točkama, a iznimno mogu ići prema $(0, 0, 0)$ (sl. 3).



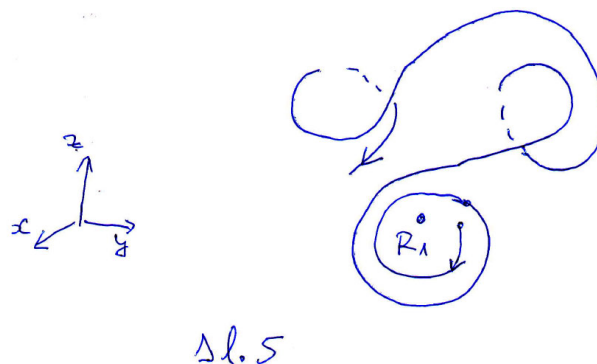
Sl. 3.

(3) Ako je $1.3456 \approx r_1 < r < r_2 \approx 24.737$, onda su R_1, R_2 i dalje asimptotski stabilne, ali više nisu čvorovi već se trajektorije u pravilu spiralno približavaju prema njima (sl. 4). Ipak situacija može biti puno složenija nego na ovoj slici (o čemu će nešto više riječi biti poslije).



Sl. 4.

(4) Ako je $r > r_2 \approx 24.737$, onda su R_1, R_2 nestabilne, sedla; trajektorije koje počinju blizu R_1, R_2 u pravilu spiralno 'bježe' od njih, ali ne mogu pobjeći previše daleko (sl. 5). Treba napomenuti da je ovaj crtež vrlo pojednostavljena slika stvarnosti, jer su zbog pojave kaosa trajektorije u pravilu puno složenije (to se može dočarati tek kompjutorskom simulacijom).



Vidi se da se situacija posložnjava kako r raste, što je i logično jer veći r znači veću razliku temperatura donjeg i gornjeg dijela sloja, što uzrokuje sve nepredvidljivija strujanja. Još jednom ponavljamo da je u sva tri slučaja (2), (3) i (4) i ishodište $(0, 0, 0)$ također fiksna točka (koja je nestabilna, sedlo).

Važno svojstvo Lorenzova sustava. Može se dokazati da su rješenja Lorenzova sustava omeđena (za svaki izbor parametara, a ne samo za one iz ovog odjeljka). To znači da postoji područje u prostoru (koje sadrži fiksne točke, a može se izabrati da bude konkretan elipsoid) tako da trajektorije koje u njemu počinju i ostaju u njemu za sve t , a one koje počinju izvan njega moraju jednom ući u njega (a onda tamo i ostaju). Neke od tih trajektorija odlaze prema fiksnim točkama, a u pravilu mnoge ne idu, ali ostaju u njihovoj blizini.

4 Slučaj $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ - Kaos

U ovom odjeljku navest ćemo neke činjenice koje su karakteristične za Lorenzov sustav za $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$. Za te je parametre Lorenz prvi put uočio kaos i **čudni atraktor** (zato se oni često nazivaju klasičnim parametrima). Kaos i čudni atraktor (strange atraktor) pojavljuju se i za neke druge vrijednosti parametra r , o čemu će biti riječi poslije, ali je ovaj primjer najpoznatiji. Napišimo sustav (1) s ovim posebnim vrijednostima parametara:

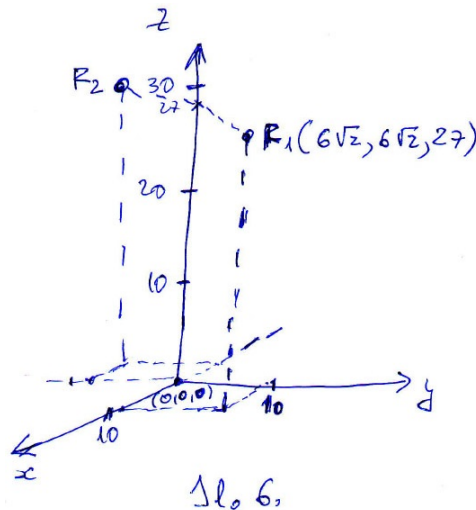
$$\begin{aligned} dx/dt &= -10x + 10y \\ dy/dt &= 28x - y - xy \\ dz/dt &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned} \tag{4}$$

Taj je sustav konkretan pa se može numerički rješavati uz uvjet da su poznate početne vrijednosti varijabla x, y, z (tj. ako je poznata početna točka $(x(0), y(0), z(0))$). Uz specificirane početne uvjete sustav ima jedinstveno rješenje, koje se geometrijski može predočiti trajektorijom koja počinje u točki $(x(0), y(0), z(0))$, a sastoji se od točaka $(x(t), y(t), z(t))$, za $t \geq 0$ (to je krivulja, koja se u pravilu ne može prikazati za sve t , već samo do neke specificirane vrijednosti).

Ponovimo, u ovom posebnom slučaju, važna svojstva fiksnih točaka i trajektorija. Ako u (3) stavimo $b = \frac{8}{3}$ i $r = 28$, dobiju se tri fiksne točke sustava (4)

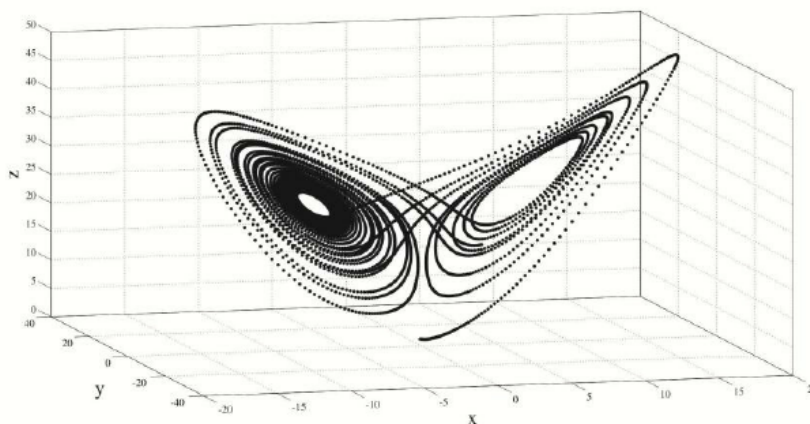
$$(0, 0, 0), R_1, R_2 = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27), \quad (5)$$

kao na (sl. 6.). Sve su te tri fiksne točke sedla (jer je $r = 28 > r_2 \approx 24.737$), tj. trajektorije koje počinju blizu tih točaka odbijaju se od njih, a samo iznimno idu prema njima. Preciznije, može se strogo matematički pokazati da skup svih točaka prostora takvih da trajektorije koje u njima počinju konvergiraju prema $(0, 0, 0)$, ima dimenziju 2 (ta je ploha vrlo komplicirana i teško zamisliva). Za preostale dvije fiksne točke vrijedi nešto slično: za svaku od njih skup takvih točaka ima dimenziju 1. Kako je dimenzija prostora 3, opravdano je onda reći da trajektorije u pravilu bježe od fiksnih točaka, a samo da se iznimno njima približavaju.



Dakle, slučajnim biranjem početne točke, u pravilu će se dobiti trajektorija koja se odbija od fiksnih točaka. Međutim, ta trajektorija ne odlazi u

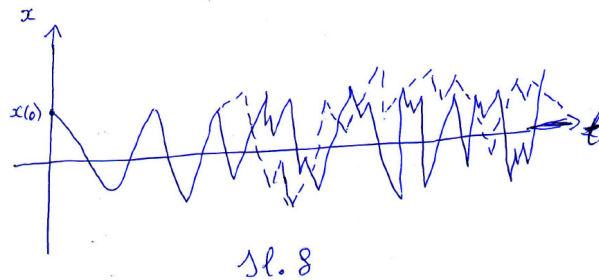
beskonačnost niti je periodna (kao što smo vidjeli kod dvodimenzijjskih sustava). Ona se ne ponaša niti prema nekom drugom obrascu ili jasnom pravilu, primjerice, ne približava se nekoj zatvorenoj krivulji (ovo se sve može preciznije reći, ali to nećemo raditi; mnoge se stvari mogu naslutiti kompjutorskim istraživanjem). Ako se prati putanja rješenja (točke $(x(t), y(t), z(t))$ za $t \geq 0$) pri nekoj animaciji, uočava se da se nakon možebitnog početnog regularnog gibanja, ona odjednom počne slučajno zakretati na sve strane, praveći spirale, katkada se približavajući nekoj od fiksnih točaka obilazeći je pa se onda udaljavati. Pritom se nikada ne vrati u neki prijašnji položaj, a njen trag kao da ispunjava ograničeni prostor tako da se doima kao da su to krila leptira. Kako vrijeme ide dalje, to se kaotično gibanje ne umiruje, ali ostaje u okviru te stvorene slike (sl. 7.). Taj fenomen u osnovi je matematičkog pojma kaosa (koji tu nećemo precizno definirati, a i nema jedinstvene matematičke definicije tog pojma). Lorenz je izvorno došao do slike startajući s početnom točkom $(0, 1, 0)$, ali sličan fenomen bi bio i s drugim početnim vrijednostima.



Sl. 7

Kad bi se gornja trajektorija usporedila s nekom drugom kojoj je početna točka malko drukčija (na primjer, da su im dvije koordinate jednake, a treće neznatno razlikuju, recimo tek u trećoj decimali), putanje bi se jedno vrijeme gotovo poklapale, ali bi se odjednom (za relativno male vrijednosti t) točke razdvojile i nastavile ići kao da nemaju nikakve veze jedna s drugom. Taj se fenomen zove **osjetljivost na početne uvjete**, a Lorenza je potakao da posumlja u postojanje prikladnog matematičkog modela za

ponašanje vremena na dulji rok. Štoviše, kad bi se početne točke poklapale, ali zaokruživanje pri numeričkom računanju neznatno razlikovalo, na velik ali različit broj decimalnih mjesta, efekt bi bio sličan. Drugim riječima, stvarna matematička trajektorija (koja je jedinstvena) bitno se razlikuje od one kompjutorske (odnosno od onih kompjutorskih). Fenomen utjecaja razlikom pri zaokruživanju ilustriran je (sl. 8.), na kojoj je predložen samo graf od x u ovisnosti o t (to su dva grafa koji se u početku poklapaju, a onda naglo razilaze - jedan je puna, a drugi isprekidana crta).

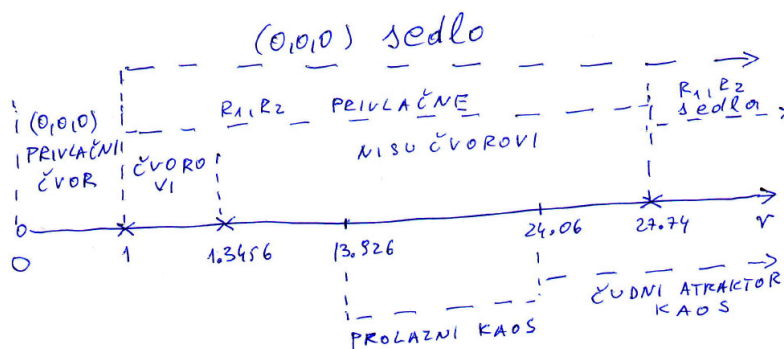


To što su dvije trajektorije poput ovih gore opisanih s jedne strane bitno različite (a ta njihova razlika ne može se kontrolirati), a s druge strane njihov trag ocrtava sličnu sliku (krila leptira) objašnjava se time što se (u pravilu) svaka trajektorija približava skupu u prostoru s fraktalnom strukturom (fraktalu) kojemu je obujam (volumen) jednak nuli, površina beskonačna i fraktalna dimenzija oko 2.05 (što znači da je malo složeniji od plohe u prostoru). Taj se skup zove **Lorenzov atraktor** i primjer je čudnog atraktora. Ako trajektorija počinje u Lorenzovu atraktoru, onda i ostaje u njemu za svaki t . Ako je, pak, početna točka izvan atraktora, onda ni jedna njena točka nije u atraktoru (ona se samo približava atraktoru neprekidno ga obilazeći). Lorenzov atraktor naslućen je 1963. na osnovi približnog računanja, a kako smo vidjeli, u ovakvim okolnostima nismo sigurni koliko možemo vjerovati kompjutorskoj simulaciji. Do matematičkog dokaza da Lorenzov atraktor zaista postoji došlo je tek 1999. godine

4.1 Kaos za neke druge vrijednosti parametra r

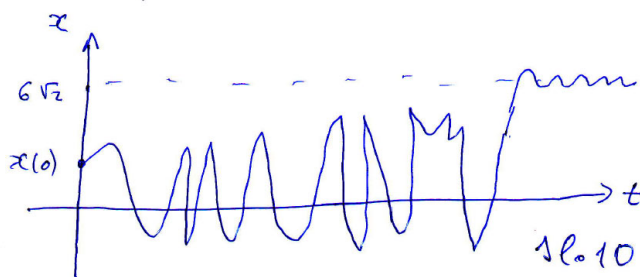
Kako smo već vidjeli, za karakter fiksnih točaka Lorenzova sustava, u slučaju kad je $\sigma = 10$ i $b = 8/3$, a r se mijenja, bitne su tri kritične vrijednosti od r . To su $r = 1$ (koji je kritična vrijednost za sve σ i b), $r = r_1 \approx 1.3456$ i $r = r_2 \approx 24.737$. Međutim, za karakter trajektorija naročito su bitne druge

dvije kritične vrijednosti od r koje su između r_1 i r_2 . To su $r \approx 13.926$ i $r \approx 24.06$ (sl. 9.).



sl. 9

Neposredno iza 13.926 javlja se **prolazni kaos** (transient chaos). Podsjetimo da je u ovim uvjetima $(0, 0, 0)$ sedlo (i tek za skup početnih točaka dimenzije 2, trajektorije idu prema ovoj fiksnoj točki). Nadalje, R_1, R_2 su (ravnopravne) privlačne točke. Prolazni kaos sastoji se u tome što se pojavljuju trajektorije kod kojih se izmjenjuje regularno gibanje s kaotičnim dok se, ipak, trajektorija ne uputi prema jednoj od točaka R_1, R_2 . Ovaj fenomen ilustriran je (sl. 10.), na kojoj je predložen samo graf od x u ovisnosti o t . Prolazni kaos znade biti tako uvjerljiv da izgleda poput onoga iz Lorenzova primjera za $r = 28$. Ipak, to nije pravi kaos niti ima čudnog atraktora.



Neposredno nakon 24.06 pojavljuje se kaos i čudni atraktor. To znači da postoje trajektorije koje se kaotično približavaju fraktalnom skupu poput onog iz primjera kad je $r = 28$. Za razliku od prijašnjih slučajeva, ovdje

postoje tri atraktora (skupova koji privlače trajektorije iz svoje blizine - taj se pojam može strogo definirati). To su privlačne fiksne točke R_1 i R_2 koje privlače trajektorije koje počinju u njihovoj blizini (ili im dodju blizu), i fraktal, čudni atraktor. Fiksna točka $(0,0,0)$ nije atraktor iako privlači mnoge trajektorije (i pripada čudnom atraktoru). Naime, ona ne privlači **sve** trajektorije iz svoje blizine. Za to je najbolje zamisliti kugle sa središtem u $(0,0,0)$ i malim polumjerima; to su okoline ishodišta. Bez obzira kako polumjer neke od tih kugala bio mali, ishodište će samo iznimno privlačiti trajektorije koje počinju u toj kugli, a u pravilu ih neće privlačiti.

I za $r > r_2 \approx 24.737$ ima više kritičnih vrijednosti od r , koje određuju područja u kojima je ponašanje trajektorija drukčije nego za $r = 28$ (na primjer oko $r = 100$ pojavljuju se periodne trajektorije), ali o tome ovdje nećemo pobliže govoriti.