LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Izvedbeni program iz Matematike 1.
(za sve studije)

Lekcije.

1. Realni i kompleksni brojevi.

2. Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor.

3. Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora.

4. Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta.

5. Skalarni, vektorski i mješoviti umnožak vektora.

6. Linearni sustav i njegovo rješavanje.

7. Pojam i geometrijsko i fizikalno značenje svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora.

8. Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije.

9. Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama.

10. Pojam niza, limesa niza, reda i limesa funkcije.

11. Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje.

12. Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija.

13. Linearna aproksimacija, kvadratna aproksimacija i Taylorov red.

14. Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje.

15. Ispitivanje toka funkcija pomoću derivacija.

Lekcije iz Matematike 1.

1. Realni i kompleksni brojevi

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se ponavljaju osnovna svojstva brojeva, pojmovi vezani uz brojeve i operacije s brojevima. Obrađuje se trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Brojevima se rješavaju dva temeljna praktična problema:
brojenje, prebrojavanje - pomoću prirodnih brojeva.
mjerenje - pomoću realnih brojeva.
Iako kompleksni brojevi imaju i fizikalnu i geometrijsku primjenu, oni su prvenstveno uvedeni iz teoretskih razloga - da bi svaka algebarska jednadžba imala rješenje.

III. Potrebno predznanje

Poznavanje osnovnih skupova brojeva i operacija s njima:

Skup prirodnih brojeva N. Primjeri: $1, 2, 3, ..., 25, ...$

Skup cijelih brojeva Z. Primjeri: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...$
Svaki je prirodni broj ujedno i cio, međutim, ima cijelih brojeva koji nisu prirodni - to su negativni cijeli brojevi i broj 0.

Skup racionalnih brojeva Q. Primjeri: $\frac{1}{2}, \frac{2}{25} - \frac{2}{3}, \frac{17}{12}, ...$ Općenito, broj je racionalan ako se može predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom. Svaki je cijeli broj (dakle i prirodni) ujedno i racionalan, međutim ima racionalnih brojeva koji nisu cijeli. Na primjer, $\frac{1}{2}$ je racionalan, ali nije cio broj.

Skup realnih brojeva R - skup kojeg čine racionalni i **iracionalni** brojevi. Primjeri:

$$1, 0, -7, \frac{2}{5}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt[5]{6}, ...$$

Svaki je racionalni broj (dakle i cijeli, prirodni) ujedno i realan, međutim ima realnih brojeva koji nisu racionalni. Na primjer, $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[5]{6}$ nisu racionalni već iracionalni (ne mogu se predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom).
Intuitivno, pozitivni realni brojevi jesu brojevi kojima se može izmjeriti svaka

dužina.

Decimalni zapis realna broja. Primjeri: 3.14, 3.16, 1.732, $-2.1313...,...$ (prva tri su konačni, a četvrti je beskonačan).
Svaki konačan decimalni zapis može se shvatiti i kao beskonačan. Na primjer,

$$0.5 = 0.5000..., \; 0.08 = 0.08000...$$

međutim, ima brojeva koji nemaju konačan decimalni zapis, primjerice broj sa zapisom $-2.1313....$
Racionalni brojevi imaju konačan ili beskonačan **periodan** decimalni zapis. Na primjer:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \; \frac{2}{25} = 0.08, \; -\frac{2}{3} = -0.666..., \frac{17}{12} = 1.41666..., -\frac{211}{99} = -2.1313...$$

Iracionalni brojevi imaju beskonačan **neperiodan** zapis.
Na primjer, zapis 1.010010001... (broj nula u zapisu između dviju jedinica povećava se za 1) je neperiodan pa je to zapis iracionalna broja.
Često se umjesto **decimalni zapis** govori **decimalni broj**. Ako se to prihvati, onda je skup realnih brojeva upravo skup decimalnih brojeva.

Znanstveni zapis (notacija) realna broja - to je zapis pomoću potencije broja 10 (naročito pogodan za vrlo velike i vrlo male brojeve).

Primjer 1. $375.26 = 3.7526 \cdot 10^2$ (desno je znanstveni, a lijevo običan decimalni). Slično:
$37.526 = 3.7526 \cdot 10^1$
$3.7526 = 3.7526 \cdot 10^0$
$0.37526 = 3.7526 \cdot 10^{-1}$
$0.0000375.26 = 3.7526 \cdot 10^{-5}$
$3752.6 = 3.7526 \cdot 10^3$

U decimalnom zapisu nekog broja prva znamenka različita od nule zove se i **prva značajna znamenka**. Treba uočiti njeno značenje pri određivanju znanstvenog zapisa.

Skup kompleksnih brojeva C. Primjeri:

$$2 + 3i, 2 - 3i, \sqrt{2}i, i, ...$$

i je **imaginarna jedinica** i ima svojstvo

$$i^2 = -1$$

(zato ona nije realan broj, naime kvadrat realnog broje ne može biti negativan).
Svaki se kompleksni broj može zapisati kao $a + bi$ (taj se zapis često naziva **algebarskim zapisom**). Tu je a **realni dio**, a b **imaginarni dio**. Algebarski zapis kompleksna broja je jedinstven. Ta se vrlo važna činjenica kraće može zapisati kao:

Ako je $a + bi = c + di$ onda je $a = c$ i $b = d$

Broj oblika bi je **čisto imaginaran**, primjerice, $3i, \sqrt{2}i, ...,$
brojevi $a + bi$ i $a - bi$ međusobno su **kompleksno konjugirani**. Na primjer, brojevi $2 + 3i$ i $2 - 3i$ su kompleksno konjugirani, također i brojevi $2i$ i $-2i$. Kompleksno konjugirani broj broja z označavamo s crticom iznad z, dakle $\bar{z}$.
Svaki je realni broj (dakle i racionalni, cijeli, prirodni) ujedno i kompleksan (imaginarni dio mu je 0), međutim ima kompleksnih brojeva koji nisu realni (to su upravo oni kojima je imaginarnio dio različit od 0).

Algebarske operacije s brojevima. Poznato je da se realni brojevi mogu zbrajati i množiti (i da operacije zbrajanja i množenja imaju određena svojstva). Pritom su zbroj i umnožak racionalnih brojeva opet racionalni brojevi (slično je za cijele i prirodne). Oduzimanje možemo shvatiti kao zbrajanje sa **suprotnim brojem**:

$$a - b = a + (-b)$$

a dijeljenje kao množenje s **recipročnim brojem**:

$$a : b = a\frac{1}{b}$$

S nulom se ne može dijeliti! Drugim riječima, nula ne može biti nazivnik nekog razlomka.

Kompleksni se brojevi zbrajaju (i oduzimaju) prema pravilu: *realan s realnim, imaginaran s imaginarnim.* Dakle:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Na primjer: $(2 + 3i) + (4 - 5i) = 6 - 2i; \quad (2 + 3i) - (4 - 5i) = -2 + 8i.$

Kompleksni se brojevi množe prema pravilu *svaki sa svakim*, pritom se koristi činjenica da je $i^2 = -1$. Dobije se:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Na primjer $(2 + 3i)(4 - 5i) = 23 + 2i.$

Množenje realnog i kompleksnog broja je jednostavnije:

$$\lambda(a + bi) = (\lambda a) + (\lambda b)i$$

Na primjer, $5(2 + 3i) = 10 + 15i.$

Dijeljenje se svodi na množenje proširivanjem s konjugiranim nazivnikom. Na primjer:

$$(2 + 3i) : (4 - 5i) = \frac{2 + 3i}{4 - 5i} = \frac{2 + 3i}{4 - 5i} \cdot \frac{4 + 5i}{4 + 5i} = \frac{-7 + 22i}{41} = \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i$$

Pri množenju nazivnika primijenili smo formulu za razliku kvadrata:

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 4^2 - (5i)^2 = 16 - (-25) = 41$$

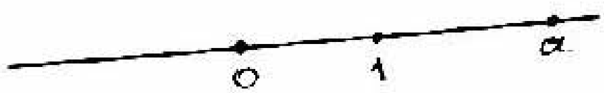
Općenito vrijedi (množenje kompleksno-konjugiranih brojeva):

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

(rezultat je uvijek pozitivan, osim ako je $a = b = 0$).

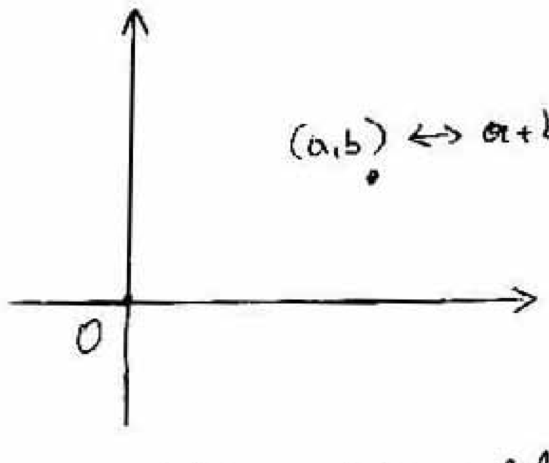
Geometrijsko predočavanje brojeva

Realni se brojevi geometrijski predočavaju **brojevnim (koordinatnim) pravcem** - pravcem na kojemu su istaknute dvije točke: jedna odgovara broju 0, to je **ishodište koordinatnog sustava**, a druga broju 1 (time je određena **jedinična duljina** - udaljenost od broja 0 do broja 1 na pravcu. Pri ovo predočavanju svakoj točki pravca odgovara točno jedan realan broj (**koordinata točke**) i svakom realnom broju točno jedna točka pravca (Slika 1).



Sl. 1 Koordinatni pravac

Kompleksni se brojevi geometrijski predočavaju koordinatnom ravninom (**kompleksnom ravninom**) tako da se kompleksni broj $a + bi$ poistovijeti s **uređenim parom** realnih brojeva (a, b), a taj uređeni par s točkom koordinatne ravnine (Slika 2). Pritom su realni brojevi predočeni pravcem (kao i prije), čisto imaginarni pravcem okomitim na taj pravac, a broj 0 je u ishodištu koordinatnog sustava (u presjeku tih dvaju pravaca).

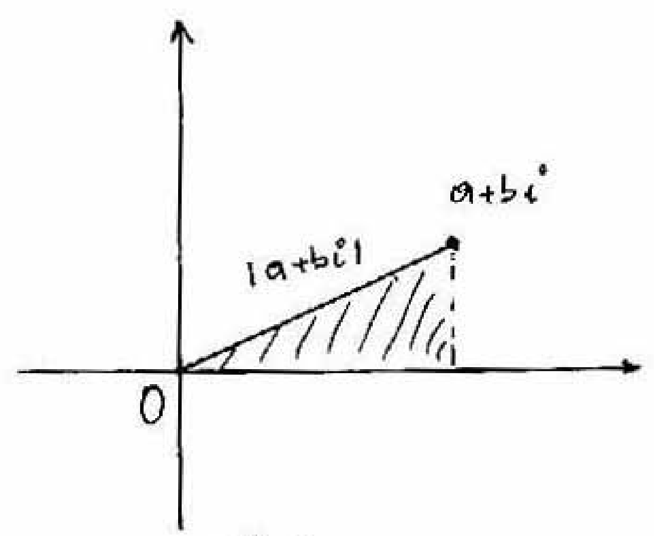


Sl. 2 Kompleksna ravnina

Apsolutna vrijednost broja

Apsolutna vrijednost $|a|$ realnog broja a je udaljenost tog broja od nule na brojevnom pravcu. Na primjer $|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$. Općenito je $|a| = |-a|$ tj. uvijek po dva broja, broj i njemu suprotni broj imaju istu apsolutnu vrijednost (izuzetak je 0, ali to, na neki način vrijedi i za nju jer je nula sama sebi suprotna).
Slično je za kompleksne brojeve: apsolutna vrijednost $|a+bi|$ kompleksnog broja $a+bi$ je njegova udaljenost od ishodišta u kompleksnoj ravnini. Vidimo (Slika 3) da je (iz Pitagorina poučka):

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$



sl.3

Na primjer: $|3+4i| = 5$, $|2+3i| = \sqrt{13}$, $|3i| = 3$.
Vidimo da vrijedi $|a+bi| = \sqrt{(a+bi)(a-bi)}$, kraće

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Kao poseban slučaj formule za apsolutnu vrijednost kompleksna broja dobije se formula za apsolutnu vrijednost realna broja:

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Naime, $|a| = |a+0\cdot i| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$

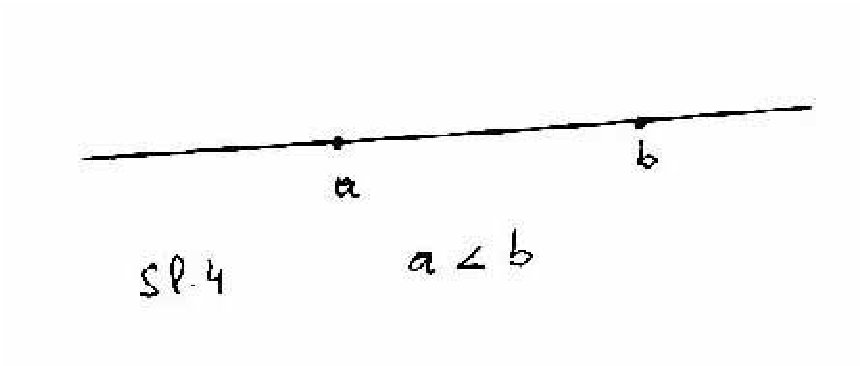
Uspoređivanje brojeva
Operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s kompleksnim brojevima imaju ista svojstva kao i operacije s realnim (odnosno racionalnim) brojevima. Jedna od važnih razlika je u tome što se realni brojevi mogu uspoređivati:

za svaka dva realna broja a, b vrijedi

$$a = b \text{ ili } a < b \text{ ili } a > b$$

dok to za kompleksne brojeve ne vrijedi (oni se mogu uspoređivati samo po apsolutnim vrijednostima). Vidimo da vrijedi (Slika 4):

$$a < b \text{ ako je } a \text{ lijevo od } b \text{ na brojevnom pravcu}$$

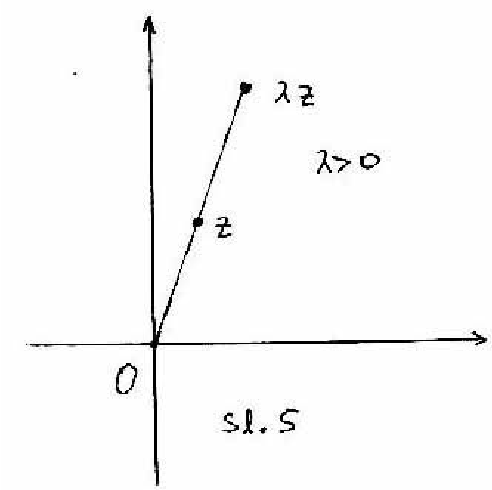


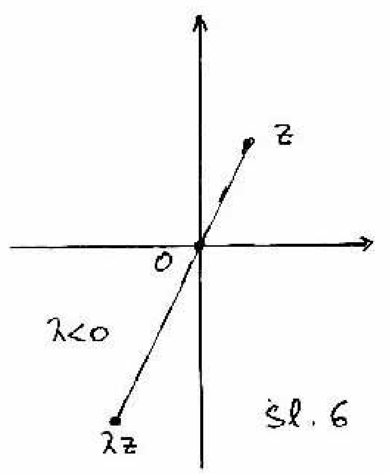
Također

$$a < b \text{ ako je } b - a > 0$$

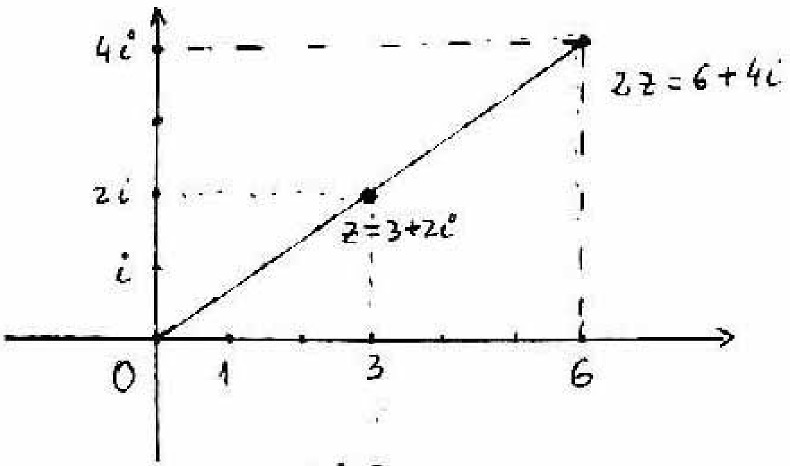
Geometrijsko predočavanje umnoška realnog i kompleksnog broja

Kompleksan broj $z \neq 0$ i njegov umnožak λz s realnim brojem $\lambda \neq 0$ čine posebnu geometrijsku konfiguraciju:
Brojevi z i λz su na pravcu koji prolazi ishodištem; pritom su oni s iste strane ishodišta ako je $\lambda > 0$, a s različitih strana ako je $\lambda < 0$ (Slike 5 i 6).



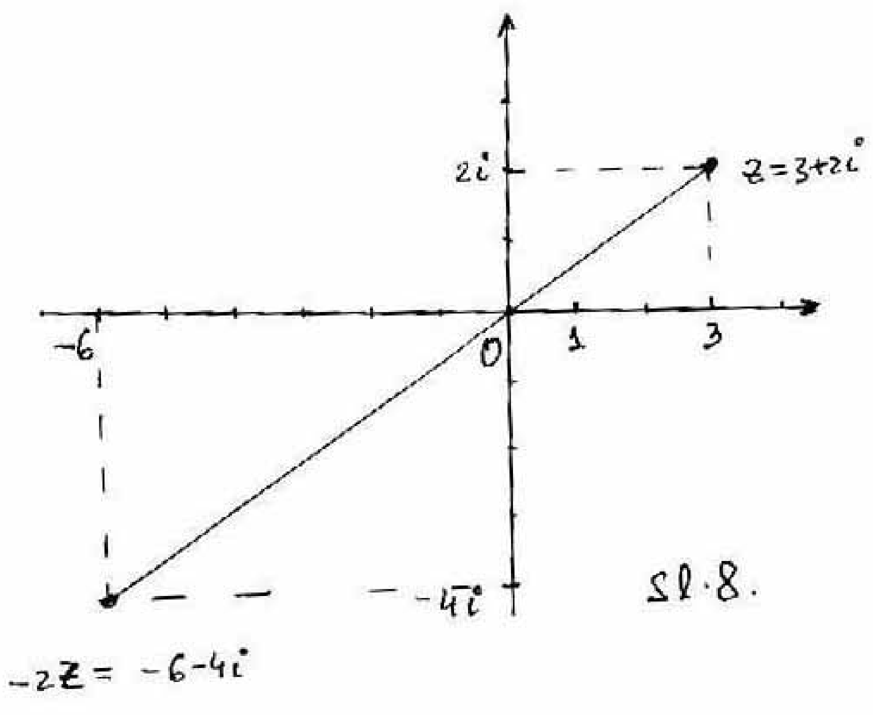


Primjer 2.
(i) Brojevi $z = 3 + 2i$ i $2z = 6 + 4i$ na istoj su zraci koja počinje u ishodištu (Slika 7).



Sl. 7.

(ii) Brojevi $z = 3+2i$ i $-2z = -6-4i$ na istom su pravcu koji prolazi ishodištem, ali s različitih strana ishodišta (Slika 8).

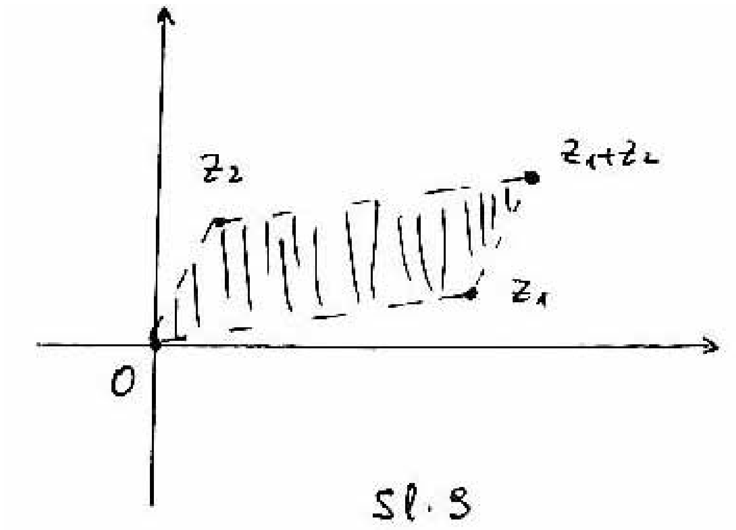


Sl. 8.

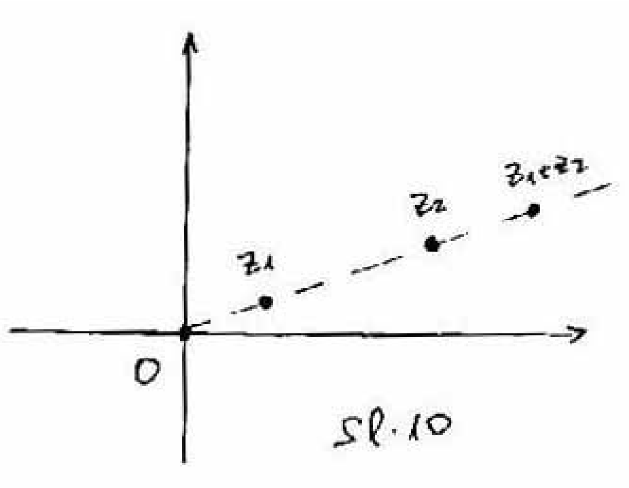
Geometrijsku predodžbu umnoška (odnosno kvocijenta) dvaju kompleksnih brojeva opisat ćemo poslije.

Geometrijsko predočavanje zbroja i razlike kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi $z_1, z_2, z_1 + z_2$ i 0 jesu vrhovi paralelograma; pritom su z_1, z_2 jedan par nasuprotnih vrhova, a $0, z_1 + z_2$ drugi (Slika 9).

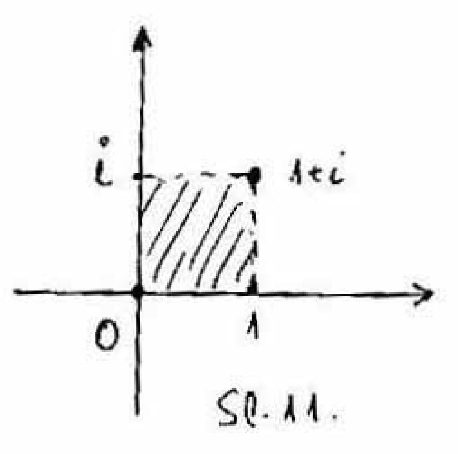


Izuzetak je samo ako su z_1, z_2 na istom pravcu koji prolazi ishodištem, na primjer ako su oba realni. Tada su sva četiri broja na istom pravcu - degenerirani paralelogram (Slika 10).

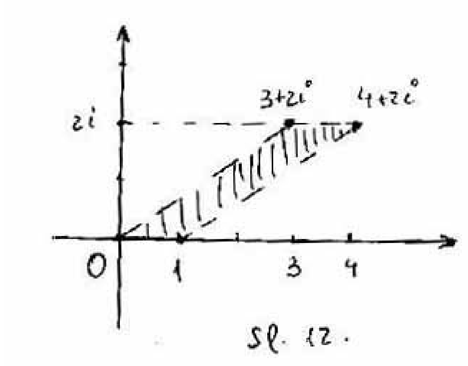


To je zato što je tada $z_2 = \lambda z_1$ za neki realni broj λ (gledamo slučaj kad su z_1, z_2 različiti od nule). Zato je $z_1 + z_2 = (1 + \lambda) z_1$ pa su svi brojevi na istom pravcu kroz ishodište.

Primjer 3. (i) Brojevi $1, i, 1 + i, 0$ vrhovi su kvadrata (pri čemu su $1, i$ nasuprotni vrhovi (Slika 11).

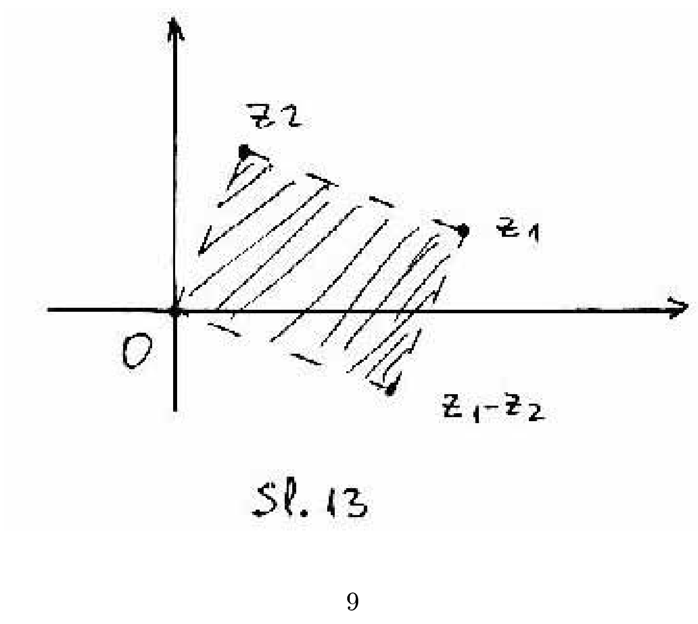


(ii) Brojevi $1, 3+2i, 4+2i, 0$ vrhovi su paralelograma (Slika 12).



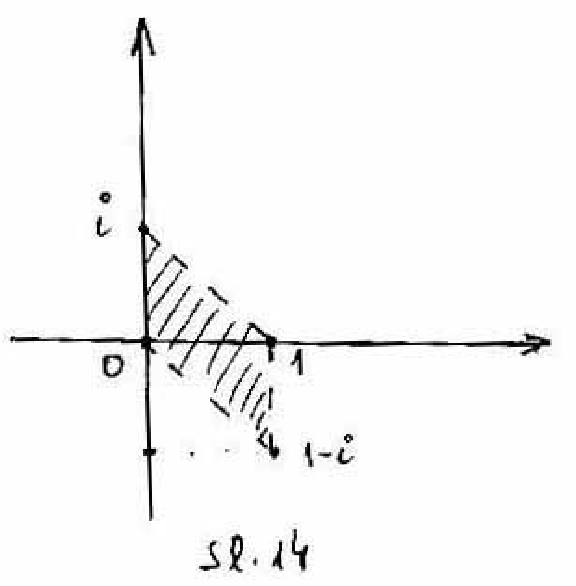
(iii) Brojevi $2+3i, -4-6i, -2-3i, 0$ na istom su pravcu (tu je $z_2 = -2z_1$).

Kompleksni brojevi $z_1, z_2, z_1 - z_2$ *i* 0 jesu vrhovi paralelograma; pritom su $z_1, 0$ jedan par nasuprotnih vrhova, a $z_2, z_1 - z_2$ drugi (Slika 13).

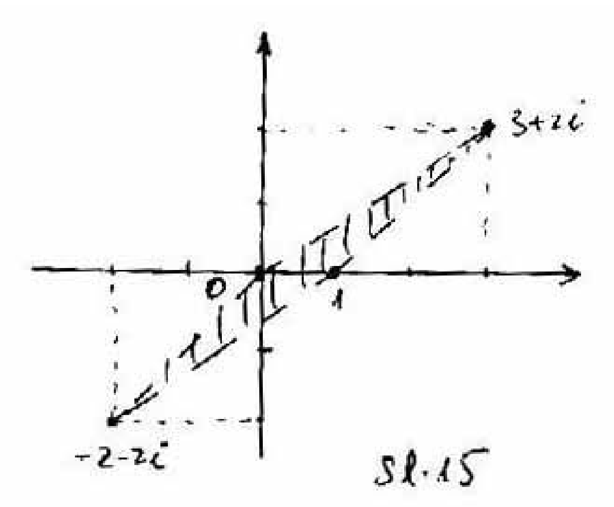


Kao i kod zbrajanja, postoje izuzeci.

Primjer 4. (i) Brojevi $1, i, 1-i, 0$ vrhovi su paralelograma (pri čemu su $1, 0$ nasuprotni vrhovi (Slika 14).



(ii) Brojevi $1, 3+2i, -2-2i, 0$ vrhovi su paralelograma (Slika 15).

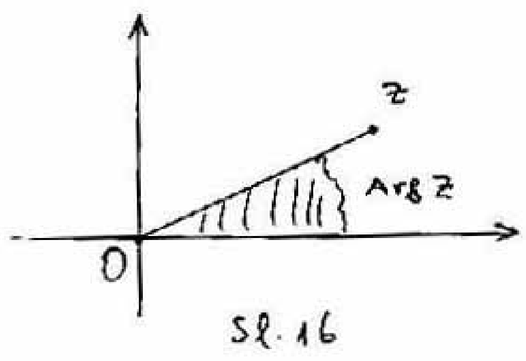


(iii) Brojevi $2+3i, -4-6i, 6+9i, 0$ na istom su pravcu.

IV. Nove definicije i tvrdnje

Trigonometrijski prikaz kompleksna broja

Neka je $z = a + bi$ kompleksan broj različit od 0. Tada spojnica broja z s ishodištem kompleksne ravnine čini kut s pozitivnom realnom zrakom. Taj se kut zove **argument** ili kut kompleksnog broja z i označava kao $Arg(z)$ (Slika 16).

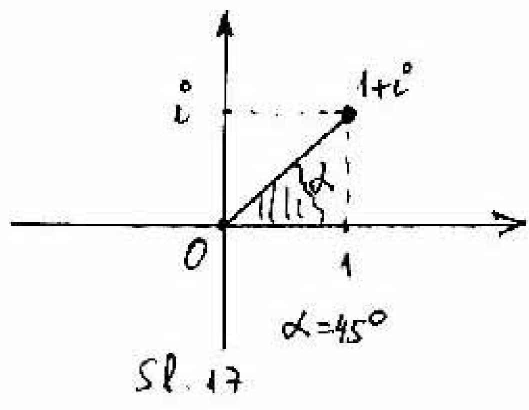


Vidimo da je

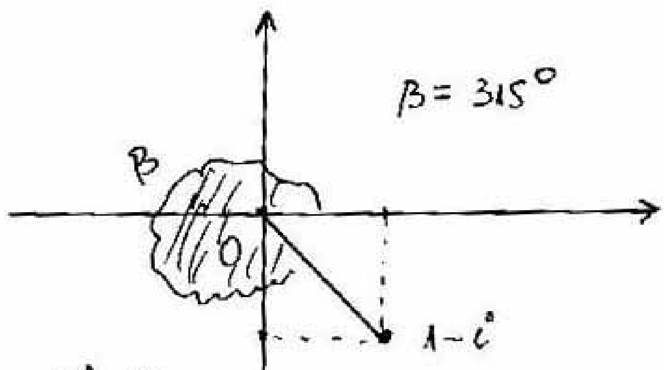
$$0 \leq Arg(z) < 360°$$

Kad god to ne bude stvaralo zabunu, argument kompleksnog broja označavat ćemo, kako i inače označavamo mjere kuta, grčkim slovima.

Primjer 5.
(i) Argument kompleksnog broja $z = 1 + i$ je $45°$. Pišemo $Arg(z) = 45°$ ili $arg(1 + i) = 45°$ ili, jednostavno, $\alpha = 45°$ (Slika 17).

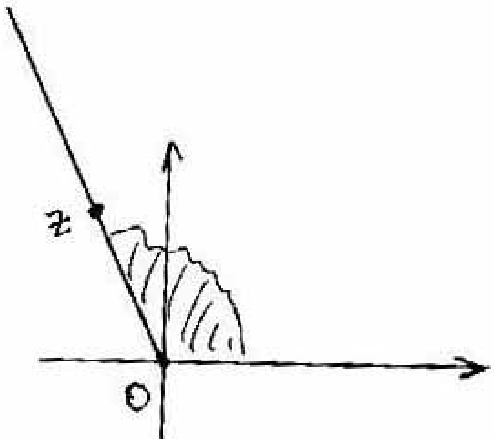


(ii) Argument kompleksnog broja $z = 1 - i$ je $360° - 45° = 315°$. Pišemo $Arg(z) = 315°$ ili $arg(1 - i) = 315°$ ili, jednostavno, $\beta = 315°$ (Slika 18).



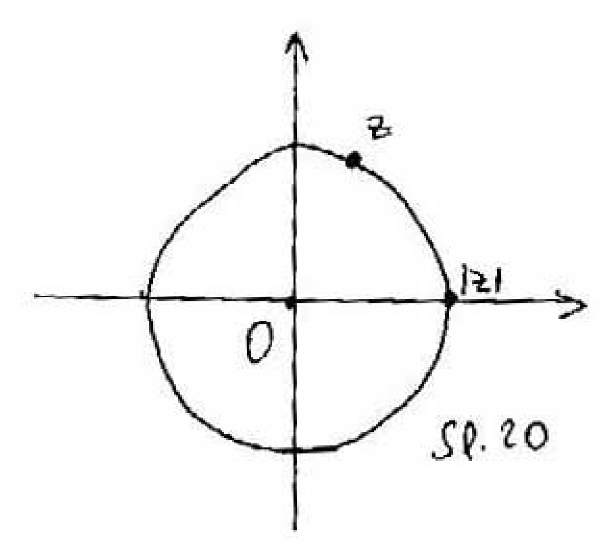
Sl. 18

Treba uočiti sljedeće tri važne činjenice:
1. Kompleksni brojevi koji imaju isti argument kao i z čine u kompleksnoj ravnini zraku s početkom u ishodištu koja prolazi kroz z, bez samog ishodišta (Slika 19).

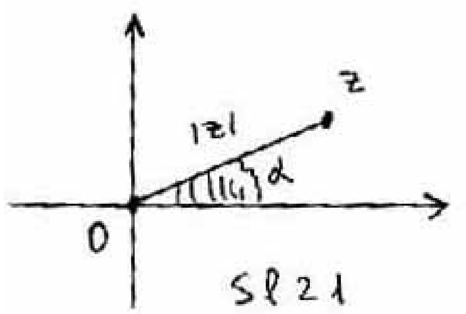


Sl. 19

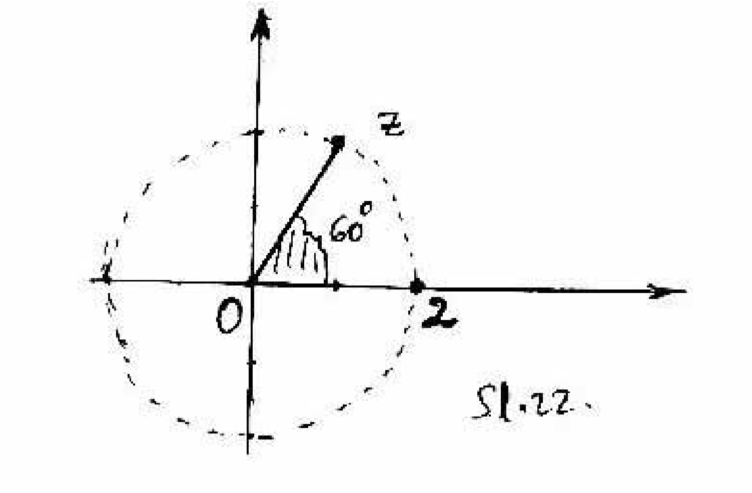
2. Kompleksni brojevi koji imaju istu apsolutnu vrijednost kao i z čine u kompleksnoj ravnini kružnicu sa središtem u ishodištu koja prolazi kroz z, dakle ima polumjer $|z|$ (Slika 20).



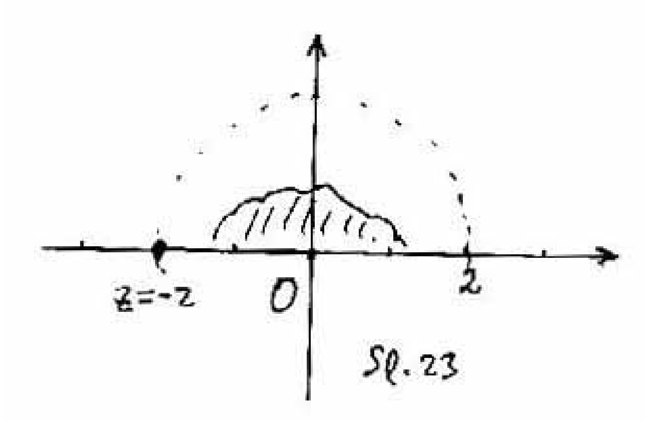
3. Svaki je kompleksni broj z različit od 0 jednoznačno određen svojim argumentom (kutom) i svojom apsolutnom vrijednošću (Slika 21).



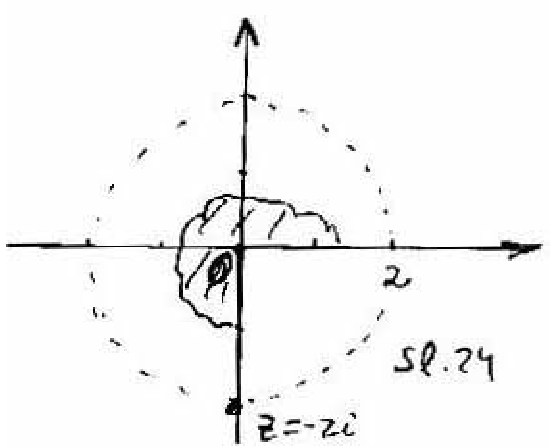
Primjer 6. Prikažimo u kompleksnoj ravnini kompleksni broj z ako je:
(i) $|z| = 2$ i $\alpha = 60°$ (Slika 22)



(ii) $|z| = 2$ i $\alpha = 180°$ (Slika 23)

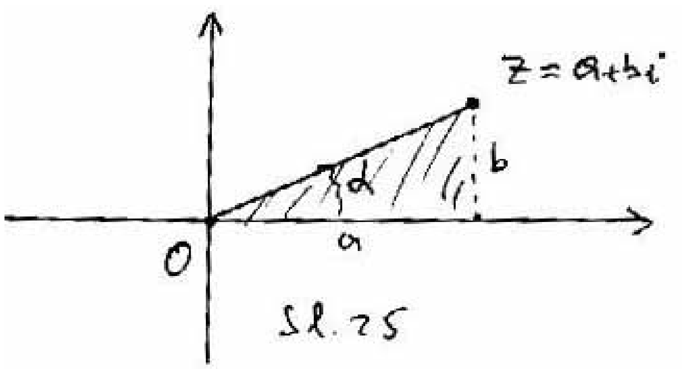


(iii) $|z| = 2$ i $\alpha = 270°$ (Slika 24)



Iz $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$ i $\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$, dobijemo (Slika 25),

$$z = a + bi = |z|\cos\alpha + |z|\sin\alpha \cdot i = |z|(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i)$$



To je **trigonometrijski prikaz** kompleksnog broja. Obično se piše tako da i i $\sin\alpha$ zamijene mjesta

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Primjer 7. Odredimo trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva iz Primjera 5.

(i) $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\alpha = 45°$ pa je:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$$

(ii) $z = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\beta = 135°$ pa je:

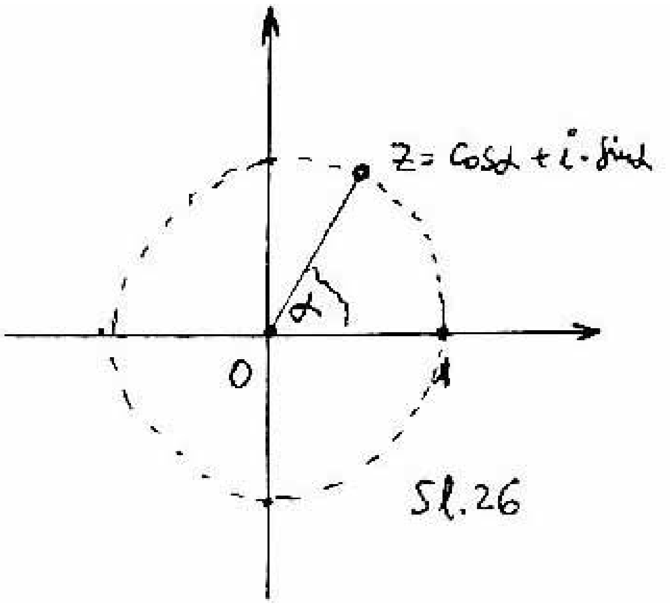
$$z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$$

Primjer 8. Odredimo kompleksni broj z (tj. odredimo njegov algebarski prikaz) ako je: $|z| = 2$ i $\alpha = 60°$.

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(\cos 60° + i\sin 60°) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$$

Geometrijska interpretacija brojeva $\cos\alpha + i\sin\alpha$ - jedinična kružnica.

Brojevi $\cos\alpha + i\sin\alpha$ imaju modul 1, jer je $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pa se nalaze na jediničnoj kružnici (Slika 26).



Sl. 26

Možemo zamišljati kako ti brojevi obilaze jediničnu kružnicu suprotno kazaljci sata (počevši od broja 1), dok se kut α mijenja od $0°$ do $360°$ (opet broj 1).

Također možemo zamišljati da se kut α sve više poveáva, pa dok se promijeni od $360°$ do $720°$, brojevi će još jednom obići kružnicu itd. Pritom za kutove

$$\alpha, \alpha + 360°, \alpha + 720°, ...$$

imamo iste kompleksne brojeve. Svi ti kutovi $\alpha + k \cdot 360°$, gdje k prolazi skupom cijelih brojeva, nazivaju se **argumentima**; oni su argumenti od istog kompleksnog broja z, pišemo

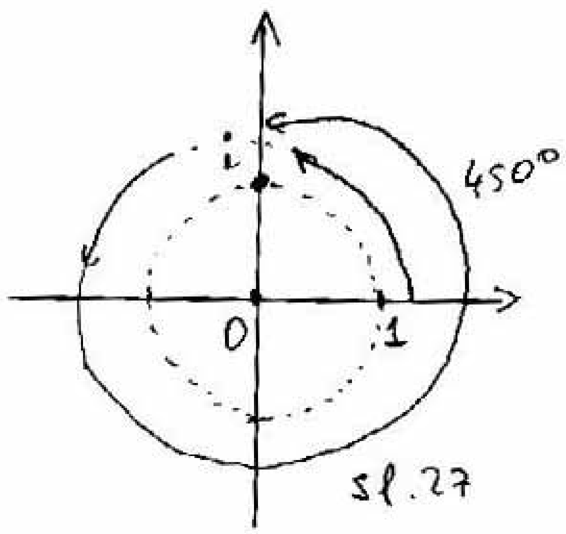
$$arg(z) = \alpha + k \cdot 360°$$

dok se $Arg(z)$ onda naziva **glavnim argumentom**.

Primjer 9. (i) $Arg(i) = 90°$ (glavni argument), dok su svi argumenti $arg(i) = 90° + k \cdot 360°$. Na primjer
za $k = 0$ dobijemo glavni argument
za $k = 1$ dobijemo argument

$$90° + 360° = 450°$$

To treba tumačiti tako da kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $450°$ **suprotno kazaljci sata** dolazimo u broj i (u međuvremenu ćemo jednom proći kroz i, ali ćemo nastaviti kruženje), slika 27.

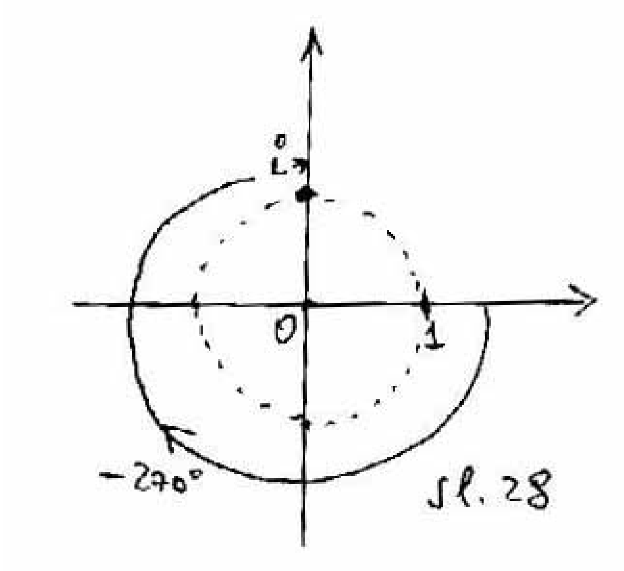


sl. 27

Za $k = -1$ dobijemo argument

$$90° + (-1)360° = -270°$$

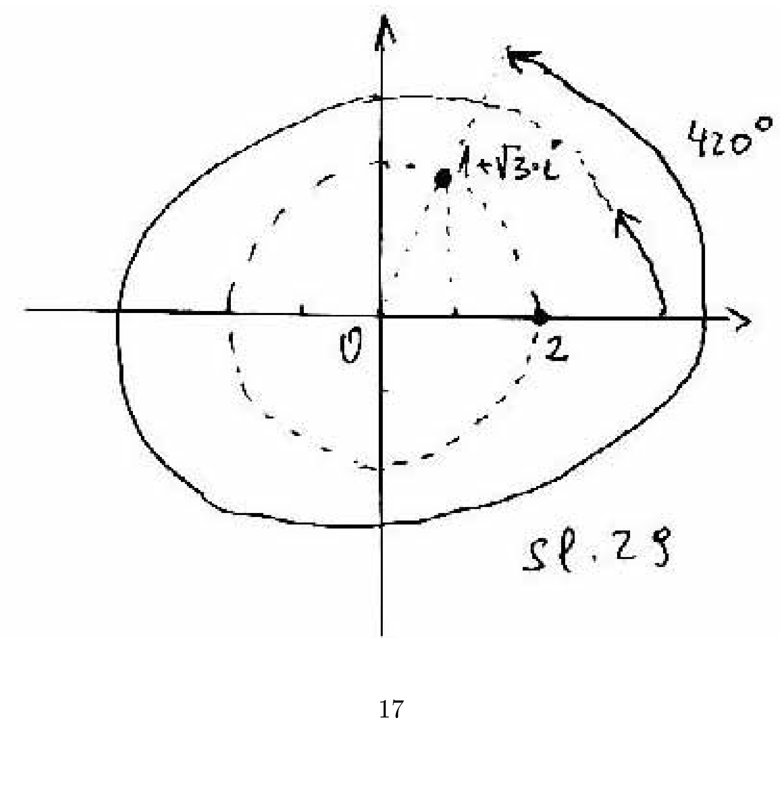
To treba tumačiti tako da kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $270°$ **u skladu s kazaljkom na satu** (zbog negativnog predznaka), dolazimo u broj i (Slika 28).



(ii) $Arg(1+\sqrt{3}i) = 60^\circ$ (glavni argument - Primjer 8.), dok su svi argumenti $arg(1+\sqrt{3}i) = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$. Na primjer
za $k = 0$ dobijemo glavni argument
za $k = 1$ dobijemo argument

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$$

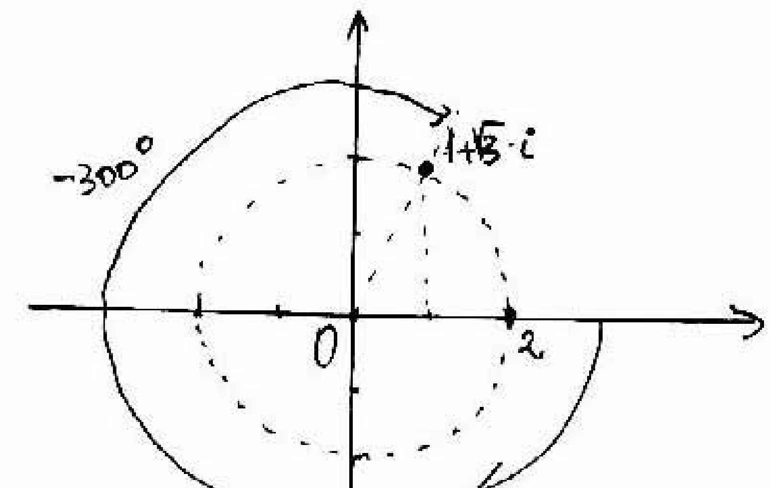
To treba tumačiti tako da kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 (jer kompleksni broj ima modul 2) za kut 420° **suprotno kazaljci sata** dolazimo u broj $1+\sqrt{3}i$ (u međuvremenu ćemo jednom proći kroz $1+\sqrt{3}i$, ali ćemo nastaviti kruženje), slika 29.



Za $k = -1$ dobijemo argument

$$60^\circ + (-1)360^\circ = -300^\circ$$

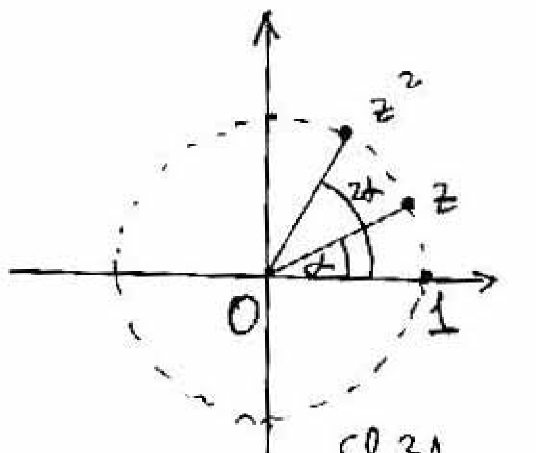
To treba tumačiti tako da kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 za kut 300° **u skladu s kazaljkom na satu**, dolazimo u broj $1 + \sqrt{3}i$ (Slika 30).



Sl. 30

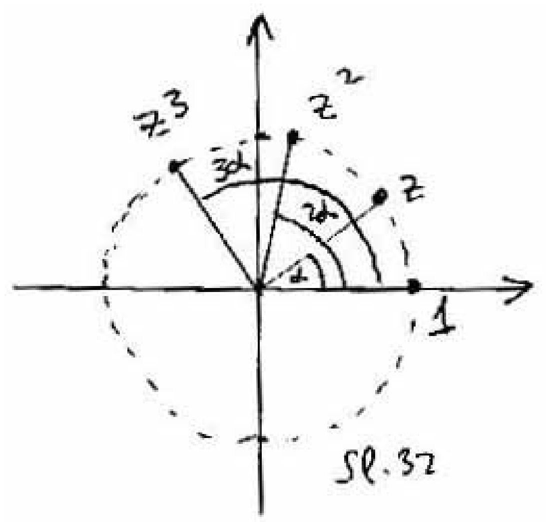
Geometrijska interpretacija potenciranja na jediničnoj kružnici - Moivreova formula.

Ako je $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (tj. ako je z na jediničnoj kružnici), onda je: $z^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$ tj. z se kvadrira tako da mu se argument udvostručuje (Slika 31).



Sl. 31

Slično:
$z^3 = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)$ tj. z se kubira tako da mu se argument utrostručuje (Slika 32).

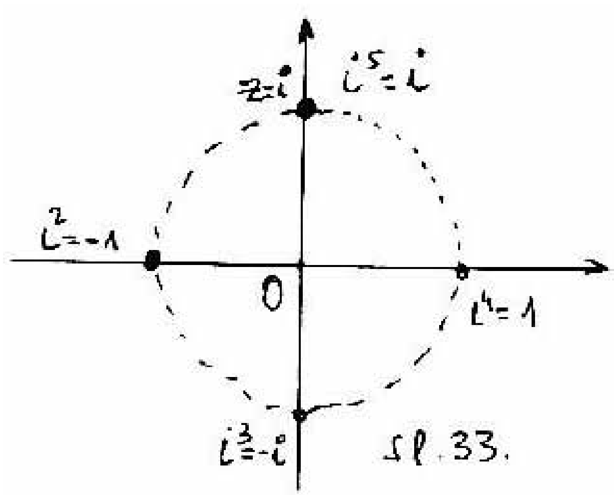


Općenito

$$z^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

tj. z se potencira tako da mu se argument pomnoži s eksponentom. To je **Moivreova formula**.

Primjer 10. Ako je $z = i$, onda je $z^2 = -1$, $z^3 = -i$, $z^4 = 1$, $z^5 = i, ...$ (Slika 33).



Vidimo da potencije ostaju na jediničnoj kružnici, samo se argument udvostručuje, utrostručuje itd. Naime, argumenti su, redom, $90°, 180°, 270°, 360°, ...$

Moivreova formula može se primijeniti na sve kompleksne brojeve različite od 0, a ne samo one modula 1 (na jediničnoj kružnici):

Ako je $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, onda je $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Kompleksni se broj potencira tako da mu se apsolutna vrijednost potencira, a kut pomnoži eksponentom.

Primjer 11. Izračunajmo $(1+\sqrt{3}i)^5$.
Možemo računati izravno, samo što bi to bilo mukotrpno. Zato primjenjujemo Moivreovu formulu. Već znamo da je:
$|z| = 2$ i $\alpha = 60°$. Zato je
$z^5 = 2^5(\cos(5\cdot 60°) + i\sin(5\cdot 60°)) = 32(\cos 300° + i\sin 300°) =$
$32(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16 + 16\sqrt{3}i$

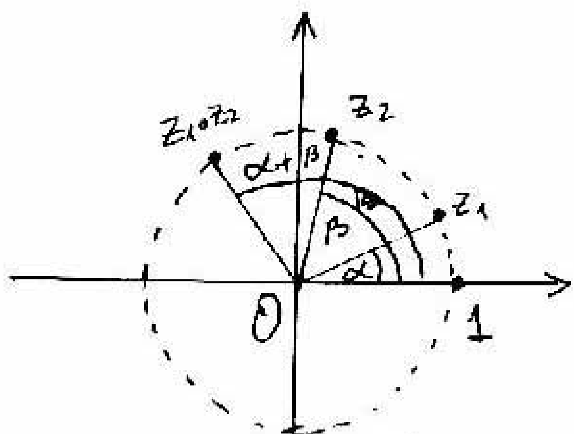
Množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici. Uočimo dva kompleksna broja na jediničnoj kružnici:

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$$

Tada je

$$z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici množe se tako da se argumenti zbroje. (Slika 34)



sl. 34

Uočite: ako u tu formulu stavite $\beta = \alpha$ dobit ćete formulu za kvadriranje broja na jediničnoj kružnici.

Formulu za množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici možemo primjeniti i općenito:

Ako je

$$z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \;\; z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

onda je

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

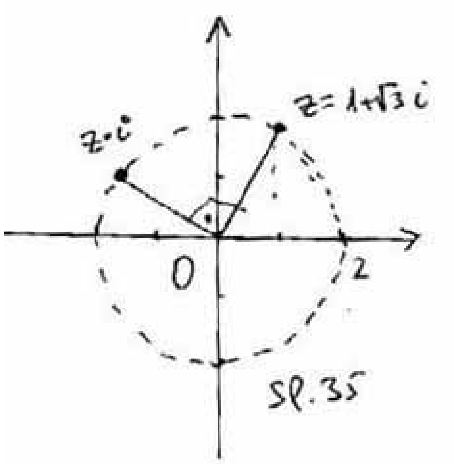
Kompleksni se brojevi množe tako da im se moduli pomnože, a argumenti zbroje.

Primjer 12. (primjena formule za množenje kompleksnih brojeva) Koji ćemo broj dobiti ako zarotiramo kompleksni broj $z = 1 + \sqrt{3}i$ za 90° suprotno kazaljci sata ?

Treba z pomnožiti s i (jer i ima kut od 90°, a modul 1, tako da će se u rezultatu kut povećati za 90°, a modul ostati isti). Dakle,

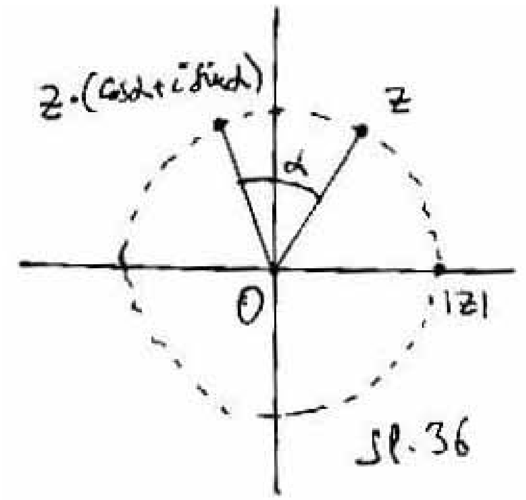
$$z' = z \cdot i = (1 + \sqrt{3}i)i = -\sqrt{3} + i$$

Provjerite na crtežu (Slika 35)!



Sl.35

Vidimo da vrijedi općenito, **ako broj pomnožimo s** $\cos\alpha + i\sin\alpha$**, zarotirat ćemo ga za** α (Slika 36).



Sl.36

Popis pojmova i oznaka

Algebarski (algebraic)
algebarska jednadžba (algebraic equation) - polinomska jednadžba: linearna (linear), kvadratna (quadratic), kubna (cubic), četvrtog stupnja (quartic), petog stupnja (quintic) itd.)
algebarska operacija (algebraic operation) - računska operacija: zbrajanje (addition), oduzimanje (subtraction), množenje (multiplication), dijeljenje (division)
Aproksimacija (approximation) - približna vrijednost.
Apsolutna vrijednost (absolute value, module)
Broj (number)
cijeli broj (integer)
čisto imaginarni broj (purely imaginary number)
decimalni broj (decimal number),
iracionalni broj (irrational number)
kompleksni broj (complex number), imaginarni dio (imaginary part), realni dio (real part)
kompleksno konjugirani brojevi (conjugate numbers, conjugates)
negativni broj (negative number)
pozitivni broj (positive number)
prirodni broj (natural number)
racionalni broj (rational number)
realni broj (real number)
recipročni broj (reciprocal, multiplicative inverse)
suprotni broj (negative of, additive inverse)
Brojevni pravac, koordinatni pravac (number line)
Jednadžba (equality)
Jednakost (equality)
Količnik, kvocijent (quotient)
Kompleksna ravnina (complex plane, Gauss plane, Argand plane)
Koordinatni sustav (coordinate system) - na pravcu, ravnini itd.
Polinom (polynomial)
stupanj p. (degree of p.)
Razlika (difference)
Razlomak (fraction)
brojnik (numerator)
nazivnik (denumerator)
Skraćivanje (cancellation)
Trigonometrijski prikaz (polar representation)
Umnožak, produkt (product)
Uređeni par (ordered pair)
Zbroj (sum)
Znanstvena notacija (scientific notation)

Lekcije iz Matematike 1.

2. Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuje pojam vektora, operacije s vektorima, duljine (norme) vektora, vektorskog prostora, dimenzije vektorskog prostora i njihova geometrijska i fizikalna interpretacija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Intuitivno je jasno da je pravac jednodimenzionalan (pa bi se njegove točke trebale opisivati brojevima - jedna točka, jedan broj), ravnina je dvodimenzionalna (pa bi se njene točke trebale opisivati pomoću dvaju brojeva) itd. Taj se problem matematički rješava uvođenjem koordinatnog sustava (na pravac, ravninu, prostor itd.) i uvođenjem pojma uređenog para, uređene trojke itd.
Slično, postoje fizikalne veličine koje se mogu opisati jednim brojem (masa, temperatura itd.), ali postoje i veličine za čije opisivanje u pravilu treba više brojeva. Takva je, na primjer, sila za koju je važno ne samo kojeg je inteziteta već i koji joj je smjer djelovanja (vidjet ćemo da je sila koja djeluje u ravnini određena pomoću dvaju brojeva - točnije pomoću uređenog para brojeva, ako djeluje u prostoru onda je određena pomoću triju brojeva - uređene trojke itd.).
Vrlo često na istom prostoru (odnosno njegovu dijelu) djeluje više sila pa se postavlja problem razmatranja njihova ukupnog djelovanja. To se matematički rješava algebrom vektora (tj. uvođenjem algebarskih operacija na vektore).

III. Potrebno predznanje

Vektori u ravnini i u prostoru mogu se uvesti čisto geometrijski (pomoću usmjerenih dužina) i analitički (pomoću uređenih parova, odnosno trojki). Geometrijsko uvođenje vektora započelo je u osnovnoj školi i nastavljeno u srednjoj, a analitičko je uvedeno tek djelomice (i to samo za ravninu).

Geometrijsko uvođenje vektora u ravninu odnosno prostor.

Neka su A, B dvije točke ravnine ili prostora. Vektor s početkom A i završetkom B označavamo oznakom

$$\overrightarrow{AB}.$$

Taj pojam možemo zamišljati geometrijski i fizikalno (Slika 1).

Geometrijski: Vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao pomak (translaciju) kojim smo točku A pomakli u točku B.

Fizikalno: Vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao silu kojoj je hvatište u točki A, smjer djelovanja je prema točki B, a intezitet joj je predočen udaljenošcu od A do B.

Iz ovih dviju predodžaba prirodno se nameću pojmovi **duljine (modula), smjera i usmjerenja (orijentacije)** vektora.

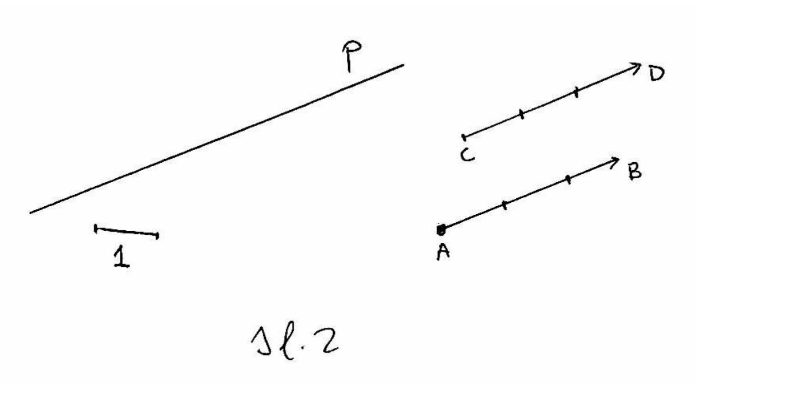
Duljina (modul) vektora $\overrightarrow{AB}$ je udaljenost točaka A, B (tj. duljina dužine $\overline{AB}$). Označava se kao $|\overrightarrow{AB}|$.
Smjer vektora $\overrightarrow{AB}$ je smjer koji određuje pravac na kojima su točke A, B.
Usmjerenje vektora $\overrightarrow{AB}$ je od točke A do točke B.

Iz fizikalne predožbe vektora proizlazi da ne treba razlikovati vektore koji djeluju po usporednim pravcima, a imaju jednake duljine i jednako su orijentirani. Odatle proizlazi definicija jednakosti vektora:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak je **vektoru** $\overrightarrow{CD}$ ako točke A, B, D, C (upravo u tom redoslijedu) **čine paralelogram**.

Sad imamo glavnu tvrdnju o jednakosti vektora:
Dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer i isto usmjerenje.

Primjer 1 Neka jedinična duljina odgovara sili od jednog Njutna (1N). Neka su smjer i usmjerenje sile zadani zrakom p na slici i neka sila ima jačinu $3N$. Vektorski je predočeno kako ta sila djeluje u točkama A i C. Pripadni su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki (Slika 2).

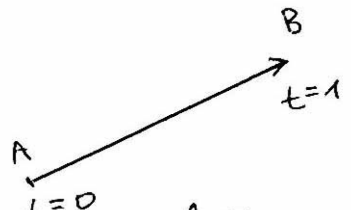


Primjer 2. (interpretacija vektora brzine). Ako je $\overrightarrow{AB}$ vektor brzine možemo ga interpretirati ovako (Slika 3):

1. Početna točka A je položaj u kojemu se čestica koja se giba i vrijeme $t = 0$.

2. Završna točka B je točka u kojoj će se naći ta čestica nakon jedne sekunde, odnosno jedinice vremena (ako se giba po pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$).

To je zato jer modul vektora brzine $|\overrightarrow{AB}|$ znači duljinu puta što ga čestica prijeđe u jedinici vremena (ako se giba pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$).



Sl. 3.

Množenje vektora brojem (skalarom)

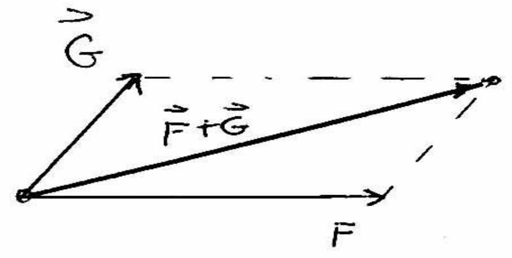
Neka u prostoru djeluje sila $\overrightarrow{F}$. Intuitivno je jasno da dvostruki učinak od te sile čini sila koja je dva puta veća po intezitetu, a ima isti smjer i orijentaciju kao i $\overrightarrow{F}$. Razumljivo je da ćemo tu novu silu označiti kao $2\overrightarrow{F}$. Kažemo da smo silu $\overrightarrow{F}$ pomnožili s 2 (Slika 4). Slično je pri množenju sile s bilo kojim brojem (s time da se pri množenju s negativnim brojem mijenja orijentacija-usmjerenje, a pri množenju s brojem 0 dobije sila nula). Na osnovi te fizikalne predodžbe uvodimo operaciju množenja vektora i skalara (pri tom množenju obično prije pišemo skalar, potom vektor).
Do iste definicije dolazimo razmatrajući vektore geometrijski, tj. kao translacije.

Sl. 4

Zbrajanje vektora.

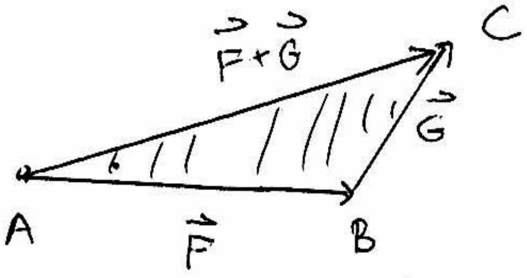
Neka u prostoru djeluju dvije sile $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{G}$, svaka sa svojim intezitetom, smjerom i usmjerenjem. Treba odrediti **rezultatntu** njihova djelovanja (u konkretnoj točki A). Ako te dvije sile imaju isti smjer, sve je jasno (bez obzira jesu li

usmjerenja ista). Općenito, **pokus** potvrđuje da je ukupno djelovanje - rezultanta opet sila, koja djeluje duž dijagonale paralelograma što ga te dvije sile razapinju i ima intenzitet jednak duljini te dijagonale (Slika 5).
Odatle potječe **pravilo paralelograma** za zbrajanje vektora.



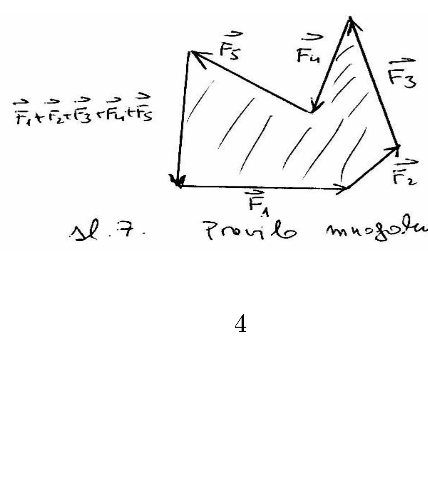
Sl. 5. Pravilo paralelograma

Još jasnije pravilo za zbrajanje vektora dobijemo iz geometrijske interpretacije vektora (kao translacija): točka A translatira se pomoću $\overrightarrow{F}$ u točku B, potom točka B pomoću $\overrightarrow{G}$ u točku D (potpuno isto bi se dobilo da prvo djeluje $\overrightarrow{G}$). Odatle potječe **pravilo trokuta** za zbrajanje vektora (Slika 6).



Sl. 6. Pravilo trokuta

To se pravilo lako poopćuje na pravilo mnogokuta (poligona) za zbrajanje više sila (Slika 7).



Sl. 7. Pravilo mnogokuta

Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje sa **suprotnim vektorom**:

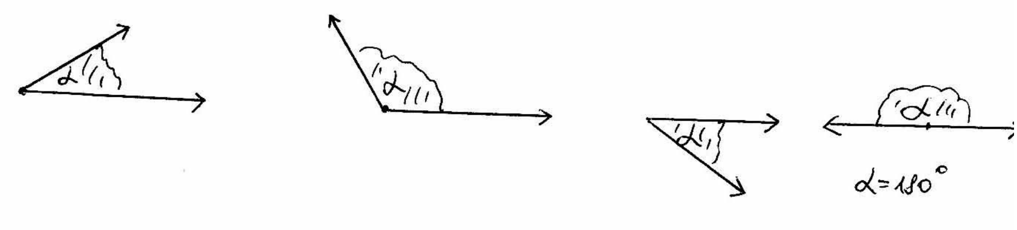
$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{G} := \overrightarrow{F} + (-\overrightarrow{G})$$

Osim sa strjelicama, vektori se često označavaju masnim slovima, primjerice $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, ...$, posebice nul-vektor označava se kao $\mathbf{0}$.

Očita svojstva zbrajanja vektora.

Očita svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom.
1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2.$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

Kut među vektorima.
Intuitivno je jasno (a pokusom se lako potvrdi) da rezultanta djelovanja dviju sila (u nekoj točki) ne ovisi samo o njihovim intenzitetima već i o kutu pod kojim te sile djeluju. Od dvaju kutova (vanjskog i nutarnjeg) što ga te dvije sile zatvaraju, važan nam je manji-nutarnji (jer rezultanta djeluje unutar njega). Odatle potječe definicija kuta među dvama ne-nul vektorima: to je manji od kutova što ga ta dva vektora određuju kad ih postavimo da počinju u istoj točki (posebni su slučajevi kad je kut nula-kut ili ispruženi kut), slika 8.



Sl. 8

Vidimo da za kut α među vektorima (točnije, za njihovu mjeru) vrijedi

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

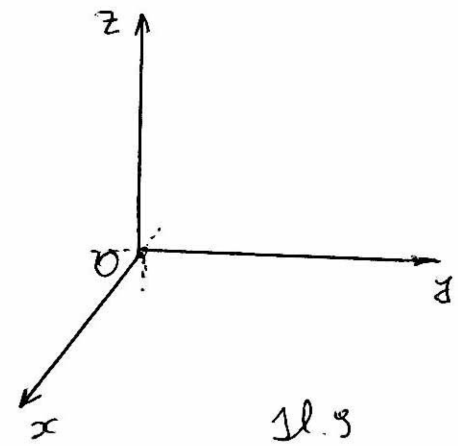
IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Koordinatni sustav u prostoru.

Biranjem dviju točaka na pravcu (jedne za smještanje nule, a drugu za smještanje jedinice) uvodi se koordinatni sustav na pravcu (pravac s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **brojevni** ili **koordinatni pravac**). Na brojevnom pravcu, umjesto s točkama, možemo raditi s brojevima - koordinatama točaka.

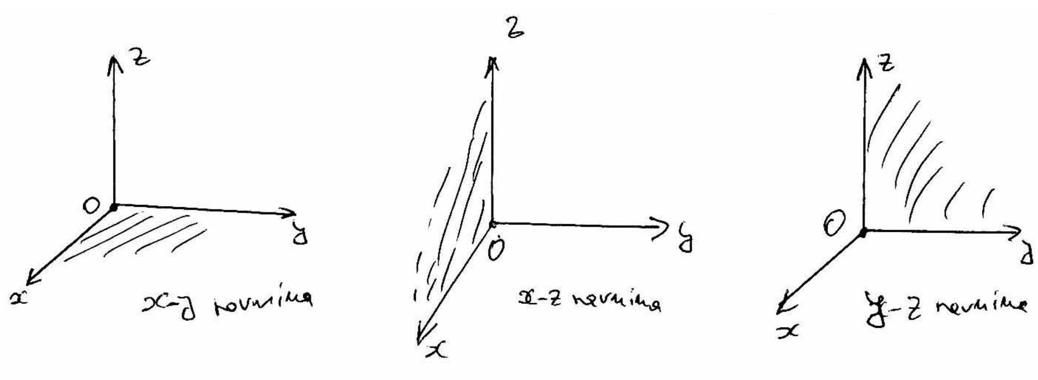
Biranjem dvaju međusobno okomitih brojevnih pravaca u ravnini (koji se sijeku u ishodištima) uvodi se koordinatni sustav u ravninu (ravnina s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatna ravnina**). U koordinatnoj ravnini, umjesto s točkama, možemo raditi s uređenim parovima brojeva (koordinata točke).

Biranjem triju međusobno okomitih brojevnih pravaca u prostoru (koji se sijeku u ishodištima u jednoj točki) uvodi se koordinatni sustav u prostor. Prostor s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatni prostor** (Slika 9).



Sl. 9

Istaknuti dio koordinatnog prostora možemo zamišljati kao ugao prostorije u kojem se sastaju tri brida: vertikalni odgovara pozitivnom dijelu z-osi, lijevi pozitivnom dijelu x-osi, a desni pozitivnom dijelu y-osi.
Vidimo da x i y osi određuju **koordinatnu ravninu** (pod prostorije), da x i z-osi također određuju koordinatnu ravninu (lijevi zid), a y i z-osi desni zid (Slika 10).



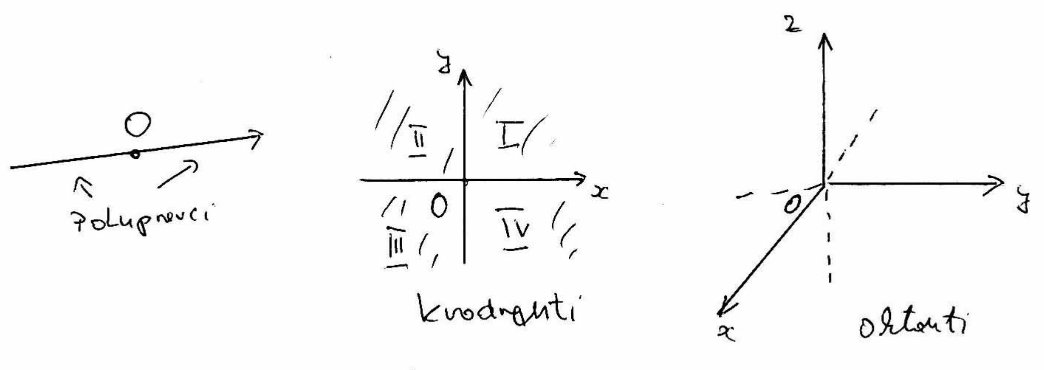
Sl. 10 koordinatne ravnine

Uočimo sljedeću analogiju (Slika 11):

Jedna točka (ishodište) dijeli koordinatni pravac na dva **polupravca**.

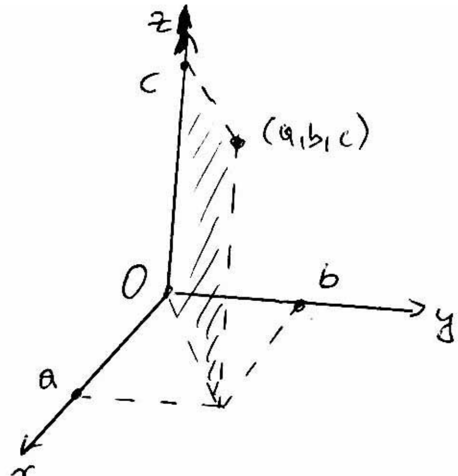
Dva pravca (koordinatne osi) dijele koordinatnu ravninu na četiri **kvadranta**.

Tri koordinatne ravnine dijele koordinatni prostor na osam **oktanata**.



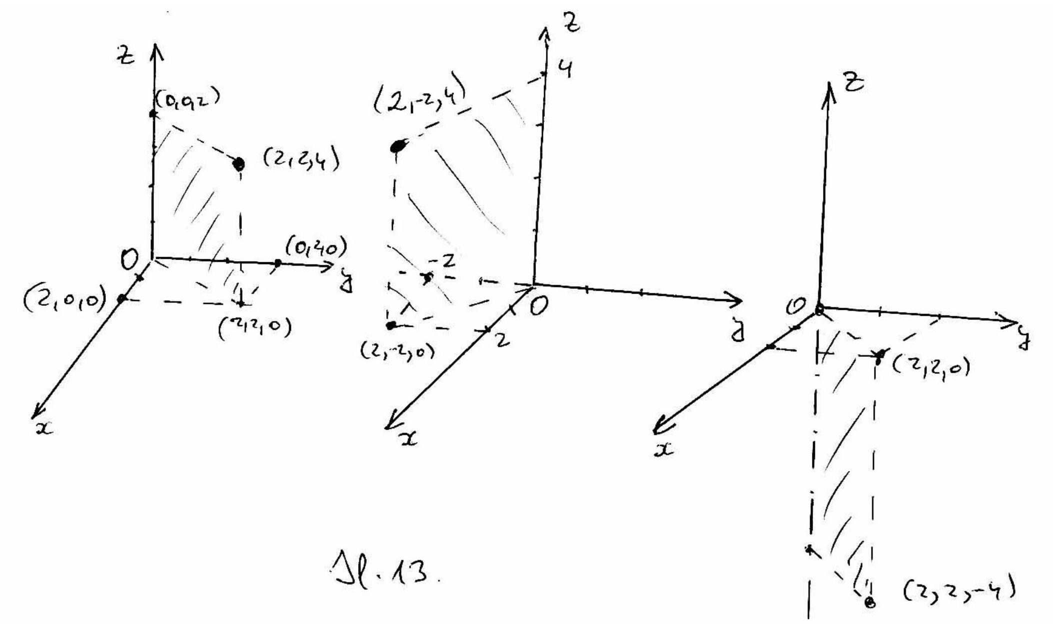
Sl. 11

U koordinatnom prostoru svaka je točka jednoznačno određena uređenom trojkom brojeva (x, y i z koordinatama točke), slika 12.



Sl. 12

Primjer 3.
Predočimo sljedeće točke u koordinatnom prostoru (Slika 13):
a) $A(2, 2, 4)$,
b) $B(2, -2, 4)$,
c) $C(2, 2, -4)$.



Sl. 13.

n-dimenzionalni prostor - koordinatni sustav

Vidimo da se
1. koordinatni pravac može poistovjetiti sa skupom realnih brojeva $\mathbf{R}$; to je jednodimenzionalni koordinatni prostor
2. koordinatna ravnina može poistovjetiti sa skupom svih uredjenih parova realnih brojeva (oznaka $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ili $\mathbf{R}^2$; to je dvodimenzionalni koordinatni prostor
3. koordinatni prostor može poistovjetiti sa skupom svih uredjenih trojka realnih brojeva (oznaka $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ili $\mathbf{R}^2$; to je trodimenzionalni koordinatni prostor

Analogno se definira n-dimenzionalni koordinatni prostor - koordinatni sustav (za bilo koji prirodni broj n);
to je skup svih uredjenih n-torka realnih brojeva

$$(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{N}$$

(oznaka $\mathbf{R}^n$).

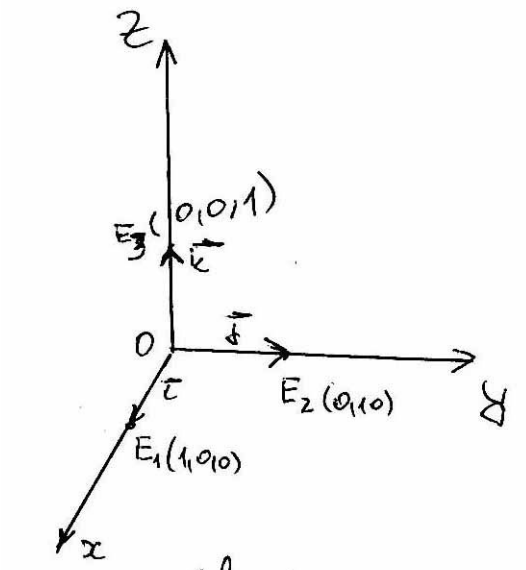
Jedinični vektori

Uočimo u koordinatnom prostoru tri točke (redom na pozitivnim dijelovima x, y odnosno z osi, na jediničnoj udaljenosti od ishodišta):

$$E_1 := (1, 0, 0),\ E_2 := (0, 1, 0),\ E_3 := (0, 0, 1)$$

Te točke određuju tri jedinična vektora (Slika 14):

$$\overrightarrow{i} := \overrightarrow{OE_1};\ \overrightarrow{j} := \overrightarrow{OE_2};\ \overrightarrow{k} := \overrightarrow{OE_3}.$$



Sl. 14.

Jedinični vektori zapisuju se i pomoću jednostupčanih **matrica**.

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uočite da je to samo drukčiji zapis koordinata završnih točaka tih vektora.

Jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru

Analogno jediničnim vektorima u ravnini i prostru, definiraju se jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru: to je n vektora:

$$\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$$

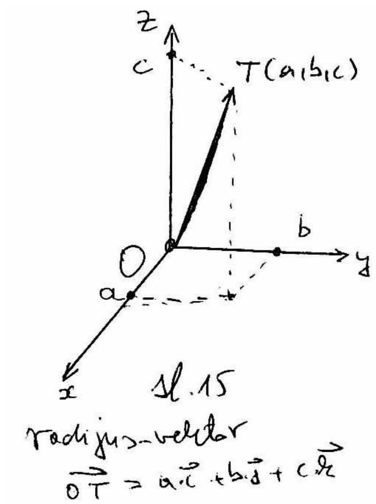
$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

(kod $\mathbf{e_i}$ na i-tom je mjestu 1, a na ostalima je 0.

Radijus vektori - analitički prikaz vektora u koordinatnom prostoru

Točka $T(a, b, c)$ koordinatnog prostora prostora određuje jedinstven vektor $\overrightarrow{OT}$ s početkom u ishodištu i završetkom u T (**radijus vektor**), slika 15. Vidimo da svaki vektor prostora možemo shvatiti kao radijus vektor. Vidimo, također, da vrijedi:

$$\overrightarrow{OT} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$$



Kažemo da smo vektor $\overrightarrow{OT}$ zapisali kao **linearnu kombinaciju** vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tu linearnu kombinaciju zapisujemo i kao:

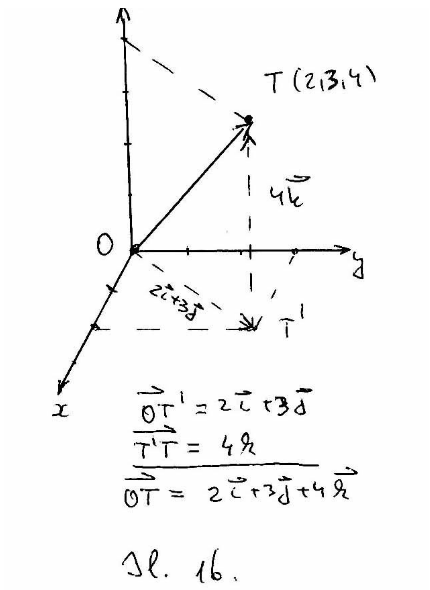
$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{bmatrix}$$

(to je samo drukčiji zapis koordinata točke T). Na primjer, za $T(2,3,4)$ izravno iz slike 16 vidi se da je

$$\overrightarrow{OT} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

odnosno da je

$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Uočite:
Vektori u prostoru mogu se poistovjetiti s točkama u prostoru (tako da ta točka bude završetak, a ishodište početak), a točke u prostoru s jednostupčanim matricama sastavljenim od koordinata tih točaka, dakle:

$$\text{Skup vektora prostora} = \text{Skup matrica oblika} \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{bmatrix}$$

gdje su a, b, c realni brojevi .
Kad vektor predočimo ovako ili kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, kažemo da smo ga predočili **analitički**.

U n-dimenzionalnom prostoru $\mathbf{R^n}$ za radijus vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OT}$ gdje je $T(a_1, ..., a_n)$, vrijedi

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + ... + \mathbf{a_n e_n}.$$

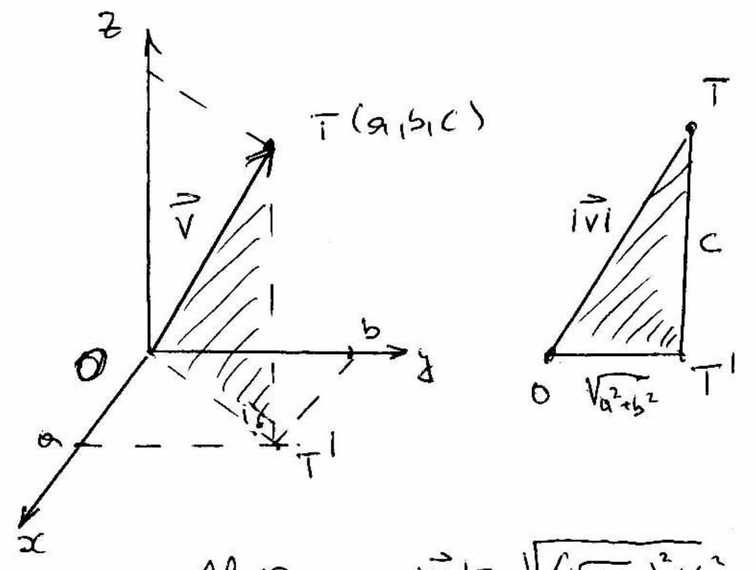
Formula za duljinu vektora $a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$

Izravno iz slike 17 vidimo da je

$$|a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

tj. ako je $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$, onda je

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Sl. 17.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Primjer 4. Odredimo duljinu vektora $\overrightarrow{v} = 4 \cdot \overrightarrow{i} + 7 \cdot \overrightarrow{j} - 4 \cdot \overrightarrow{k}$
Koristeći se formulom za duljinu vektora u koordinatnom sustavu, dobijemo:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = 9$$

U n dimenzionalnom prostoru općenito vrijedi

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

gdje je $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n}$.

Algebarske operacije s vektorima u koordinatnom sustavu.

Vektore s analitičkim prikazom zbrajamo i množimo sa skalarom kao u primjeru.

Primjer 5. Odredimo $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ ako je
$\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}$

$2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} = 2(4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + 3(3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}) =$
$(8\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + (9\overrightarrow{i} - 15\overrightarrow{k}) = 17\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 13\overrightarrow{k}$

Ako bismo se koristili zapisom pomoću jednostupčanih matrica (i ako bismo vektore zapisali masnim slovima, umjesto strjelicama), imali bismo:

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Slično je s operacijama na vektorima u n-dimenzionalnom prostoru.

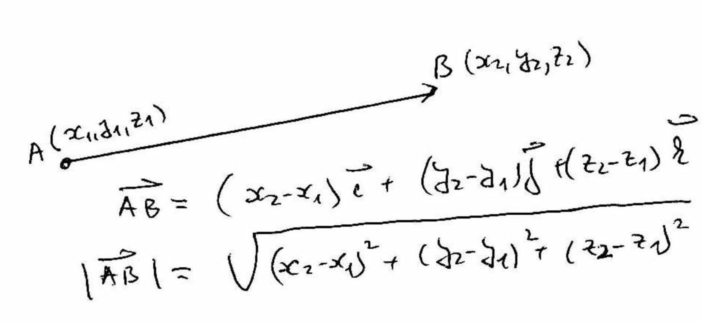
Analitički prikaz i duljina vektora $\overrightarrow{AB}$

Ako je $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ onda je (Slika 18)

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

i

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Sl. 18

Primjer 6. Odredimo analitički zapis i duljinu vektora $\overrightarrow{AB}$ ako je $A(2,1,3),\ B(1,-2,5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\overrightarrow{i} + (-2-1)\overrightarrow{j} + (5-3)\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15}$$

U n dimenzionalnom prostoru vrijede analogne formule:
Ako je $A(a_1,...,a_n),\ B(b_1,...,b_n$ onda je:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{e_1} + ... + (b_n - a_n)\mathbf{e_n}$$

i

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - x_1)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

Kriterij kolinearnosti vektora.

Vektori $\overrightarrow{v_1} = a_1 \cdot \overrightarrow{i} + b_1 \cdot \overrightarrow{j} + c_1 \cdot \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{v_2} = a_2 \cdot \overrightarrow{i} + b_2 \cdot \overrightarrow{j} + c_2 \cdot \overrightarrow{k}$ su kolinearni (proporcionalni) ako su im odgovarajuće komponente proporcionalne, tj. ako je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda$$

Pritom, ako je $\lambda > 0$ vektori su jednako usmjereni, a ako je $\lambda < 0$ oni su suprotno usmjereni.

Primjer 7. Provjerimo kolinearnost vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ako je:

(i) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

(i) Tu je

$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{1}$$

pa vektori nisu kolinearni.
(ii) Tu je

$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = 2$$

pa su vektori kolinearni, a jer je omjer koeficijenata pozitivan, oni su i isto usmjereni (orijentirani).
(iii) Tu je

$$\frac{-8}{4} = \frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = -2$$

pa su vektori kolinearni, a jer je omjer koeficijenata negativan, oni su suprotno usmjereni.

Analogan kriterij vrijedi za kolinearnost vektora u n-dimenzionalnom prostoru.

Lekcije iz Matematike 1.

3. Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora.

I. Naslov i objašnjenje naslova

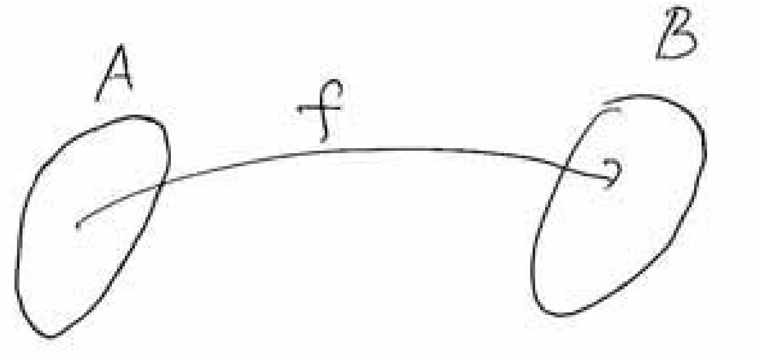
U lekciji se uvodi pojam matrice kao zapisa nekih važnih transformacija ravnine i prostora.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Osnovni elementi kompjutorske grafike svakako su translacija (pomak), rotacija (vrtnja - oko točke ili oko pravca), simetrija (zrcaljenje - s obzirom na točku, pravac ili ravninu). Ti su pojmovi takodjer vrlo važni u prirodnim znanostima (kemijske i fizikalne strukture u pravilu posjeduju svojstva simetričnosti ili invarijantnosti s obzirom na ovakve transformacije). Postavlja se pitanje kako se te i slične transformacije mogu opisati analitički - pomoću koordinata. To se matematički rješava uvodjenjem pojma **matrice**. Posebne vrste matrica - jednostupčane već smo upoznali kao analitičke zapise vektora u prostoru.

III. Potrebno predznanje

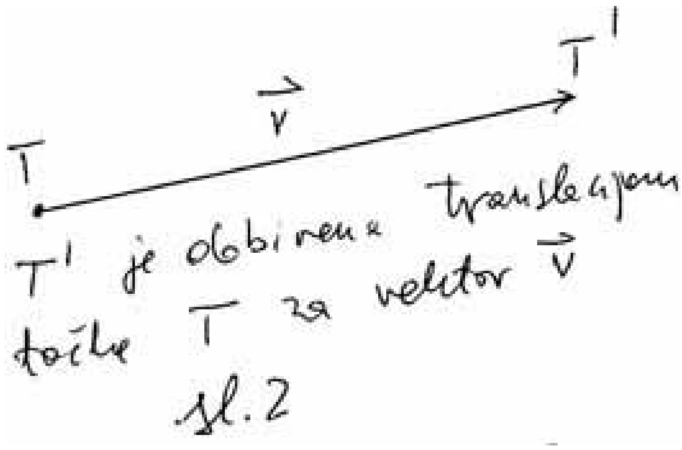
Funkcija - preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje element skupa B (sl.1).



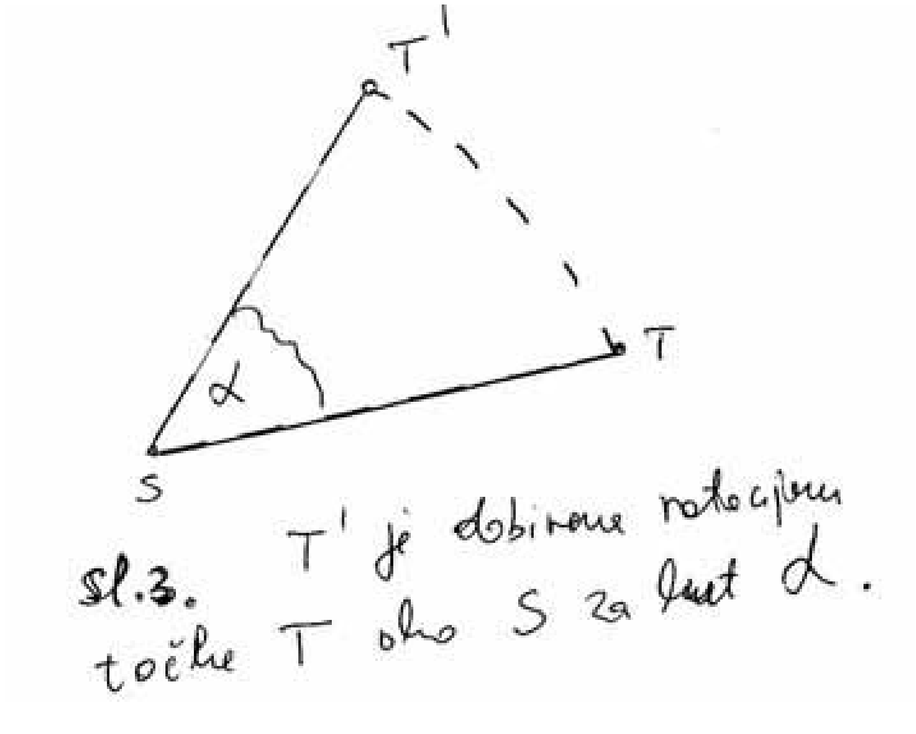
Sl.1. Funkcija sa skupa A u skup B

Zadati funkciju znači zadati to pravilo.

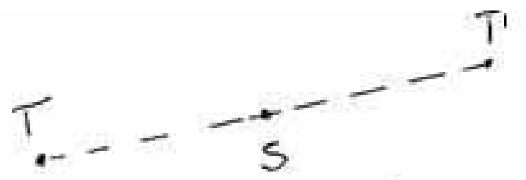
Translacija prostora ili ravnine za vektor za vektor $\overrightarrow{v}$ je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor $\overrightarrow{v}$ (sl.2).



Rotacija ravnine oko točke S **za kut** α je preslikavanje ravnine predočeno slikom (sl.3).

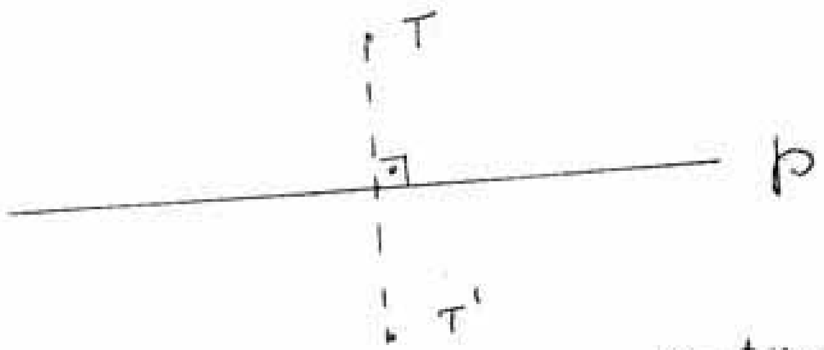


Centralna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na centar simetrije (sl.4).



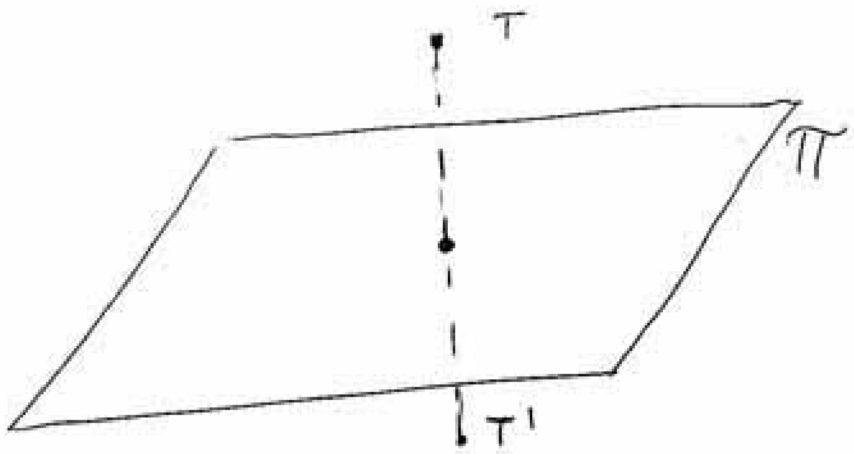
sl.4. T' je dobivena centralnom simetrijom točke T s obzirom na S. T i T' su centralno-simetrične

Simetrija prostora ili ravnine s obzirom na pravac - os simetrije (sl.5).



sl.5. T' je dobivena simetrijom točke T s obzirom na pravac p. T i T' su osnosimetrične

Simetrija prostora s obzirom na ravninu (sl.6).



Sl. 6. T' je dobivena simetrijom točke T s obzirom na ravninu Π.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Analitički zapis nekih transformacija ravnine i prostora.

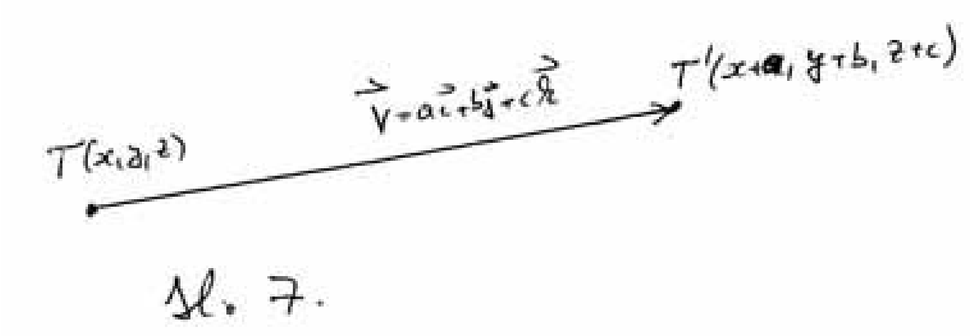
Translacija prostora ili ravnine za vektor za vektor $\overrightarrow{v}$ je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor $\overrightarrow{v}$.
Uvedimo ove oznake.
$T(x, y, z)$ - opća točka prostora,
$T'(x', y', z')$ - točka dobivena translacijom točke T za vektor $a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$.
Tada je: $x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c$ (sl.7),

što se može zapisati kao:

$$(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$$

odnosno kao

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{bmatrix}$$

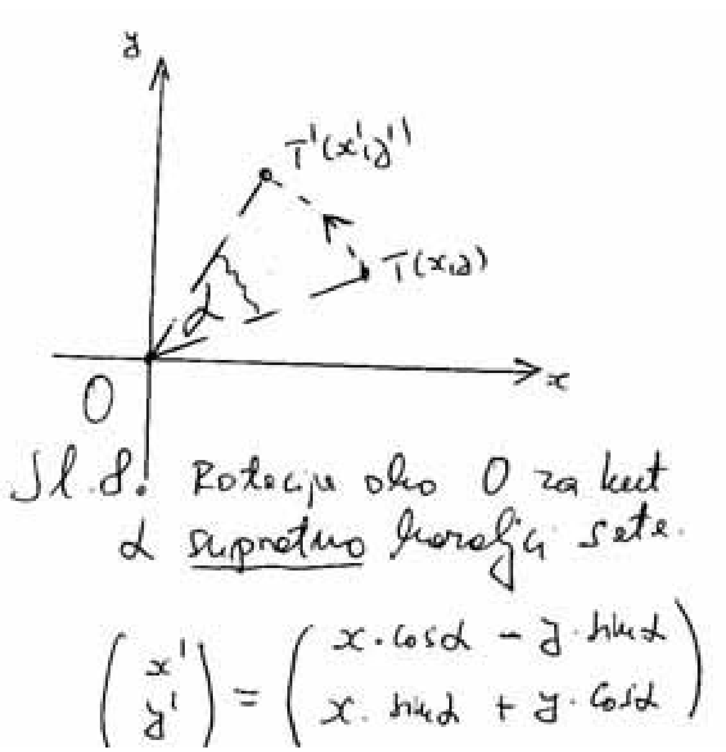


Vidimo da se translacija ostvaruje zbrajanjem dviju jednostupčanih matrica.

Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α suprotno od kazaljke na satu.
Uvedimo ove oznake.
$T(x, y)$ - opća točka ravnine,
$T'(x', y')$ - točka dobivena rotacijom točke T za kut α oko ishodišta.
Koristeći formulu za množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom prikazu, dobijemo:

$$x' + iy' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) = (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + i(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)$$

a odavde: $x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y,\ y' = \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y$ (sl.8).



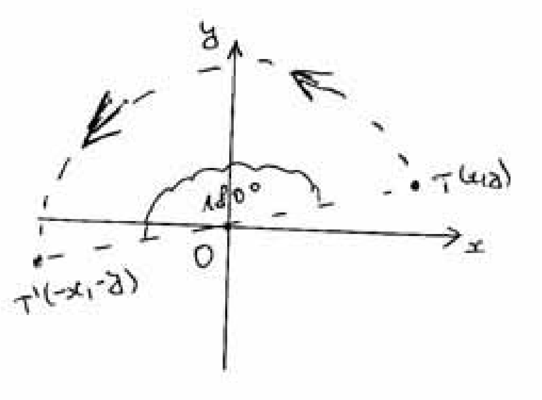
Uočimo da se gornji postupak mogao zapisati i ovako:

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{bmatrix}$$

Primjer 1.

1. Rotacija za 180°. Unaprijed znamo da je $x' = -x,\ y' = -y$ (sl.9); provjerimo da se formulom dobije isto:

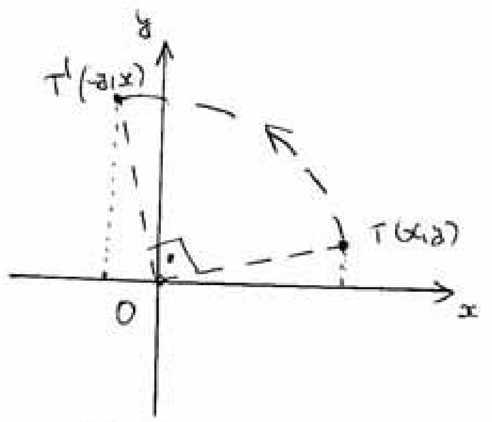
$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot x - 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-x} \\ \text{-y} \end{bmatrix}$$



sl. 9.

2. Rotacija za 90° (iz (sl.10) vidimo da bi moglo biti $x' = -y,\ y' = x$; provjerimo to formulom):

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-y} \\ \text{x} \end{bmatrix}$$

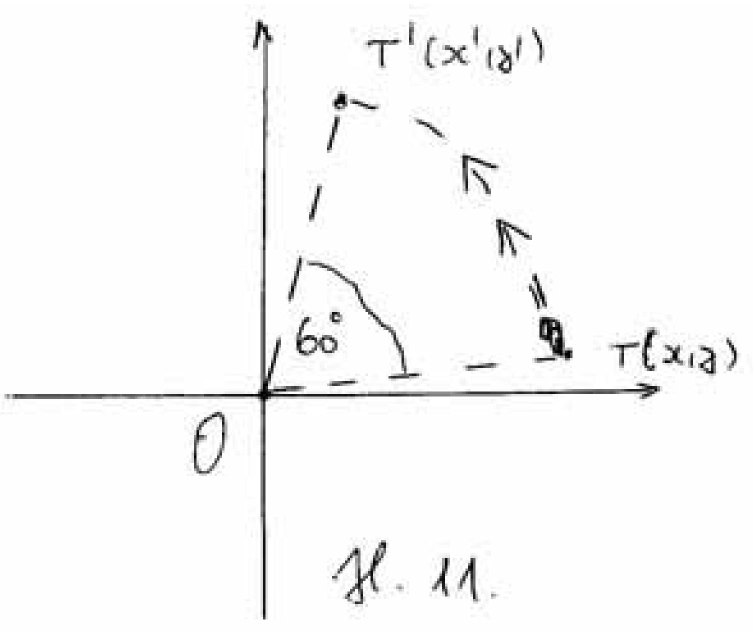


sl. 10.

3. Rotacija za 60° (sl.11)

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y \end{bmatrix}$$

Točnost možemo provjeriti približno, mjerenjem.



Kvadratna matrica

Vidimo da se rotacija ostvaruje "množenjem" jedne kvadratne 2×2 matrice (koja ovisi o kutu rotacije) i jedne jednostupčane matrice (uvijek je to matrica $\begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix}$. Zato uvodimo općenito pojam kvadratne $n \times n$ matrice (kvadratne matrice n-tog reda) - to je n^2 brojeva smještenih u kvadratnu shemu s n redaka i n stupaca. Takodjer uvodimo pojam **množenja** matrice n-tog reda s jednostupčanom matricom od n elemenata, tako da elemente svakog retka množimo s odgovarajućim elementima stupca i da rezultat zbrojimo.

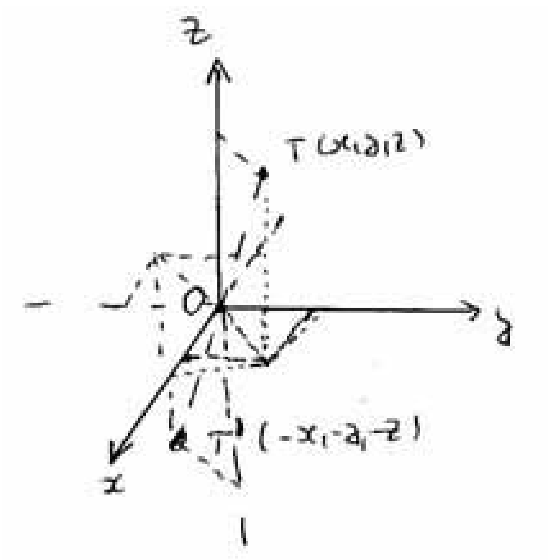
Primjer 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & \text{-1} \end{bmatrix}$$

je kvadratna 3×3 matrica (kvadratna matrica 3-eg reda; ima 3 redka i 3 stupca, sve skupa 9 elemenata). Njenim množenjem s jednostupčanom matricom $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dobije se jednostupčana matrica C prema pravilu:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & \text{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Centralna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na ishodište
Vidimo da je $x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$ (sl.12).



Sl. 12.

Uočimo da se i ta transformacija može zadati pomoću matrica:

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \\ \text{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Simetrija ravnine s obzirom na koordinatne osi i os $y = x$
Iz (sl.13) vidimo da je:
(i) simetrija s obzirom na x-os

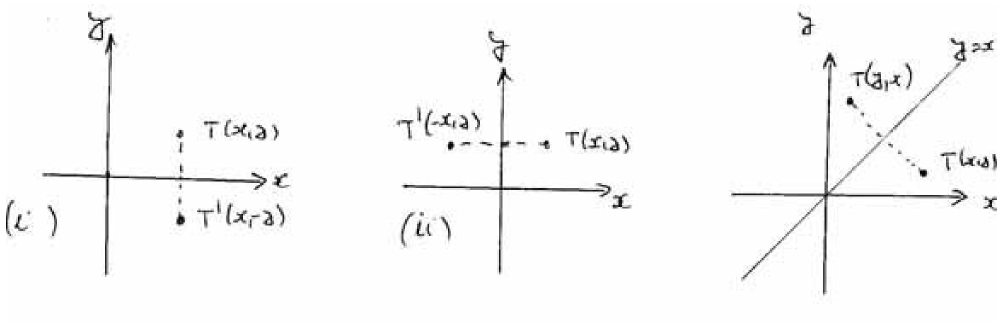
$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

(ii) simetrija s obzirom na y-os

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

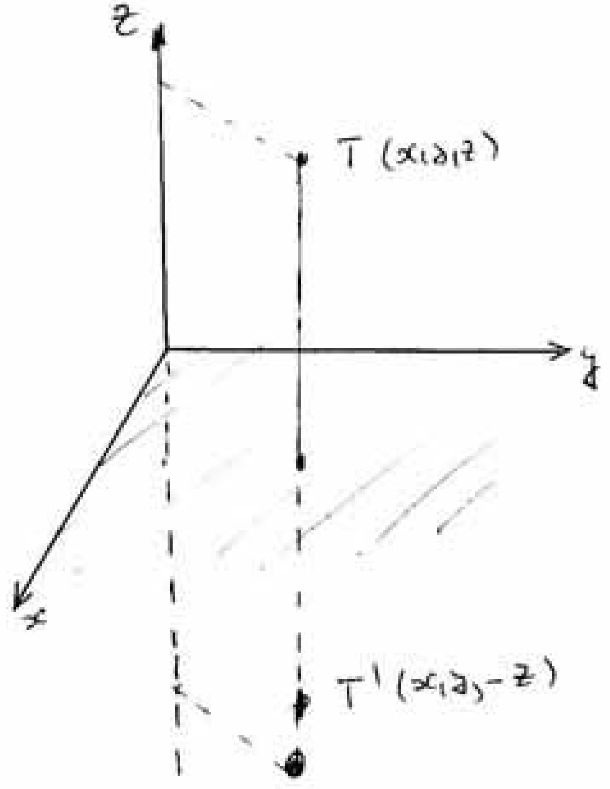
(iii) simetrija s obzirom na pravac $y = x$.

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Sl. 13.

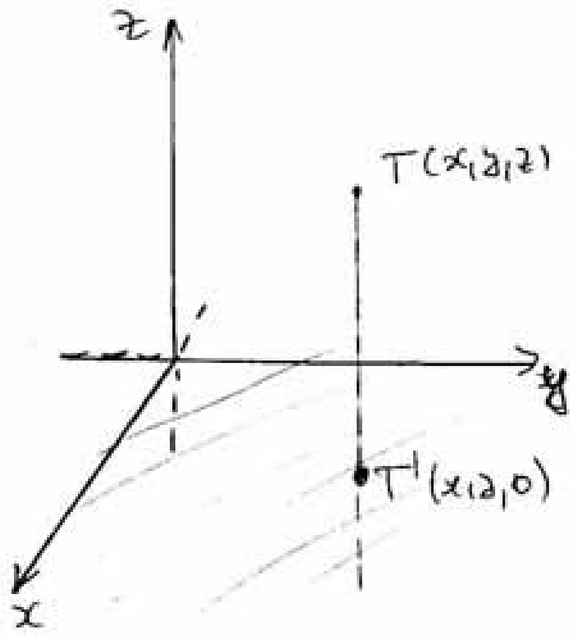
Simetrija prostora s obzirom na xy **ravninu** (sl.14).



Sl. 14

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \\ \text{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

Projekcija prostora s na xy ravninu (sl.15).

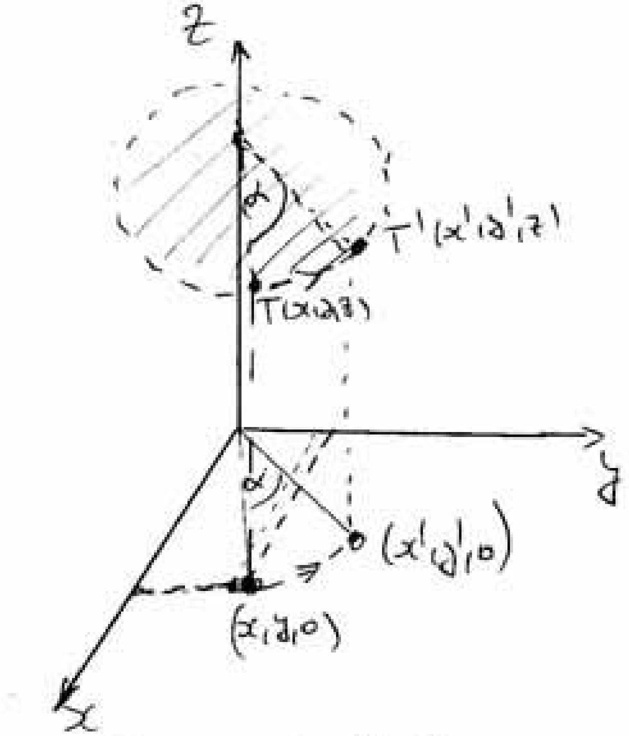


Sl. 15. Projekcija na x-y ravninu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rotacija u prostoru oko z-osi za kut α (sl.16).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \\ z \end{bmatrix}$$



Sl. 16. Rotacija u prostoru oko osi z

Pojam matrice i linearnog operatora

Već smo rekli da je (kvadratna) matrica n-tog reda sastavljena od n^2 brojeva postavljenih u n redaka i n stupaca. Vidjeli smo da se svaka takva matrica može shvatiti kao transformacija n-dimenzionalnog prostora (to smo posebno razmatrali za $n = 2$ i $n = 3$).

Matrica tipa $m \times n$ je pravokutna shema od m redaka i n stupaca. Na primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je matrica tipa 2×3. Tu matricu možemo shvatiti kao preslikavanje A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni prostor formulom:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x - y \end{bmatrix}$$

Preslikavanja s vektorskih prostora u vektorske prostore koji se mogu zapisati pomoću matrica zovu se **linearni operatori**. Naziv dolazi odatle što se u njihovim izrazima pojavljuju samo linearni izrazi.

Očita svojstva linearnih operatora.
Neka je A linearnim operator. Tada je:
1. $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{0}$ nul-vektor, odnosno ishodište koordinatnog sustava (jer je to isto kao i množenje s nulom)
2. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ za svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (vidi se izravno iz definicije, a takodjer to je svojstvo distributivnosti množenja i zbrajanja).
3. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$ za svaki broj λ i svaki vektor $\mathbf{x}$.

Ta tri svojstva odredjuju linearne operatore, tj. oni se obično uzimaju kao definicija linearnog operatora.

Vrste matrica - i pripadajućih linearnih operatora.

U ovoj ćemo se lekciji u pravilu baviti kvadratnim matricama.

nul-matrica - kvadratna matrica kojoj svi elementi 0.
Na primjer $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nul-matrica 3-eg reda.
Pripadajući operator sve točke preslikava u ishodište (odnosno sve vektore u nul-vektor).

jedinična matrica - kvadratna matrica kojoj su na glavnoj dijagonali jedinice, a ostali su elementi 0.
Na primjer, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica 3-eg reda.
Pripadajući operator sve točke ostavlja na miru (odnosno sve vektore).

dijagonalna matrica - kvadratna matrica kojoj su izvan glavne dijagonale 0 (a na dijagonali mogu, ali ne moraju biti).
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je dijagonalna, a $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ nije.

skalarna matrica - kvadratna matrica kojoj su elementi na dijagonali medjusobno jednaki.
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ je skalarna.
Pripadajući operator je homotetija s obzirom na ishodište, tj. koordinate množi brojem (odnosno vektore).

simetrična matrica - kvadratna matrica koja je jednaka svojoj **transponiranoj** matrici (tj. matrici koja se iz nje dobije zamjenom redaka i stupaca).
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je simetrična (ne mijenja se zamjenom

redaka i stupaca), dok matrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ nije. Naime, zamjenom redaka i stupaca, dobije se njena transponirana matrica $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i vidimo da je $B^t \neq B$.
Poslije ćemo vidjeti kakvo je pripadajuće preslikavanje.

gornja trokutasta matrica - kvadratna matrica kojoj su ispod glavne dijagonale same nule (analogno za **donju trokutastu matricu**)
Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je gornja trokutasta, a matrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je donja trokutasta.

V. Pitanja i zadaci

1. Zapišite pomoću koordinata i matrica simetriju u ravnini s obzirom na pravac s jednadžbom $y = -x$ (simetrala II i IV kvadranta).

Rj. Pomoću koordinata: $A(x, y) = (y, -x)$.
Pomoću matrica. **Matrica preslikavanja:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrični zapis:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

2. Zapišite preslikavanje ravnine kojemu je matrica preslikavanja matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

iz Primjera 2.

Rj. $A(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + 4z, 3x + 2y - z)$
ili u matričnom zapisu:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + 4z \\ 3x + 2y - z \end{bmatrix}$$

3. Napišite matrice sljedećih preslikavanja:
(i) simetrija s obzirom na yz ravninu.
(ii) projekcija na xz ravninu
(iii) rotacija oko x osi za kut α.

Rj. (i)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

4. Napišite matricu simetrije po ravnini koju razapinju z-os i simetrala $x-y$ ravnine $y = x$.

Rj.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Kakva matrica nastaje transponiranjem jednostupčane, a kakva transponiranjem jednoredčane matrice?
6. Kakva matrica nastaje transponiranjem gornje trokutaste matrice.
7. (i) Je li svaka dijagonalna matrica simetrična? (ii) Je li svaka simetrična matrica dijagonalna?

Lekcije iz Matematike 1.

4. Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuju svojstva zbrajanja i množenja matrica, uvodi se pojam inverzne matrice i daju uvjeti za postojanje inverza, te se uvodi pojam determinante matrice i njena veza s inverznom matricom.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako zamislimo dvije matrice kao linearne operatore, tj. kao preslikavanja s prostora u prostor, onda se prirodno nameću sljedeća pitanja: što je sa zbrojem tih dvaju preslikavanja, a što s kompozicijom (tj. s preslikavanjem koje se dobije tako da prvo djeluje jedan od operatora, potom da na rezultat djeluje drugi). Također zanima nas postoji li za zadano linearno preslikavanje njemu inverzno preslikavanje i, ako postoji, kako se može zapisati. Ti se problemi rješavaju pojmovima zbroja i umnoška matrica i svojstvima tih operacija.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo, koje se oslanja na gradivo iz prethodne lekcije; za razumjevanje treba ponoviti svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Algebra matrica

Treba uočiti sljedeće činjenice:
zbrajanje matrica potpuno je analogno zbrajanju brojeva i svodi se nanj, jer se provodi zbrajanjem odgovarajućih elemenata; treba samo imati na umu da se zbrajaju (i oduzimaju) matrice istog reda, da je analogon broja 0 nul-matrica (isto oznaka 0), a analogon suprotnog broja **suprotna matrica** - matrica koja se dobije iz početne tako da se svakom elementu promijeni predznak.

Na primjer, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, onda je **suprotna matrica**

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, imamo ova očita svojstva zbrajanja matrica:

1. (**komutativnost**) $A + B = B + A$
2. (**asocijativnost**) (A+B)+C=A+(B+C)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$.

Množenje matrica nije analogno množenju brojeva, niti se tako jednostavno provodi. Ipak, iako je kompliciranije, ono je prirodno i do njega se analogno dolazi kao do zbrajanja: kako zbrajanje odgovara zbrajanju pripadnih linearnih operatora, tako umnožak matrica odgovara njihovoj **kompoziciji (uzastopnom djelovanju)**.
Vec smo vidjeli kako se matrica množi s jednostupčanom matricom; ponavljajući taj postupak sa svakim stupcem druge matrice, dobijemo produkt matrica.

Primjer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

odakle vidimo da je, općenito

$$AB \neq BA$$

(množenje matrica, za razliku od množenja brojeva, nije komutativno). To znači da kompozicija linearnih operatora nije komutativna.

Neutralni element za množenje Ono što je broj 1 za množenje brojeva, to je jedinična matrica I za množenje kvadratnih matrica. To znači da je

$$AI = IA = A$$

za svaku kvadratnu matricu A (istog reda kao i I). Provjerite!

Množenje matrice brojem Matricu množimo brojem tako da joj svaki element pomnožimo tim brojem. Na primjer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ onda je } 2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Uočite da brojem možemo množiti bilo koju matricu, ne samo kvadratnu. Uočite također da se skalarna matrica dobije množenjem jedinične matrice nekim brojem. Na primjer,

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Skalarne se matrice ponašaju kao i obični brojevi (na primjer, one komutiraju sa svakom matricom).

Inverzni element za množenje matrica - inverzna matrica. Svaki realni broj a različit od nule ima inverzni element s obzirom na množenje - to je recipročni element a^{-1}, tj. $\frac{1}{a}$, koji je jednoznačno određen uvjetom $a \cdot a^{-1} = 1$, također i uvjetom $a^{-1} \cdot a = 1$.
Analogno tome, inverzna matrica matrice A je matrica A^{-1} tako da bude $AA^{-1} = I$ (odnosno $A^{-1}A = I$). Uočite očite činjenice:

1. I je sama sebi inverzna jer je $I \cdot I = I$ (slično kako je $1 \cdot 1 = 1$)
2. Nul- matrica 0 nema inverzne matrice jer je $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ za svaku matricu A (istog reda), slično kako je $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, za sve realne brojeve a.

Postavlja se pitanje koje matrice imaju inverznu i kako se inverzne matrice određuju.

Primjer 2.. Odredimo inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ako postoji).
Treba naći matricu B drugog reda tako da bude $AB = I$ (mogli bismo gledati i $BA = I$). Stavimo $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$. Treba odrediti brojeve x, y, u, v.
Iz uvjeta $AB = I$, tj. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dobijemo
$2x - u = 1,\ 2y - v = 0,\ x = 0,\ y = 1$, tj. $x = 0, y = 1, u = -1, v = 2$, tj.

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lako je vidjeti da je B zaista inverzna matrica od A i, također, da bismo isti rezultat dobili da smo razmatrali uvjet $BA = I$.

Formula za inverznu matricu matrice drugog reda. Slično kako smo postupili u prethodnom primjeru, mogli bismo postupiti za svaku kvadratnu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ drugog reda. Dobili bismo

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Odavde uočavamo **pravilo za određivanje inverza matrice drugog reda**:
1. Zamijenimo elemente na glavnoj dijagonali.
2. Elementima na sporednoj dijagonali promijenimo predznake.
3. Sve podijelimo s $ad - bc$.

Uvjet za postojanje inverza: $ad - bc \neq 0$ (s nulom se ne dijeli).
Dakle, matrice za koje je $ad - bc = 0$ nemaju inverz; taj se uvjet može zapisati kao $ad = bc$, odnosno kao $a : c = b : d$ što znači da su redci matrice proporcionalni (ujedno i stupci).

Determinanta matrice drugog reda. Vidjeli smo važnost izraza $ad - bc$ za matricu drugog reda $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Taj se izraz zove **determi-**

nanta matrice A i označava kao $\det A$, katkad i kao $|A|$, odnosno $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
Vidimo da je $\det A \neq 0$ uvjet o postojanju inverza matrice drugog reda (to vrijedi **za sve**, a **ne samo za matrice drugog reda**).

Determinanta matrice trećeg reda - može se izračunati pomoću determinante matrice drugog reda **razvojem po nekom redku ili stupcu**. Na primjer, razvojem po prvom redku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Na primjer

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2(0-8) + (-1-12) + 3(2-0) = -23$$

Slično bismo dobili nekim drugim razvojem, na primjer po drugom stupcu (koristimo se pravilom da je na presjeku i-tog redka i j-tog stupca, tj. na mjestu elementa a_{ij}, predznak $(-1)^{i+j}$ i da izbacujemo elemente tog redka i tog stupca):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-13 + 0 - 10 = -23$$

Vidimo da je ovaj postupak lakši jer moramo računati samo dvije determinante 2-gog reda. Naime, jedna se od njih množi nulom, zato, općenito treba raditi s onim stupcem, odnosno redkom, u kojemu ima najviše nula.

Determinanta matrice bilo kojeg reda - definira se tako da se razvija po nekom redku ili stupcu pa se tako svodi na determinante nižeg reda. To pokazujemo na primjeru determinante četvrtog reda (uz napomenu da je za redove veće od 3 determinantu bolje računati jednom drugom metodom koju ćemo obrađivati u šestoj lekciji).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tu smo prvo determinantu četvrtog reda razvili po 1-om redku i tako sveli na dvije determinante 3-eg reda (jer su samo dva elementa tog redka različita od nule); potom smo prvu od determinanta 3-eg reda razvili po 3-em stupcu, a drugu po 2-om retku (a mogli smo i po 3-em stupcu) i dobili rezultat.

Inverz matrice trećeg reda

Pravilo objašnjavamo na primjeru matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & \text{-1} \end{bmatrix}$.

1. korak (računanje determinante): $\det A = -23$ (znamo od prije).
2. korak (određivanje transponirane matrice od A)

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \text{-1} & 0 & 2 \\ 3 & 4 & \text{-1} \end{bmatrix}.$$

3. korak (određivanje **adjungirane matrice** $A^\star$ matrice A) - tako da u transponiranoj matrici svaki pojedini element zamijenimo determinantom drugog reda koju dobijemo brisanjem redka i stupca tog elementa, pomnoženom s ± 1 prema već rečenom pravilu.

$$A^\star = \begin{bmatrix} \text{-8} & 5 & \text{-4} \\ 13 & \text{-11} & \text{-5} \\ 2 & \text{-7} & 1 \end{bmatrix}.$$

Tu smo element -8 dobili kao $+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & \text{-1} \end{vmatrix}$, element 5 kao $-\begin{vmatrix} \text{-1} & 2 \\ 3 & \text{-1} \end{vmatrix}$ itd.

4. korak: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star$. U ovom je primjeru $A^{-1} = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} \text{-8} & 5 & \text{-4} \\ 13 & \text{-11} & \text{-5} \\ 2 & \text{-7} & 1 \end{bmatrix}$.

Zaista, lako se provjeri izravnim množenjem da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Inverz matrice bilo kojeg reda.

Pokazuje se da je $\det A \neq 0$ uvjet za postojanje inverza matrice A (bilo kojeg reda) i da vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star$$

gdje se adjungirana matrica $A^\star$ od A definira analogno kao za matrice 3-eg reda. U 6-om ćemo poglavlju opisati jednu bržu metodu za određivanje inverza matrice.

Očita svojstva množenja matrica. (ima ih malo)

1. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$
2. $AI = IA = A$
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Neočita svojstva množenja matrica

4. (**asocijativnost**) $(AB)C = A(BC)$
5. (**distributivnost**) $A(B + C) = AB + AC$

Također:

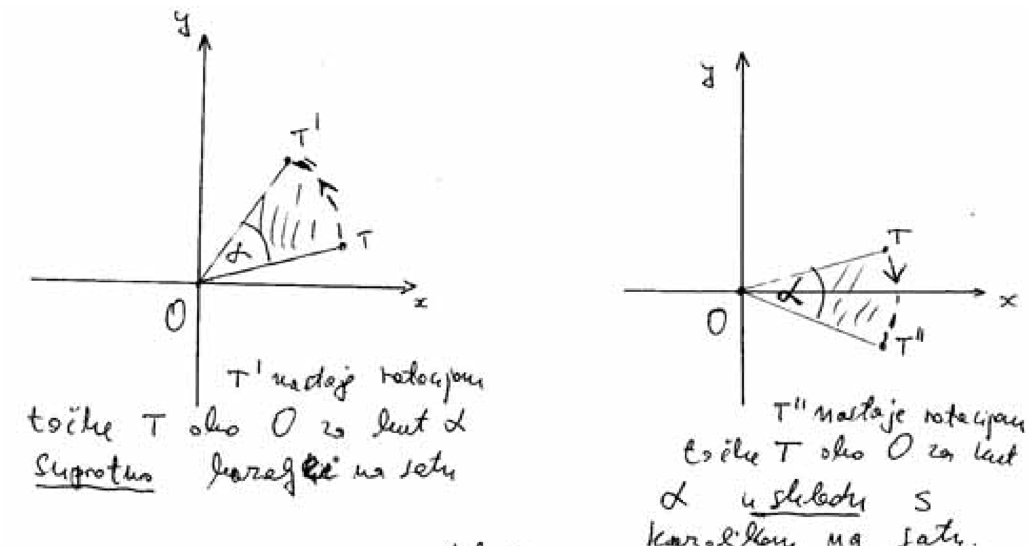
6. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7. $(AB)^t = B^tA^t$
8. $(AB)^\star = B^\star A^\star$
9. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

V. Pitanja i zadaci

Zadatak 1. Odredite inverze matrica povezanih s važnim transformacijama prostora ili ravnine:
(i) geometrijski, tj. koristeći se činjenicom da inverzna matrica odgovara inverznoj transformaciji.
(ii) analitički, tj. koristeći se formulom $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\star}$.

1. **Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α suprotno kazaljci na satu**.

Geometrijski pristup: Inverz rotacije za kut α suprotno kazaljci na satu, jest rotacija za kut α u skladu s kazaljkom na satu, a to je upravo rotacija za kut $-\alpha$ suprotno kazaljci na satu (sl.1).



Sl. 1.

Dakle, ako je
$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, onda je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Uočite da smo mogli razmišljati i ovako: inverz rotacije za kut α je rotacija za kut $360^\circ - \alpha$ (sve suprotno od kazaljke na satu).

Analitički pristup. Formulom za inverz matrice drugog reda dobije se isti rezultat. Naime, tu je, $\det A = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha) \cdot \sin\alpha = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

Centralna simetrija prostora s obzirom na ishodište

Geometrijski pristup. Očito je da je centralna simetrija sama sebi inverzna, pa je tu $A^{-1} = A$. To se lako provjeri i analitički jer je tu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Simetrija ravnine s obzirom na koordinatne osi i os $y = x$
Tu je, kao i prije $A^{-1} = A$.

Simetrija prostora s obzirom na xy ravninu
Opet $A^{-1} = A$. Svaka je simetrija sama sebi inverzna.

Projekcija prostora na xy ravninu
Geometrijski pristup. Ako znademo projekciju neke točke na ravninu, tada ne možemo sa sigurnošću rekonstruirati tu točku (jer beskonačno mnogo točaka - čitav pravac - ima istu projekciju). To znači da projekcija nema inverznu transformaciju. Zato matrica nema inverz.
Analitički pristup. Tu je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa je očito $\det A = 0$ (razvoj po trećem redku ili stupcu), pa A^{-1} ne postoji.

Rotacija u prostoru oko z-osi za kut α Tu je
$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
pa, kao i za rotaciju u ravnini, geometrijskim argumentom dobijemo
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
što se lako provjeri i analitički.

Lekcije iz Matematike 1.

5. Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuju skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora i njihova veza s kutom medju vektorima, površinom paralelograma koje razapinju dva vektora i obujmom paralelepipeda kojeg razapinju tri vektora.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

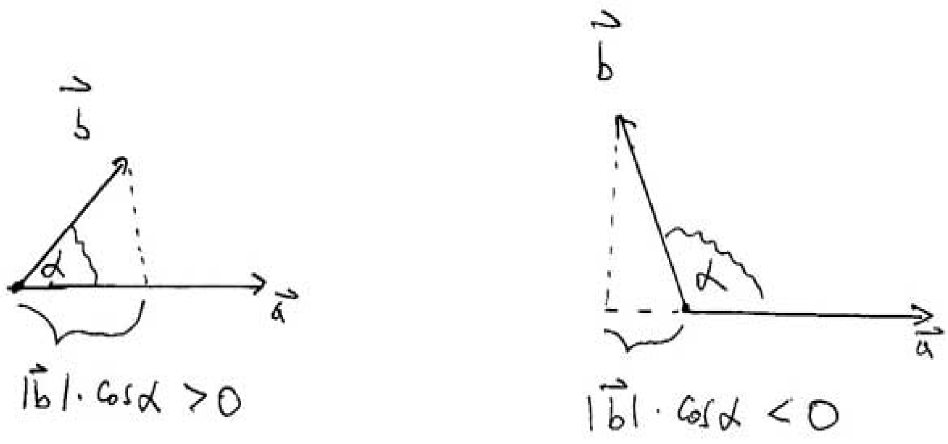
Vidjeli smo da rezultanta djelovanja dviju sila ne ovisi samo o njihovim veličinama već i o kutu pod kojim one djeluju. Problem odredjivanja tog kuta matematički se rješava pomoću skalarnog produkta.
Pokus pokazuje da na električnu česticu koja se giba u nekom magnetskom polju, u svakoj točki djeluje inducirana sila koja je okomita i na smjer brzine čestice u toj točki i na smjer sile magnetskog polja, a po veličini je proporcionalna veličini sile magnetskog polja, veličini brzine čestice i naboju čestice. Ako se fizikalne jedinice usklade, onda je koeficijent proporcionalnosti sinus kuta izmedju vektora brzine i sile magnetskog polja (dakle sila je najveća ako je brzina okomita ma magnetsko polje, a iščezava ako brzina i magnetsko polje imaju isti smjer) .
To se matematički rješava pojmom vektorskog produkta vektora.
Pomoću vektorskog produkta lako se računa površina pararlelograma što ga razapinju dva vektora, a pomoću mješovitog obujam paralelepipeda što ga razapinju tri vektora.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo; za razumijevanje je potrebno ponoviti pojam vektora i kuta medju vektorima i pojam determinante.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Skalarni produkt vektora. Ova je tema blisko povezana s pojmom kuta medju vektorima i s pojmom **projekcije** vektora na vektor. Pogledajmo dva primjera vektora i kuta medju njima (sl.1).



Sl. 1.

Vidimo da se izraz $|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\alpha$ prirodno javlja pri projekciji vrha vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$. Točnije taj izraz mjeri duljinu projekcije vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$ skupa s predznakom (koji je pozitivan ako je kut šiljast, tj. ako projekcija ima isto usmjerenje kao i $\overrightarrow{a}$, a negativan ako je kut tup, tj. ako projekcija ima suprotno usmjerenje). Ako taj izraz pomnožimo s $|\overrightarrow{a}|$ dobijemo **skalarni produkt (umnožak)** $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ vektora $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$. Dakle

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} := |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cdot\cos\alpha$$

Očita svojstva skalarnog produkta.

1. (**komutativnost**) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

2. $(\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a})\cdot(\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$.

3. $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k} = 1$ (jer je $\cos 0^\circ = 1$)

$\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{i} = 0$ (jer je $\cos 90^\circ = 0$)

Neočito svojstvo skalarnog produkta - distributivnost

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$

(dogovor je da je operacija skalarnog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje, pa pri zapisu desne strane jednakosti ne trebaju zagrade).

Formula za skalarni produkt u koordinatnom sustavu - analitički pristup. Koristeći se očitim svojstvima i distributivnošću, dobijemo:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3c_3$$

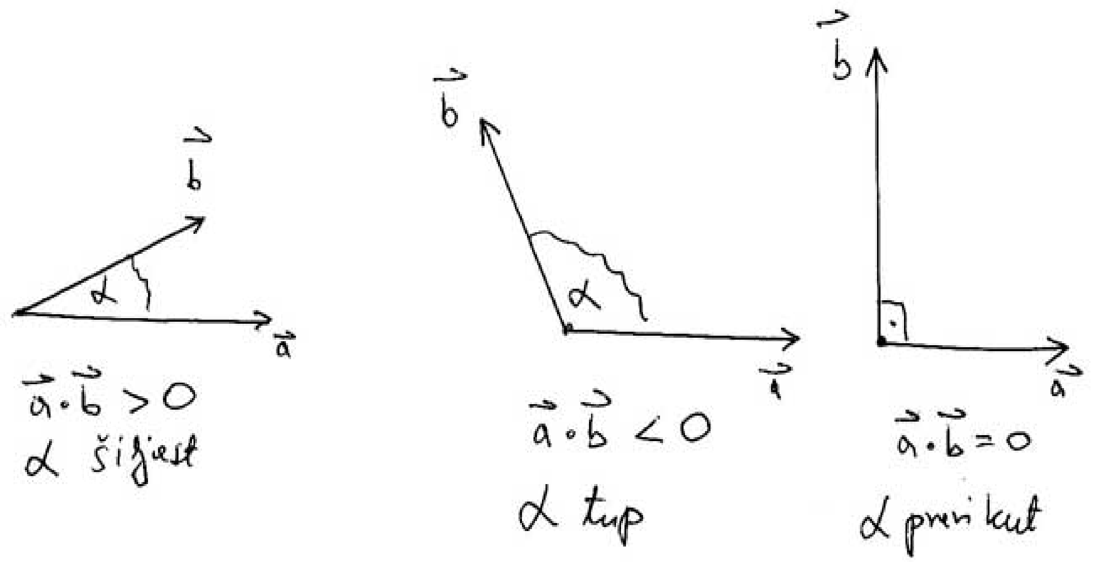
gdje je $\overrightarrow{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{i} + a_2 \cdot \overrightarrow{j} + a_3 \cdot \overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = b_1 \cdot \overrightarrow{i} + b_2 \cdot \overrightarrow{j} + b_3 \cdot \overrightarrow{k}$.

Primjer 1:
(i) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 7$
Tu je skalarni produkt pozitivan, to znači da je kut medju vektorima šiljast.

(ii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 0$
Tu je skalarni produkt jednak nuli, to znači da su vektori okomit.

(iii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -3$
Tu je skalarni produkt negativan, to znači da je kut medju vektorima tup.

Vrijedi općenito:
Kut medju vektorima je šiljast ako i samo ako je skalarni produkt > 0.
Kut medju vektorima je tup ako i samo ako je skalarni produkt < 0.
Vektori su okomiti ako i samo ako je skalarni produkt $= 0$ (to je **uvjet okomitosti** dvaju vektora (sl.2).



Sl. 2.

Na primjer, različiti jedinični vektori medjusobno su okomiti, i zaista vrijedi

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$$

Skalarni produkt vektora sa sobom - duljina vektora. Ako je $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$ onda je

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} := a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c = a^2 + b^2 + c^2 = |\overrightarrow{v}|^2$$

Dakle

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Kut medju vektorima. Pomoću skalarnog produkta možemo lako odrediti kut medju vektorima (a ne samo provjeriti je li taj kut šiljast, tup ili pravi). Naime, vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

gdje je α mjera kuta medju vektorima (to je samo malo drukčije napisana formula za skalarni produkt).

Primjer 2. Za vektore iz Primjera 1. vrijedi:
(i) $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \frac{7}{29}$ pa je, približno $\alpha = 76^\circ 1' 55''$.

(ii) Tu je $\cos\alpha = 0$ pa je $\alpha = 90^\circ$ kako smo i prije rekli.

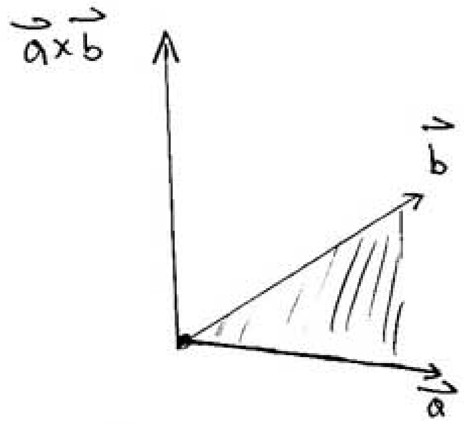
(iii) Tu je $\cos\alpha = -\frac{3}{29}$ pa je, približno, $\alpha =$.

Vektorski produkt (umnožak) vektora. Oslanjajući se na fizikalnu predodžbu o sili koja se javlja pri gibanju električne čestice kroz magnetsko polje, dolazimo do sljedeće **geometrijske definicije** vektorskog produkta dvaju vektora.

Vektorski produkt vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jest vektor

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

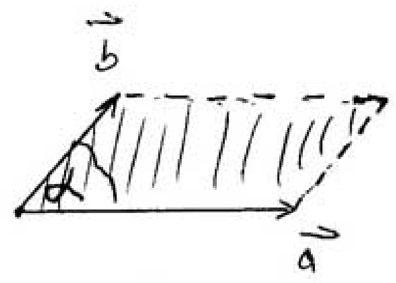
zadan smjerom, duljinom i orijentacijom ovako (sl.3):



sl. 3.

(**smjer**) $\overrightarrow{c}$ je okomit i na $\overrightarrow{a}$ i na $\overrightarrow{b}$

(**duljina - površina paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$**) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\alpha$ gdje je α kut medju vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (sl.4).



$P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

Sl. 4

(**orijentacija - pravilo desne ruke**) Gledajući s vrha vektora $\overrightarrow{c}$, gibanje od vektora $\overrightarrow{a}$ prema vektoru $\overrightarrow{b}$ kroz kut α odvija se suprotno kazaljci na satu (drugim riječima vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ čine konfiguraciju poput $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$).

Uvjet na duljinu pišemo kao:

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\alpha$$

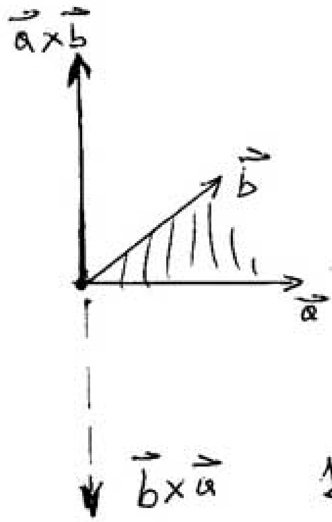
Iz te formule dobije se važan kriterij kolinearnosti vektora:

Vektori su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski umnožak nula.

Naime, kažemo dva su dva vektora kolinearna ako imaju isti smjer, tj. ako se jedan od njih može dobiti iz drugoga množenjem sa skalarom; to znači da je kut medju njima od $0°$ (ista orijentacija) ili od $180°$ (suprotna orijentacija), ili ako je neki od njih nul-vektor (tada se kut ne definira, ali, prema dogovoru uzimamo da je vektorski umnožak nula).

Očita svojstva vektorskog produkta.

1. (**Antikomutativnost**): $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (iz orijentacije) (sl.5)



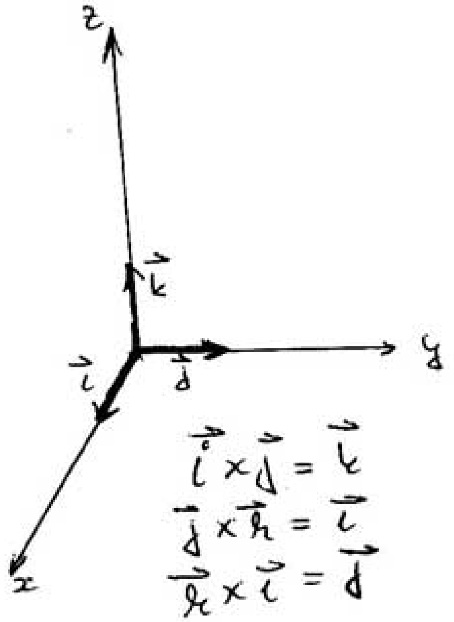
sl.5.

2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (jer je tu nul-kut; to takodjer izlati iz 1. ako stavimo $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$).

3. $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}(\lambda \times \overrightarrow{b})$

4.
$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

(sl.6.)



Sl. 6.

Neočito svojstvo vektorskog umnoška

5. **Distributivnost na zbrajanje:** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (dogovor je da je operacija vektorskog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje pa ne trebaju zagrade).

Formula za vektorski produkt u koordinatnom sustavu - analitička formula.

Koristeći se gornjim očitim svojstvima i distributivnošću, dobijemo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\,\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{k}$$

Primjer 3. Odredimo vektorski umnožak vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i površinu paralelograma što ga oni razapinju.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17\,\vec{i} + 18\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + 18^2 + (-5)^2} = \sqrt{636}$$

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - to je **broj** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Računanje mješovitog produkta u koordinatnom sustavu - analitička formula

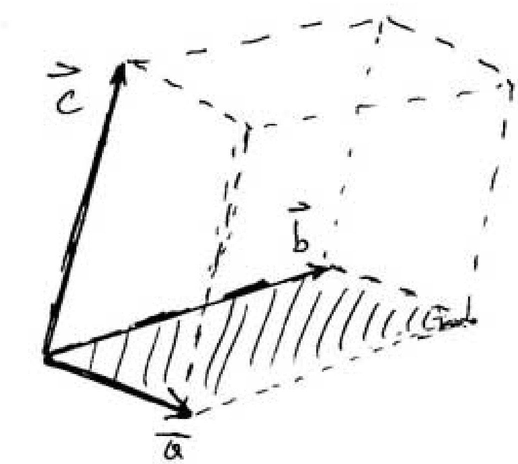
$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Primjer 4. Odredimo mješoviti produkt vektora $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -62$$

Geometrijsko značenje mješovitog produkta

Uočimo paralelepiped razapet vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, tj. kosu prizmu kojoj je baza paralelogram razapet vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, a treći joj je brid odredjen vektorom $\overrightarrow{c}$ (sl.7).



Sl. 7.

Tada je

$$V = |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}|$$

tj. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \pm V$ (predznak je + ili − ovisno o tome čine li vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (u tom redoslijedu) desni sustav ili ne, tj. čine li oni konfiguraciju poput $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ ili ne (pravilo desne ruke).
Na primjer vektori iz Primjera 4. razapinju paralelogram obujma 62 (broj −62 koji je jednak mješovitom produktu neki zovu **orijentirani obujam**).

Očito svojstvo mješovitog produkta. Ako u izrazu $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$ dva vektora zamijene mjesta, izraz ostaje isti ili samo promijeni predznak (to je zato što se obujam ne mijenja, jer uvijek ostaje isti paralelepiped). Još preciznije, vrijedi:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

dok se za tri preostale kombinacije predznak mijenja.

V. Pitanja i zadaci

Lekcije iz Matematike 1.

6. Linearni sustavi i njihovo rješavanje

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuje linearni sustav, njegov matrični zapis i rješavanje pomoću inverzne matrice (ako je to moguće), Kramerovim pravilom te Gauss-Jordanovom metodom. Takodjer se obradjuje brz algoritam za odredjivanje determinante i inverzne matrice.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Mnogi se praktični i teoretski problemi svode na linearne sustave. Naime veličine koje se razmatraju, u pravilu nisu nezavisne, već su povezane odredjenim jednadžbama. Najjednostavnija, ali vrlo česta situacija jest ona kad su te jednadžbe linearne. Tada svaka bitno nova jednadžba smanjuje stupanj slobode za 1. Ako veza (broj jednadžba) ima koliko i veličina (nepoznanica), onda se, u praksi, u pravilu dobiva jedinstveno rješenje (stupanj slobode nula), koje se, potom, interpretira kao jedinstveno rješenje problema.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati sustav dviju linearnih jednadžba s dvjema nepoznanicama, pojam rješenja i metode njihova rješavanja (gradivo iz osnovne i srednje škole), te osnovna svojstva matrica i determinanta.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam linearnog sustava. Linearni sustav od m jednadžba s n nepoznanica je sustav oblika:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
.
.
.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

Brojevi $a_{ij}, i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$ i $b_1, b_2, ..., b_m$ zovu se **koeficijenti**, a $x_1, x_2, ..., x_n$ **nepoznanice**.

Na primjer, za $m = 2$ i $n = 3$ dobije se sustav od dviju jednadžba s trima nepoznanicama:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

Konkretno
Primjer 1.
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Ako je $m = n$ (tj. ako ima jednako jednadžba kao i nepoznanica), sustav zovemo **kvadratnim** n**-tog reda**:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
.
.
.
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$

Na primjer
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$
je zapis općeg sustava trećeg reda. Konkretno:

Primjer 2.
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Rješenje linearnog sustava s n nepoznanica - to je svaka uredjena n-torka $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ koja, ako se uvrsti umjesto nepoznanica $(x_1, x_2, ..., x_n)$, zadovoljava sve jednadžbe sustava. Na primjer, trojka $(2, 1, 1)$ rješenje je sustava iz Primjera 1. jer je:
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5$ i
$3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7$.
Medjutim, i trojka $(1, -1, 0)$ je rješenje tog sustava jer je
$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = 5$ i
$3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 7$.
(taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja).
Da je trojka $(2, 1, 1)$ rješenje sustava pišemo kao $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$ ili kao $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

Lako se vidi da je $(2, 1, 1)$ jedino (jedinstveno) rješenje sustava iz Primjera 2. Općenito, mogu nastati tri mogućnosti:
1. sustav ima jedinstveno rješenje.
2. sustav ima beskonačno mnogo rješenja
3. sustav nema rješenja.

Matrični zapis sustava. Ako se koeficijenti uz nepoznanice postave u **matricu sustava**, tj. u matricu s m redaka i n stupaca ($m \times n$ matricu)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a slobodni koeficijenti $b_1, b_2, ..., b_m$ i nepoznanice u jednostupčane matrice

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix} \text{ odnosno } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

sustav se kratko može zapisati u matričnom obliku kao

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Na primjer, sustav iz Primjera 2. može se zapisati kao

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Regularni sustav i njegovo rješavanje. Kvadratni linearni sustav zove se **regularnim** ako mu je matrica sustava regularna, tj. ako ima inverznu matricu (determinanta različita od nule). Takav sustav ima jedinstveno rješenje koje se može dobiti prema shemi:

Sustav: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Rješenje: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Uočite analogiju s linearnom jednadžbom
$ax = b$ i njenim rješenjem $x = a^{-1}b$, tj. $x = \frac{b}{a}$,
samo što je kod nje uvjet $a \neq 0$ (da bismo mogli dijeliti s a), a u linearnom sustavu $\det A \neq 0$ (da bi postojala inverzna matrica matrice A).

Primjer 3. U primjeru 2, matrica sustava je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. Dobije se $\det A = 4$ i $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$
sustav je regularan i rješenje mu je (prema formuli $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, kako smo i prije dobili.

Rješavanje regularnog sustava Kramerovim pravilom. Regularni sustav može se riješiti i tzv. Kramerovim pravilom (koje je samo raspisana varijanta metode pomoću inverzne matrice). Kako se to pravilo, iako vrijedi općenito, koristi ponajviše za rješavanje sustava 2-gog i 3-eg reda (jer je za sustave većeg reda zamorno), objasnit ćemo ga na konkretnom, već vidjenom primjeru sustava 3-g reda.

Primjer 4. Riješimo Kramerovim pravilom sustav
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Već smo vidjeli da je determinanta sustava $D = 4$.
Treba još izračunati determinante D_1, D_2, D_3 tako da u determinanti sustava redom zamjenjujemo prvi, drugi, odnosno treći stupac sa stupcem slobodnih koeficijenata.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 4$$

Sad je, prema Kramerovu pravilu:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{4} = 2$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{4} = 1$$

kako smo i prije dobili.

Gauss-Jordanova metoda - to je u biti metoda suprotnih koeficijenata (koja se obradjuje već u osnovnoj školi), samo što se ne pišu jednadžbe već se vrše tzv. **elementarne operacije - transformacije** na koeficijentima sustava, odnosno redcima. Metodu ćemo objasniti na već rješavanom primjeru (napomenimo da je ova metoda pogodna **za sve**, a **ne samo za kvadratne**

sustave).

Primjer 5. Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \text{ napisali smo sve koeficijente, slobodne odvojili}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \text{ prvu jedn. množili smo s } -2 \text{ i dodali drugoj}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ prvu jedn. množili smo s } -3 \text{ i dodali trećoj}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ od druge smo oduzeli treću}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo podijelili s 2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo podijelili s 2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ treću smo podijelili s 2}$$

Do ovog mjesta postupak se obično zove Gaussova metoda; prepoznajemo ga po tome što smo u prvom dijelu matrice došli do gornje trokutaste matrice s jedinicama na dijagonali; njome smo početni sustav sveli na
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 1$
tj. $x_2 = x_3 = 1$ i $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, odakle dobijemo $x_1 = 2$, kako smo i prije imali. Taj nastavak rješavanja katkad je zgodno zapisivati kao i u Gaussovu

postupku, samo što sad idemo od najdonjeg reda prema gore i to se zove Jordanova metoda, a sve skupa Gauss-Jordanova. Pokažimo taj nastavak na ovom primjeru (startamo tamo gdje smo stali):

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right] \sim \text{ od prve smo oduzeli treću}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{array}\right] \text{ od prve smo oduzeli drugu}$$

Sad izravno čitamo $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Primjer 6. Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$
$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

Da bismo na početku imali 1 (što je pogodno), treću jednadžbu stavimo na prvo mjesto. Vidimo da smo dobili sustav koji se samo za jedan predznak razlikuje od prethodnog. Vidjet ćemo da taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Postupak ćemo ubrzati tako da ćemo, kad to bude zgodno, obaviti više elementarnih operacija

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -3 & 4 & | & 5 \\ 3 & -4 & 5 & | & 7 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \end{array}\right] \sim \text{ od druge smo oduzeli 2 prve, a od treće 3 prve;}$$

Dobili smo istu drugu i treću jednadžbu, tako da treću možemo odbaciti, pa od sad imamo samo dva redka

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo množili s } -1$$
$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo dodali prvoj}$$

Sad stajemo jer smo došli do jedinične 2×2 matrice na lijevom dijelu i očitavamo skup rješenja ovako (u ovisnosti o x_3):
$x_1 = 1 + x_3$
$x_2 = -1 + 2x_3$.
x_3 možemo birati po volji. Na primjer
Za $x_3 = 0$ dobijemo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,
Za $x_3 = 1$ dobijemo $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,
Za $x_3 = \frac{1}{2}$ dobijemo $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, itd.
Uočite da smo tako riješili i sustav iz Primjera 1. U ovom slučaju (kad jednu nepoznanicu biramo po volji) kažemo da je skup rješenja jednodimenzionalan.

Algoritam za računanje determinante Pomoću elementarnih operacija na redcima može se odrediti determinanta; ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s razvojem po stupcu ili redku. Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što se pri dijeljenju nekog retka brojem, taj broj treba izlučiti i što se pri zamjeni mjesta dvaju redaka, mijenja predznak.

Primjer 7. Odredimo determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$
Već smo vidjeli da je $\det A = 4$. Sad ćemo to dobiti ovom metodom.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$$

Metoda za odredjivanje inverza matrice. Pomoću elementarnih operacija na redcima može se odrediti inverz matrice; ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s adjungiranom matricom. Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što nema zamjene redaka.
Opis metode. Do matrice dodamo jediničnu matricu i vršimo elementarne operacije na redcima dok se jedinična matrica ne pojavi na lijevoj strani. Tada je inverz matrice na desnoj.

Primjer 8. Odredimo inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Inverz smo već računali; sad ćemo to obaviti ovom metodom. Postupak ćemo ponegdje ubrzati.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \sim$$
od prvog smo oduzeli i drugi i treći redak.

Sad stajemo jer smo na lijevoj strani dobili jediničnu matricu; inverznu matricu očitavamo na desnoj strani. Vidimo da je, kao i prije:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

V. Pitanja i zadaci

1. Sustav zapišite matrično:
$x_1 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 = 3$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$
Je li sustav regularan?

Uputa. Sustav je regularan jer je determinanta matrice sustava -14 što je različito od nule.

2. (i) Kojim se obradjivanim metodama može rješavati sustav
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 9$?
(ii) Koliko sustav ima rješenja.

Uputa. (i) Samo Gauss-Jordanovom metodom (jer sustav nije regularan - determinante matrice sustava je nula).
(ii) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja (skup rješenja je jednodimenzionalan - jednu nepoznanicu možemo birati po volji).
Naime, treća jednadžba dobije se zbrajanjem prve i druge, pa se može izostaviti. Isto se dobije Gauss-Jordanovom metodom - treći redak postaje nula.

3. Koliko rješenja ima sustav
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8$
$-3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = -12$?

Uputa. Beskonačno mnogo. Skup rješenja je dvodimenzionalan (dva rješenja biramo po volji). Naime, druga se jednadžba dobije iz prve množenjem s 2, a treća množenjem s -3, pa se mogu izostaviti. Na primjer, za $x_2 = x_3 = 0$, iz pove jednadžbe dobijemo $x_1 = 4$; pripadajuće je rješenje $(4, 0, 0)$, a za $x_2 = 1,\ x_3 = 5$ dobijemo $x_1 = -9$; pripadajuće je rješenje $(-9, 1, 5)$ itd. Isto se dobije Gauss-Jordanovom metodom - drugi i treći redak postaje 0.

4. Koliko rješenja ima sustav

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 6$?

Uputa. Sustav nema rješenja.

Lekcije iz Matematike 1.

7. Pojam svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuju pojam te geometrijsko i fizikalno značenje svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora na primjerima matrica drugog reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Mrlja u obliku kruga, sastavljena od čestice jednoliko raspoređenih oko središta radijalno se širi; jedna od najjednostavnijih mogućnosti jest da to geometrijski bude dilatacija ili kontrakcija (u svim smjerovima). Takve se pojave opisuju skalarnim matricama (koje djeluju praktično kao brojevi).
Nešto složenija je situacija kad imamo takvo rastezanje koje je radijalno samo uzduž koordinatnih osiju (ali, možda, po svakoj osi s drugim intenzitetom); takvo se djelovanje opisuje dijagonalnim matricama.
Takvo djelovanje u ravnini koje je radijalno po dvama okomitim pravcima kroz ishodište, opisuje se simetričnim matricama. Slično vrijedi za prostor (i više dimenzije); to jedan od glavnih razloga važnosti simetričnih matrica i njihove uloge u primjenama - one su vrlo bliske brojevima, odnosno dijagonalnim matricama.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo; za usvajanje je potrebno razumjeti pojam vektora, matrice i djelovanja matrica na točke ravnine ili prostora (transformacija)

Primjer 1. (posebni smjerovi djelovanja nekih transformacija

U ovom ćemo primjeru, uz ostalo, razmatrati u što se transformiraju, pri djelovanju transformacije ravnine, kvadrat s vrhovima u $(\pm 1, \pm 1)$ i jedinična kružnica sa središtem u ishodištu (odnosno pripadni krug).

(i) Uočite da simetrija ravnine s obzirom na x-os, od svih pravaca koji prolaze ishodištem (smjerova) ima dva istaknuta:
x-os čiju svaku točku ostavlja na miru (**fiksni pravac**)
y-os koju ostavlja na miru, ali ne i njene točke (već ih zrcali s obzirom na ishodište).

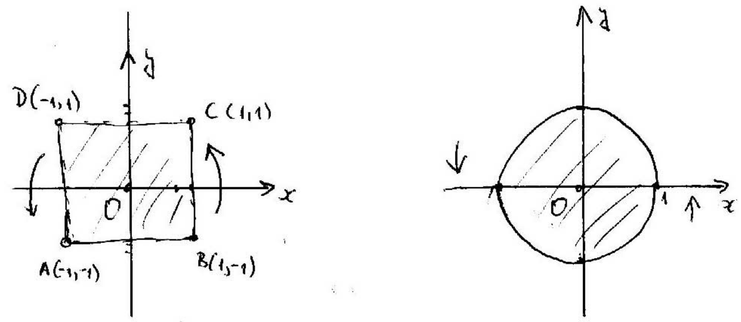
To se očituje i u njenom matričnom zapisu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gdje se broj 1 odnosi na x, a broj -1 na y-os. To se vidi i iz djelovanja na jedinične vektore:

$$A(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}, \ A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{j}$$

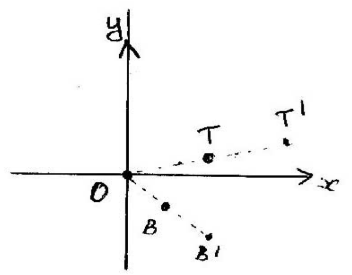
Uočite, također, da pri simetriji s obzirom na x-os, navedeni kvadrat i krug prelaze u sebe (samo se dio iznad osi x zamijenjuje s onim ispod) (sl.1).



Sl. 1.

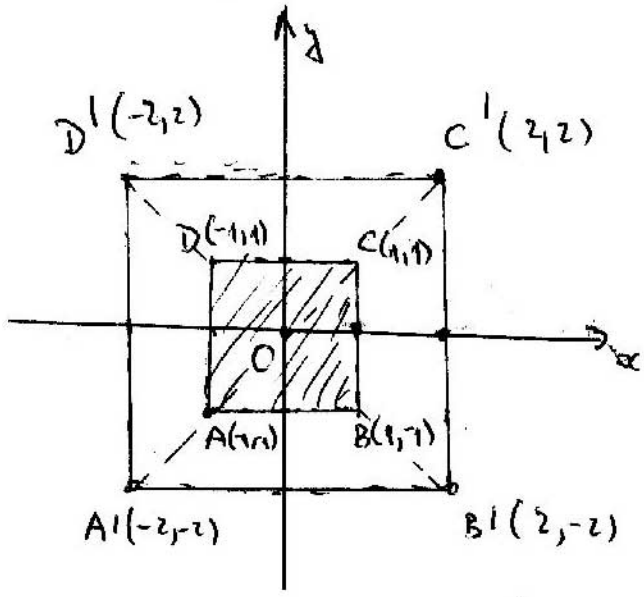
(ii) **Rotacija ravnine oko ishodišta za kut** nema istaknutih smjerova, osim ako je to rotacija za 0° ili 180° kad su svi smjerovi istaknuti.
Navedeni kvadrat i krug prelaze u neki drugi sukladni kvadrat ili krug (samo se zavrte).
Ishodište je jedina točka koja ostaje na miru (**fiksna točka**).

(iii) Skalarna matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ određuje homotetiju s obzirom na ishodište s koeficijentom 2 (dilataciju). Njoj su svi smjerovi kroz ishodište istaknuti (svaka se točka preslikava u točku na istoj zraci kroz ishodište, ali na dva puta većoj udaljenosti (sl.2).

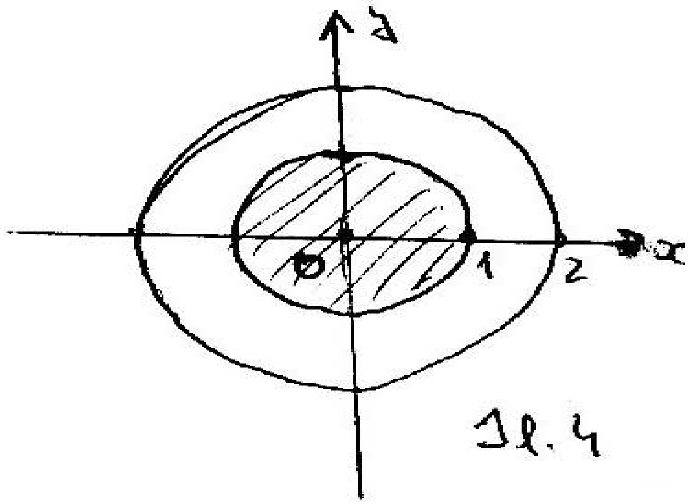


Sl. 2.

Pripadni kvadrat prelazi u kvadrat s vrhovima $(\pm 2, \pm 2)$ (sl.3), a krug u krug sa središtem u ishodištu polumjera 2(sl.4).



Sl. 3

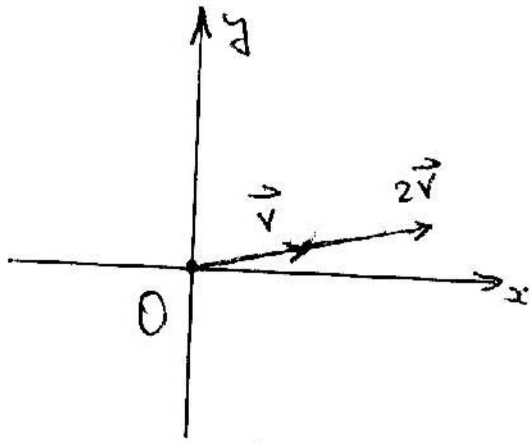


Sl. 4

I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se radijalno širila neko vrijeme; novi krug predočuje novo stanje. To što su ovdje svi smjerovi istaknuti (odnosno da po svim pravcima kroz ishodište transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2), možemo zapisati kao:

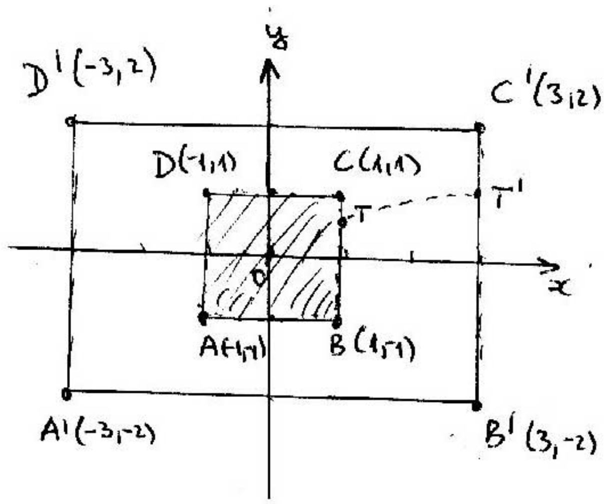
$$A(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v}$$

za sve vektore $\overrightarrow{v}$ (sl.5).

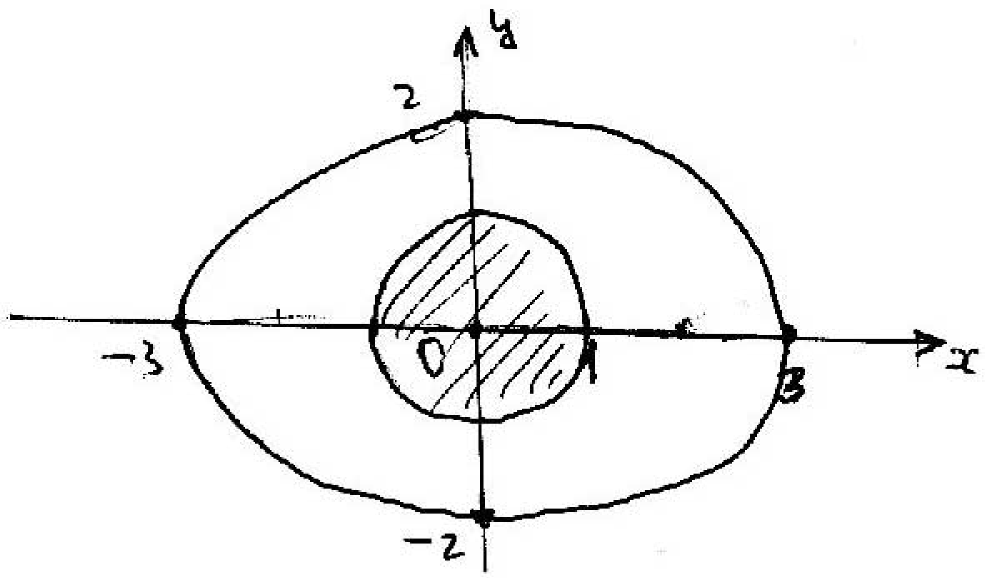


sl. 5.

(iv) Dijagonalna matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ određuje složeno rastezanje. Ima dva istaknuta smjera (tj. dva pravca kroz ishodište koji prelaze u sebe):
x-os koja odgovara broju 3 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 3
y-os koja odgovara broju 2 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2
I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Pripadni kvadrat prelazi u pravokutnik s vrhovima $(\pm 3, \pm 2)$ (sl.6) , a jedinična kružnica u elipsu sa središtem u ishodištu s poluosima 3, odnosno 2 (sl.7).



sl. 6.



Sl. 7.

Na jeziku jednadžba imamo

$$x^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se širila neko vrijeme, ali radijalno samo po koordinatnim osima i to različitim brzinama; zato čestice izvan koordinatnih osiju imaju otklon prema osi x. Također, čestice ostaju unutar kvadranata u kojima su bili na početku Mehanički možemo zamišljati da smo krug rastezali s obje strane x osi s koeficijentom 3, s obje strane y osi s koeficijentom 2; pri tom se krug deformirao u elipsu.
Dilatacije po x, odnosno y-osi u ovom primjeru možemo zadati i uvjetima:

$$A(\overrightarrow{i}) = 3\overrightarrow{i},\; A(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{j}$$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Svojstvena vrijednost i svojstveni vektor matrice.

U Primjeru 1. vidjeli smo da za dijagonalne matrice 2. reda postoje dva istaknuta smjera (svaki odgovara po jednom broju koji je na dijagonali te matrice; za skalarne matrice svi su smjerovi istaknuti). Postavlja se pitanje postoje li takvi smjerovi i za neke matrice koje nisu dijagonalne. Vidjet ćemo da takvi, međusobno okomiti smjerovi, postoje za simetrične matrice (vidjeli smo da za matrice koje odgovaraju rotacijama u ravnini takvi smjerovi ne postoje).

Kažemo da je broj λ **svojstvena vrijednost** matrice A ako postoji ne-nul vektor $\overrightarrow{v}$ tako da bude

$$A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$$

a svaki takav $\overrightarrow{v}$ zove se **svojstveni vektor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Primjer 2. Za matrice iz Primjera 1. imamo.
(i) - simetrija s obzirom na x-os ima dvije svojstvene vrijednosti:
(I) broj 1, a svaki ne-nul vektor proporcionalan $\overrightarrow{i}$ pripadni je svojstveni vektor; zato je dovoljno reći da je $\overrightarrow{i}$ svojstveni vektor
(II) broj -1, sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{j}$.
(ii) - rotacije (osim dviju) nemaju svojstvenih vrijednosti ni vektora (točnije nemaju **realnih** svojstvenih vrijednosti ni vektora).
(iii)- homotetija s koeficijentom 2 ima jednu svojstvenu vrijednost: broj 2, a svaki ne nul vektor joj je svojstveni vektor.
(iv) - dijagonalna matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ima dvije svojstvene vrijednosti:
broj 3 sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{i}$
broj 2 sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{j}$

Primjer 3. (i) Pokažimo da su brojevi 1 i 6 svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.
(iii) Odredimo slike kvadrata odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

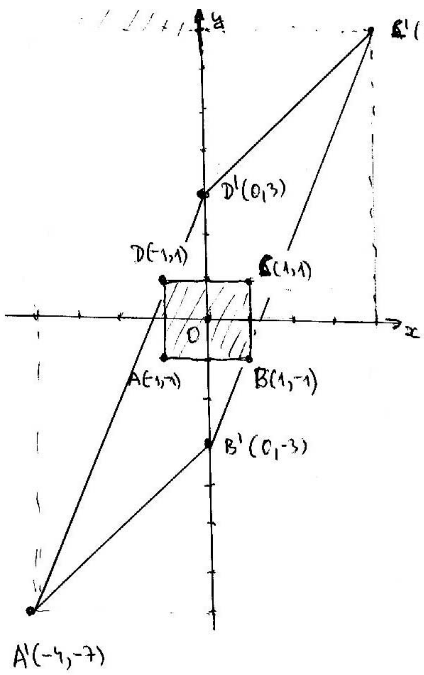
(i) i (ii). Označimo $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
tada uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 1 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

$$2x + 2y = x,\ 2x + 5y = y,\ tj.\ x = -2y$$

(sustav se svodi na jednu jednadžbu).
Netrivijalno rješenje (zbog ne-nul vektora) je, na primjer, $x = -2,\ y = 1$, tj. $\overrightarrow{v_1} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 1 (ostali su mu proporcionalni).
Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 6 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

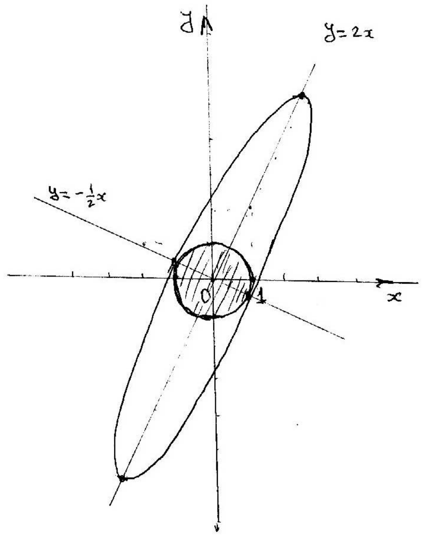
$$2x + 2y = 6x,\ 2x + 5y = 6y,\ tj.\ y = 2x$$

Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = 1,\ y = 2$, tj. $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 6 (ostali su mu proporcionalni).
Uočite da su vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ okomiti, takvi su ujedno i pripadni istaknuti smjerovi (zadani jednadžbama $x = -2y$, odnosno $y = 2x$).
(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u paralelogram s vrhovima
$(4, 7), (0, 3), (-4, -7), (0, -3$ (sl.8).



Sl.8.

Jedinična kružnica prelazi u **elipsu** sa središtem u ishodištu i poluosima duljine 1 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $x = -2y$), odnosno 6 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $y = 2x$) (sl.9).



Sl. 9.

Geometrijski, ta je elipsa nastala rastezanjem s koeficijentom 6 uzduž pravca s jednadžbom $y = 2x$.

Također, možemo zamišljati da se nakupina čestica u jediničnom krugu širi tako da čestice na pravcu s jednadžbom $x = -2y$ (tj. na pravcu s jednadžbom $y = -\frac{1}{2}x$) ostaju na miru, čestice na pravcu $y = 2x$ šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema pravcu $y = 2x$. Pritom čestice ne izlaze iz kvadranata određenih istaknutim smjerovima.

Primjer 4. (i) Pokažimo da su brojevi 2 i 1 svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.
(iii) Odredimo slike kvadrata odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

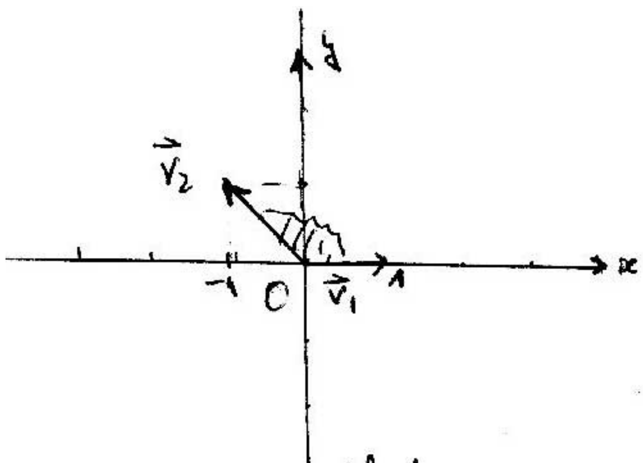
(i) i (ii) Uz oznake kao u rješenju Primjera 3., uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 2 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

$$2x + y = 2x,\ y = 2y,\ tj.\ y = 0$$

pa je x-os istaknut smjer za svojstvenu vrijednost 2, tj. $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 2.
Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 1 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

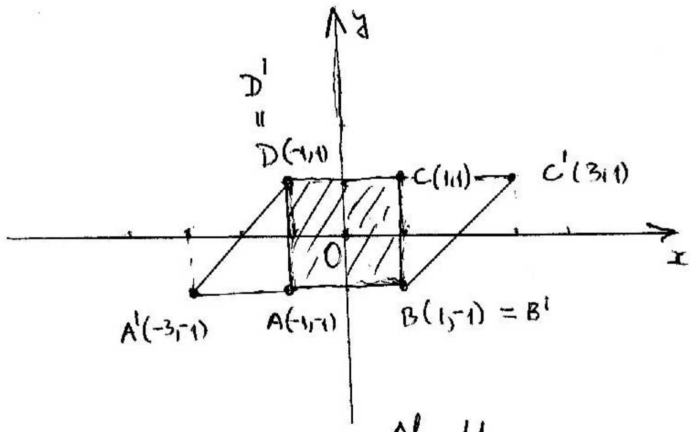
$$2x + y = x,\ y = y,\ tj.\ y = -x$$

Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = -1$, $y = 1$, tj. $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 1.
Uočite da vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ **nisu okomiti**, ujedno ni pripadni istaknuti smjerovi (zadani jednadžbama $y = 0$, odnosno $y = -x$) (sl.10).



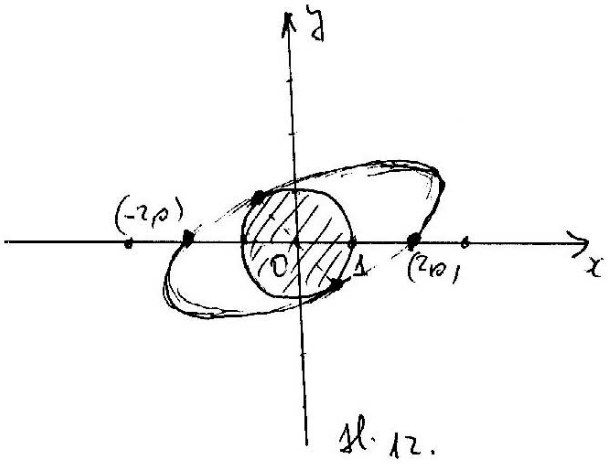
sl. 10

(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u **paralelogram** s vrhovima $(3,1), (-1,1), (-3,-1), (1,-1)$ (sl.11).



sl. 11.

Jedinična kružnica prelazi u **elipsu** sa središtem u ishodištu i poluosima koji **nisu** na istaknutim smjerovima i treba ih posebno određivati (sl.12).



sl. 12.

Možemo zamišljati da se nakupina čestica siri tako da čestice na pravcu $y=-x$ ostaju na miru, čestice na x-osi šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema x-osi (gdje je veća svojstvena vrijednost). Pritom čestice ne izlaze iz kosih kvadranata određenih istaknutim smjerovima.

Metoda određivanja svojstvenih vrijednosti. Iz prethodnih smo primjera vidjeli kako se određuju svojstveni vektori, ako su poznate svojstvene vrijednosti. Sad ćemo na primjeru matrica 2-og reda pokazati kako se određuju svojstvene vrijednosti (ista će metoda biti primjenjiva i na bilo koje matrice). Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bilo koja matrica 2. reda. Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$ svodi se na sustav:

$$ax + by = \lambda x,\ cx + dy = \lambda y,\ tj.\ (a - \lambda)x + by = 0,\ cx + (d - \lambda y) = y$$

Ako želimo da taj sustav, osim očitog trivijalnog rješenja $(0,0)$, ima i neko netrivijalno (jer mora biti $\overrightarrow{v} \neq 0$), determinanta sustava mora biti 0 (inače bi rješenje bilo jedinstveno: $x = y = 0$). Dakle, treba biti

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ tj.\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

To je kvadratna jednadžba pa može imati dva realna, dvostruko realno ili kompleksno-konjugirana rješenja.

Primjer 5. Odredimo formulom svojstvene vrijednosti:
(i) dijagonalne matrice
(ii) matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ iz Primjera 3.
(iii) matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iz Primjera 4.
(iv) matrice rotacije $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(i) Već smo na primjerima vidjeli da su brojevi a, d na dijagonali dijagonalne matrice (drugog reda), svojstvene vrijednosti te matrice. Isto se dobije formulom:
$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$, zbog $b = c = 0$ postaje, $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad = 0$, s rješenjima $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = d$.
(ii) Tu je $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, pa je $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$ (kako smo već provjerili).
(iii) Tu je $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, pa je $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$ (kako smo već provjerili - uočite da su ta dva broja na dijagonali matrice; slično vrijedi za svaku gornju trokutastu ili donju trokutastu matricu).
(iv) Goemetrijskim smo argumentima zaključili da ta matrica (osim dvaju izuzetaka) nema istaknutih smjerova; to znači da joj svojstvene vrijednosti nisu realni brojevi. Isto se dobije formulom: $\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$, tj. $\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + 1 = 0$;
diskriminanta te jednadžbe je $D = 4\cos^2\alpha - 4$, što je < 0 osim ako je $\cos\alpha = \pm 1$, a to je za $\alpha = 0°$ ili $\alpha = 180°$.

Primjer 6. Simetrične matrice imaju realne svojstvene vrijednosti i okomite pripadne svojstvene vektore.

Tu je $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0$, jer je $c = b$, pa je diskriminanta $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + b^2$, što je > 0 (pa imamo dva različita realna rješenja) osim ako je $a = d$ i $b = 0$ (skalarna matrica kad su svi vektori svojstveni).
Okomitost ćemo dokazati posebno.

Lekcije iz Matematike 1.

8. Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuju pojam funkcije i njena uloga u inženjerstvu, njena geometrijska interpretacija (graf), osnovna svojstva funkcija i pojam inverzne funkcije.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

U proučavanju prirode i u inženjerstvu javljaju su razne veličine (vrijeme, masa, brzina, temperatura, obujam, udaljenost, položaj itd.). U tipičnoj situaciji razmatraju se dvije veličine koje nisu neovisne jedna od druge, već promjena jedne utječe na promjenu druge, dakle te su dvije veličine povezane. Problem opisivanja takvih veza je temeljni inženjerski problem, a matematički se rješava uvodjenjem pojma funkcije.
Da bi se bolje uočavale spomenute veze, dobro ih je geometrijski predočiti; matematički to se ostvaruje grafom funkcije.

III. Potrebno predznanje

Pojam funkcije i grafa funkcije obradjuje se već u osnovnoj ¸ a sustavnije u srednjoj školi: linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi. U ovoj lekciji važno će biti poznavanje linearne i kvadratne funkcije. Takodjer, bit će potrebno poznavanje realnih brojeva i koordinatnog sustava na pravcu i ravnini.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Primjeri zavisnih veličina

Proteklo vrijeme i položaj čestice koja se giba na pravcu.
Zamislimo da se čestica giba po pravcu. Temeljni problem **opisa** tog gibanja jest da se odredi **pravilo** koje će nam kazati koji je položaj te čestice u svakom odabranom trenutku.
Da bi se taj problem matematizirao i (barem načelno) matematički riješio, treba:
1. Uvesti koordinatni sustav na pravac po kojemu se odvija gibanje, tj. izabrati ishodište, mjernu jedinicu za duljinu i usmjerenje (tj. odabrati točku pravca koja će imati koordinatu 0).
Sad položaj čestice na pravcu možemo interpretirati kao broj - koordinatu

položaja; tako je položaj veličina (oznaka s) koja ima realne vrijednosti.
2. Dogovoriti se za nulto vrijeme i jedinicu mjerenja vremena; tako je vrijeme veličina (oznaka t) koja takodjer ima realne vrijednosti.

Sad se problem opisa tog gibanja može prevesti na sljedeći matematički problem:
za svaku vrijednost veličine t treba odrediti vrijednost veličine s Da bismo naznačili da neka vrijednost veličine s odgovara nekoj vrijednosti t vremena, pišemo $s(t)$, dakle:

$s(t) :=$ koordinata položaja čestice u vrijeme t (sl.1.).

sl. 1.

Na primjer:
$s(2) = 4$ znači da je za $t = 2$ čestica bila u točki s koordinatom 4.
Uočimo da je u ovom važnom primjeru, vrijeme t primarna veličina, a položaj s sekundarna; kažemo da veličina s **zavisi** o veličini t.

Varijante. Svaku veličinu koja ovisi o vremenu prirodno možemo zamišljati kao gibanje po pravcu; naime zamišljamo kako se, dok vrijeme protječe, vrijednost te veličine giba po brojevnom pravcu. Na primjer:
1. masa m nekog spoja koji nastane u nekoj reakciji za neko vrijeme.
2. temperatura τ koja nastane pri nekoj reakciji u nekom vremenu.
3. brzina v kojom se odvija neka reakcija u nekom vremenu.

Općenito, ako imamo imamo dvije veličine tako da druga ovisi o prvoj, ta je zavisnost analogna gibanju po pravcu. Naime vrijednosti druge (zavisne) veličine mijenjaju se (gibaju) na brojevnom pravcu dok se mijenja prva veličina (koja u ovim okolnostima zamjenjuje vrijeme).

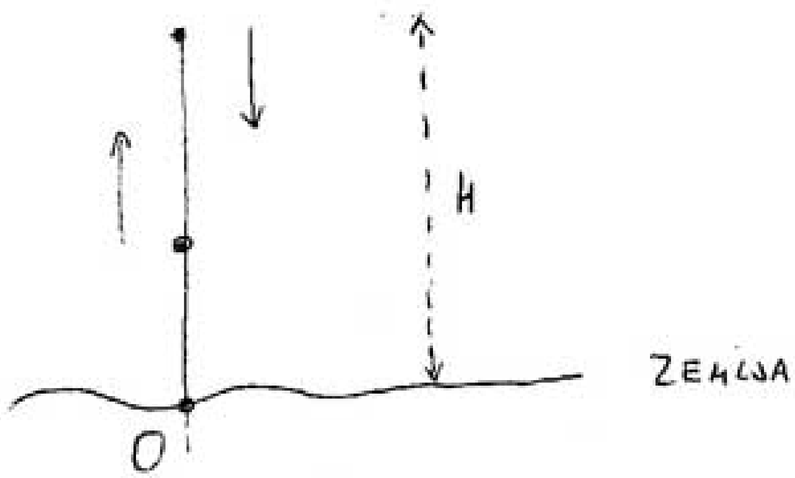
Vrijednosti koje postiže veličina.

Pri gibanju po pravcu čestica **načelno** može biti u svakom položaju, pa je, općenito, skup vrijednosti veličine s (koja registrira položaj) skup realnih brojeva. Skup vrijednosti koje **zaista postiže** ta veličina u konkretnom slučaju, u pravilu je manji.

Primjer 1. Opišimo skup vrijednosti koje pri vertikalnom hicu može postići veličina
(i) položaja s

(ii) vremena t.

(i) Ovaj problem nema jednoznačan odgovor. On ovisi o više faktora.
1. Faktor - uvodjenje koordinatnog sustava na pravac po kojemu se odvija gibanje. Uobičajeno je da je ishodište u razini zemlje i da je pozitivni smjer (usmjerenje) prema uvis (sl.2.).



Sl.2.

Ako to prihvatimo, onda je skup vrijednosti koje s može postići segment $[0, H]$, gdje je H visina do koje dodje čestica prije nego počme padati.

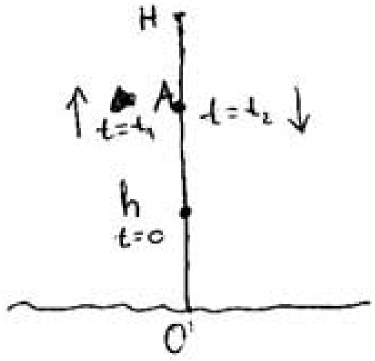
2. Faktor - visina na kojoj je bila čestica kad smo je hitnuli u vis.

3. Faktor - brzina kojom je čestica hitnuta u vis.
Ima i više drugih faktora (otpor zraka, stvarna zemljina sila koja djeluje na česticu itd.), ali njih zanemarujemo, jer ovdje razmatramo gibanje u idealnim uvjetima).
(ii) Ni ovaj problem nema jednoznačno rješenje. On takodjer ovisi o više faktora. Uz faktore 2. i 3. tu je još:

4. Faktor - odabir nultog vremena (i jedinice za vrijeme). Obično se uzima da je u $t = 0$ čestica izbačena u vis. Tada t postiže segment $[0, T]$, gdje je T vrijeme u trenutku kad čestica udari u pod.
Možemo zamisliti da se gibanje i nakon pada nastavlja (samo što čestica miruje) pa t postiže vrijednosti iz $[0, \infty]$.
Dalje, možemo zamisliti da je gibanje bilo i prije izbacivanja u vis (samo što je čestica mirovala); tada t postiže svaku realnu vrijednost.

Uočimo da pri gibanju po pravcu svakoj vrijednosti veličine t odgovara točno jedna (jedinstvena) vrijednost veličine s, a da obratno ne mora biti.

Primjer 2. (i) Pri jednolikom pravom gibanju čestice po pravcu svakoj vrijednosti veličine t odgovara jedinstvena vrijednost veličine s, i obratno, tj. čestica se ne može naći u istom položaju za dva različita trenutka.
(ii) Pri vertikalnom hicu, svakom t odgovara jedinstven s, medjutim obratno ne vrijedi (jer će čestice neke položaje postići dva puta: pri gibanju u vis i pri padu (sl.3.).



Sl. 3. U $t=t_1$ čestica je u točki A i giba se prema gore. U $t=t_2$ čestica je također u točki A, ali se giba prema dolje.

Pravilo prema kojem su povezane dvije veličine. Dvije zavisne veličine na različite načine mogu ovisiti jedna o drugoj.

Primjer 3. Odredimo pravilo prema kojemu zavise t i s pri gibanju po pravcu stalnom brzinom $v = 3$ ako je:
(i) u $t = 0$ čestica bila u $s = 0$
(ii) u $t = 0$ čestica bila u $s = 2$

(i) $s(t) = 3t$
(ii) $s(t) = 3t + 2$.
Uočite da se pomoću tih formula može odrediti položaj u svakom trenutku.

Primjer 4. Odredimo pravilo prema kojem zavise
(i) duljina stranice kvadrata x i njegova površina y.
(ii) obujam kugle y i polumjer kugle y

(i) $y(x) = x^2$.
(ii) $y(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

Pojam funkcije. Gibanje po pravcu mogli smo zamisliti kao pridruživanje, koje svakoj vrijednosti varijable t pridružuje neku vrijednost varijable s. Slično

bi se mogle interpretirate veze drugih spomenutih veličina. Svugdje možemo uočiti
1. Skup A vrijednosti prve veličine.
2. Skup B vrijednosti druge (zavisne) veličine.
3. Pravilo zavisnosti, tj. pravilo f prema kojemu druga (zavisna) veličina o prvoj. Vrijednost druge veličine koja odgovara vrijednosti x prve veličine, prema pravilu f, označava se kao $f(x)$
Kažemo da je f **funkcija** sa skupa A u skup B i pišemo

$$f : A \to B$$

Prva (nezavisna) varijabla x naziva se i **argument**. Kažemo da je $f(x)$ vrijednost funkcije f u x, A domena - područje definicije i B **kodomena - područje vrijednosti**.

Primjer 5. Zapišimo pomoću f pravila zavisnosti iz Primjera 3. i 4.

Primjer 3. (i) $f(t) := 3t$, (ii) $f(t) := 3t + 2$
Primjer 4. (i) $f(x) := x^2$, (ii) $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$

Ovakvim zapisima kažemo da smo funkciju zadali **analitički** jer smo dali formulu prema kojoj funkcija djeluje. Uočite da se analitički zapis funkcije sastoji od:
1. **lijeve strane**, na primjer, $f(x)$; tu je f funkcija, a x argument (prva varijabla).
2. znaka $:=$; čita se *jednako je prema definiciji*; taj znak koristimo umjesto obične jednakosti, da bi se zadavanje funkcije razlikovalo od jednadžbe.
3. **desne strane** - analitičkog izraza, na primjer x^2.
Sve skupa, tj. $f(x) := x^2$ znači da se vrijednosti funkcije f računaju prema pravilu koje je zadano izrazom na desnoj strani.
U analitičkom zapisu funkcije nigdje se ne spominje kako se označava druga varijabla (a možemo je označiti kao $y, z, ...$).

Primjer 6. Odredimo vrijednost u 4 funkcije f iz Primjera 5.

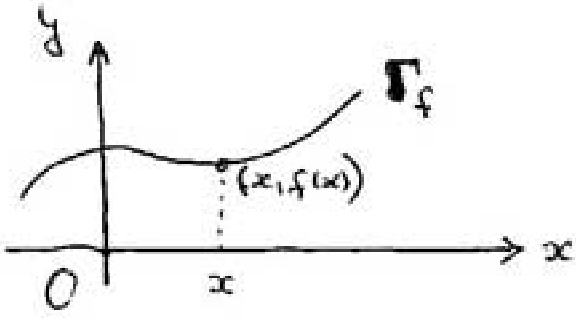
Treba izračunati $f(4)$. Dobijemo redom:
Ako je $f(t) := 3t$ onda je $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$.
Ako je $f(t) := 3t + 2$ onda je $f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$
Ako je $f(x) := x^2$ onda je $f(4) = 4^2 = 16$
Ako je $f(x) := \frac{4\pi}{3}x^3$ onda je $f(4) = \frac{4\pi}{3}4^3 = \frac{256}{3}\pi$

Graf funkcije. Da bismo je bolje dočarali, funkciju možemo predočiti dinamički. Na primjer, gibanje na pravcu možemo kompjutorski simulirati tako da doživimo kretanje čestice, promjenu brzine i sl.
Drugi, puno važniji i tehnički jednostavniji pristup, jest **grafičko predočavanje funkcije**, kojim, za svaku vrijednost argumenta x (nezavisne varijable), geometrijski predočavamo odgovarajuću vrijednost zavisne varijable y, tj. vrijednost $f(x)$. To postižemo tako da u koordinatnoj ravnini na horizontalnu os nanosimo x-vrijednosti, a na vertikalnu y-vrijednosti. Da naznačimo da vrijednosti argumenta x, odgovara vrijednost $f(x)$ zavisne varijable y, ucrtavamo

točku (uredjeni par) $(x, f(x))$. Skup svih takvih točaka zovemo **graf funkcije** (oznaka G_f ili Γ_f). Dakle:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\}$$

gdje x prolazi domenom funkcije f (sl.4.).



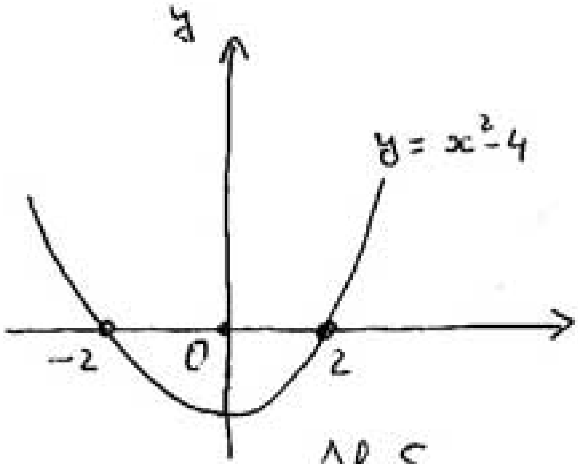
Sl. 4.

Uočimo sljedeće:
Koordinatna se ravnina sastoji od svih mogućih uredjenih parova (x, y) gdje su x, y realni brojevi. Tu su koordinate x, y **nezavisne** (medju njima nema nikakvih veza); zato je ravnina **dvodimenzionalna**.
Graf funkcije sastoji se od uredjenih parova (x, y) gdje x, y **nisu nezavisni**, već medju njima postoji jedna veza:

$$y = f(x)$$

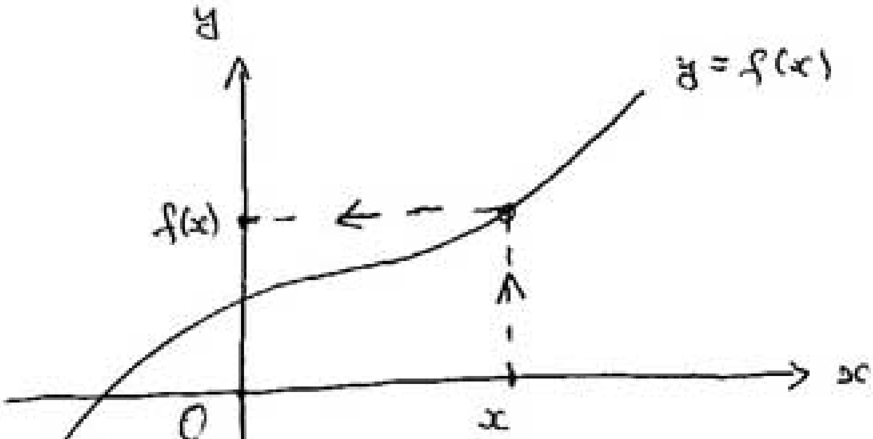
zato se dimenzija spušta za 1, pa je graf funkcije jednodimenzionalan, a kako je potpuno odredjen gornjom vezom, nju zovemo **jednadžba grafa** (i tu jednadžbu obično i pišemo uz graf, umjesto oznake Γ_f). Dakle, treba razlikovati:
f..... to je funkcija;
$f(x)$....to je vrijednost funkcije f u x,
$y = f(x)$....to je jednadžba grafa (to je jednadžba s dvjema nepoznanicama, poput jednadžbe pravca, kružnice i sl.)
$f(x) = 0$.....to je jednadžba (s jednom nepoznanicom) pridružena funkciji f.

Primjer 7. Neka je funkcija f zadana s $f(x) := x^2 - 4$. Tada je njen graf **parabola** s jednadžbom $y = x^2 - 4$ (dakle skup rješenja te jednadžbe je beskonačan - jedna jednadžba s dvjema nepoznanicama - i geometrijski je parabola).
Jednadžba $x^2 - 4 = 0$ je jednadžba s jednom nepoznanicom (pridružena funkciji f) i ima dva rješenja: ± 2, geometrijski to su apscise točaka u kojima graf funkcije f siječe x-os (sl.5.).



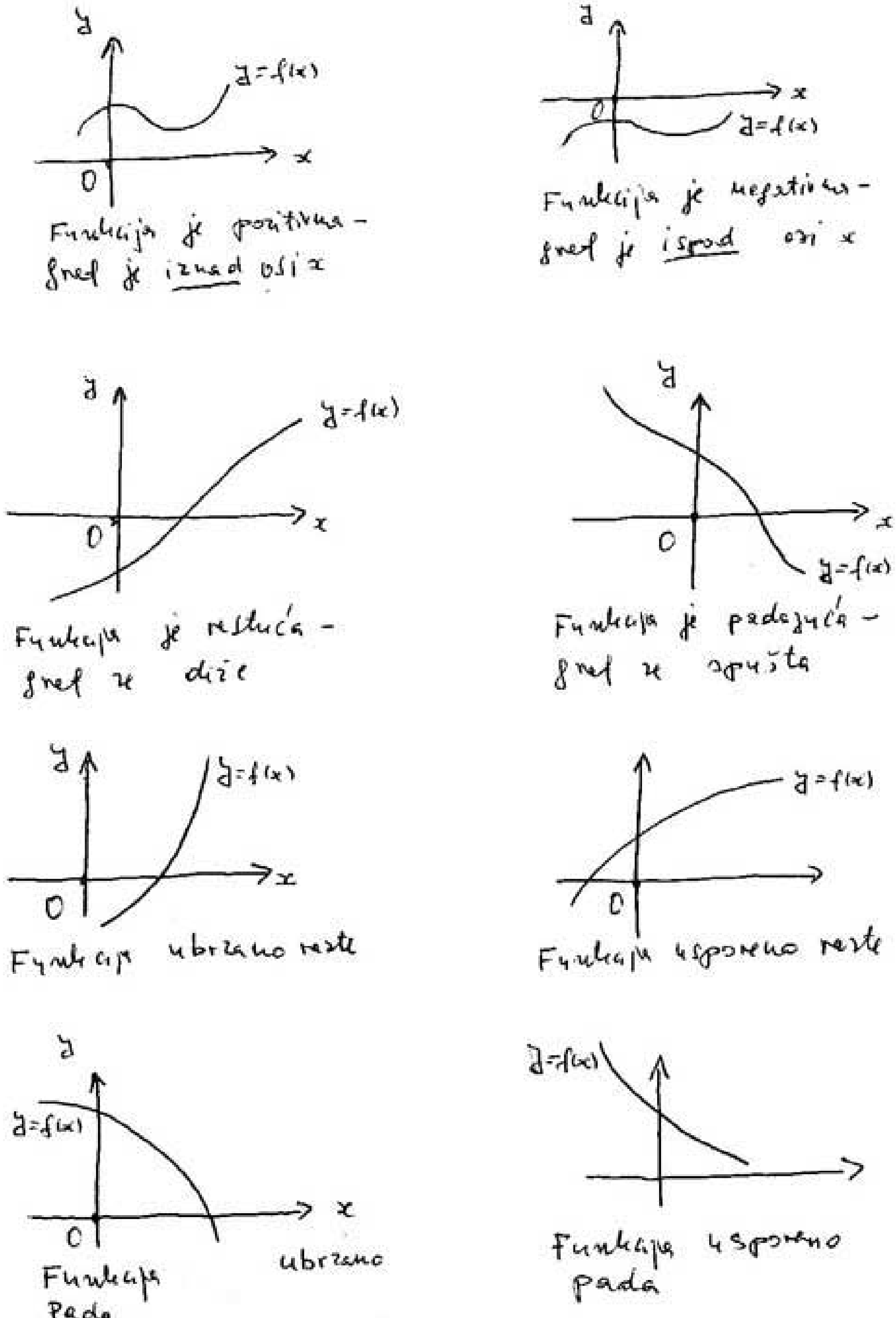
Sl. 5

Očitavanje vrijednosti funkcije iz grafa funkcije. Ako nam je poznat graf funkcije, onda možemo grafički približno odrediti vrijednost funkcije f u x ovako:
1. korak. Iz točke s koordinatom x na horizontalnoj osi povlačimo okomicu.
2. korak. Odredjujemo točku u kojoj okomica siječe graf.
3. korak. Kroz točku presjeka povlačimo paralelu s x-osi.
4. korak. Odredjujemo točku u kojoj paralela siječe y-os; ta točka ima koordinatu $f(x)$ (sl.6.).



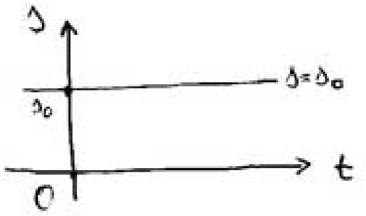
Sl. 6

Očitavanje svojstava funkcije (funkcijske zavisnosti) iz grafa funkcije. Iz grafa funkcije zorno se očituju neka važna svojstva funkcije: **pozitivnost, negativnost, rast, pad, ubrzani rast, ubrzani pad, usporeni rast, usporeni pad, itd.** (sl.7.).

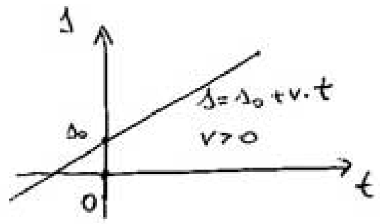


Sl. 7.

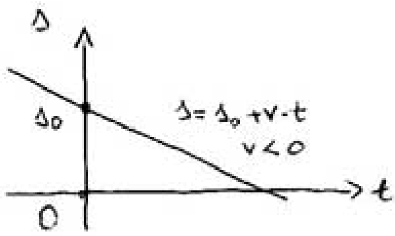
s-t dijagram. To je graf zavisnosti položaja s čestice (koja se giba po pravcu) i vremena t. On dočarava kako se čestica giba po pravcu s-osi, dok vrijeme protječe (ide po t-osi od lijeva prema desnu). Treba razlikovati ova jednostavna gibanja po pravcu:



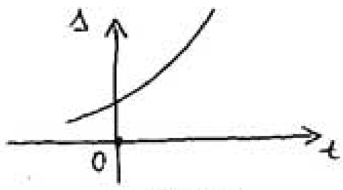
sl. 8



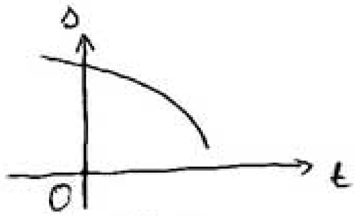
sl. 9



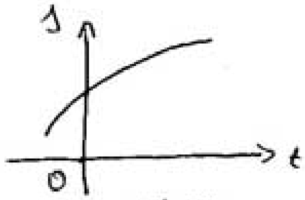
sl. 10



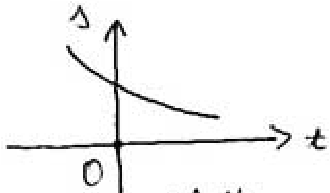
sl. 11



sl. 12.



sl. 13



sl. 14

1. Mirovanje (graf je paralela s t-osi (sl.8.).

2. (i) Jednoliko u pozitivnom smjeru (graf je pravac s pozitivnim koeficijentom smjera) (sl.9.)

(ii) jednoliko u negativnom smjeru (graf je pravac s negativnim koeficijentom smjera) (sl.10.)

3. (i) ubrzano u pozitivnom smjeru (graf je rastući i konveksan) (sl.11.)

(ii) ubrzano u negativnom smjeru (graf je padajući i konkavan) (sl.12.)

4. (i) usporeno u pozitivnom smjeru (graf je rastući i konkavan) (sl.13.)

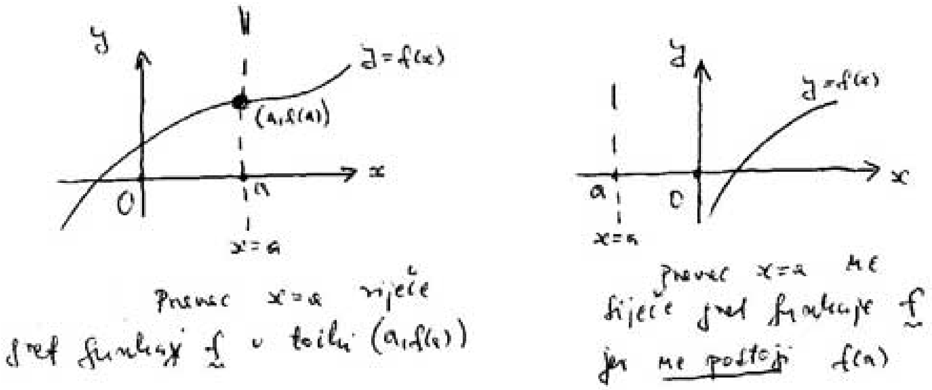
(ii) usporeno u negativnom smjeru (graf je padajući i konveksan) (sl.14.)

Grafičko rješavanje jednadžba - inverzna funkcija

Uočite ovo svojstvo grafa funkcije:
Pravac okomit na x-os, tj. pravac s jednadžbom

$$x = a$$

siječe graf funkcije točno u jednoj točki ili ni u jednoj - ovisno o tome postoji li $f(a)$ **ili ne postoji** (sl.15.).



Sl. 15.

Razmotrimo sad pravac usporedan s x-osi, tj. pravac s jednadžbom

$$y = b$$

i njegov presjek s grafom funkcije. Tu mogu nastupiti ove mogućnosti:

1. Pravac ne siječe graf funkcije f - to znači da jednadžba

$$f(x) = b$$

nema rješenja (sl.16.).

2. Pravac siječe graf funkcije f u jednoj točki - to znači da jednadžba

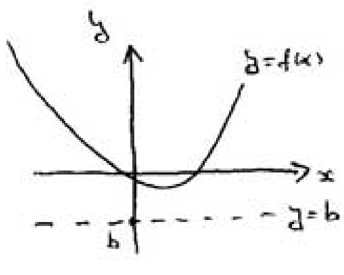
$$f(x) = b$$

ima točno jedno rješenje (sl.17.).

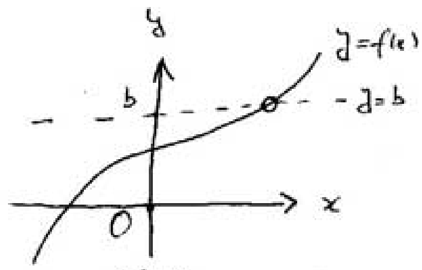
3. Pravac siječe graf funkcije f u dvije ili više točaka - to znači da jednadžba

$$f(x) = b$$

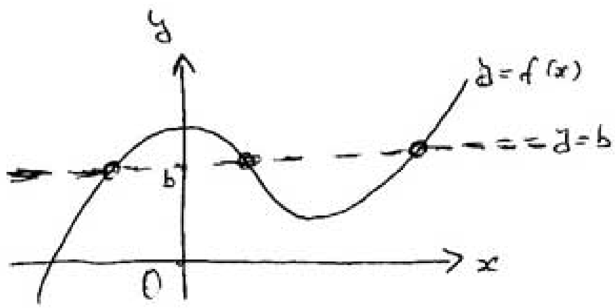
ima dva ili više rješenja (sl.18.).



Sl. 16.



Sl. 17



Sl. 18

Ako nastaju samo mogućnosti 1. i 2. onda funkcija ima **inverznu funkciju**. O tome ćemo više govoriti u sljedećoj lekciji.

Lekcije iz Matematike 1.

9. i 10. Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se navode elementarne funkcije (tj. linearne, kvadratne, kubne funkcije i, općenito, potencije i polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalne i logaritamske funkcije te trigonometrijske i arkus funkcije), opisuju njihova svojstva, crtaju grafovi, usvajaju pripadajuće oznake i tehnika računanja (temeljne elementarne funkcije upravo su one funkcije koje su ugradjene u kalkulator). Naznačuje se uloga tih funkcija u primjenama.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

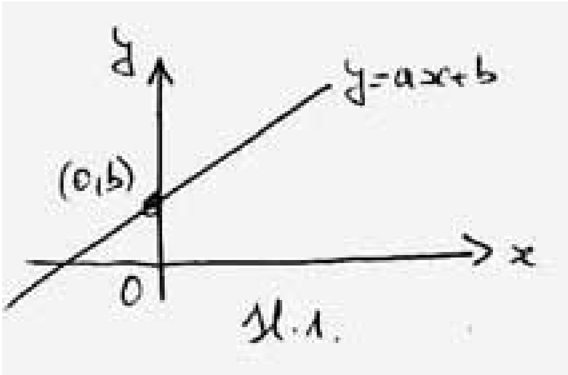
Primjena matematike dobrim je dijelom zasnovana na računanju. Računanje počiva na temeljnim računskim operacijama: zbrajanju (i njenoj inverznoj operaciji oduzimanju), množenju (i njenoj inveznoj operaciji dijeljenju). Uzastopnim množenjem broja sa sobom dolazi se do operacije potenciranja (toj je operaciji inverzna operacija korjenovanja).
U primjenama, te operacije često nisu dovoljne. Drugim riječima, postoje veze medju zavisnim veličinama koje se ne mogu (ili ne mogu jednostavno) zapisati pomoću gornjih operacija. Takve su, na primjer, eksponencijalne veze (odnosno, njima inverzne, logaritamske veze). Na primjer, eksponencijalnog je tipa veza izmedju količine radioaktivne materije i proteklog vremena.
Takodjer, za opis veze izmedju položaja točke koja titra na pravcu i proteklog vremena, potrebne su trigonometrijske funkcije (njihove inverzne funkcije zovu se arkus funkcijama).

III. Potrebno predznanje

Pojam funkcije i grafa funkcije. To su pojmovi koji se obradjuje već u osnovnoj i u srednjoj školi, a mi smo ih ponovili u prethodnoj lekciji. Takodjer, u srednjoj je školi obradjivana linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi, medjutim mi ćemo sve to opet ponoviti. Jedino zaista novo gradivo jesu arkus funkcije.

Linearna funkcija - linearna veza medju veličinama.

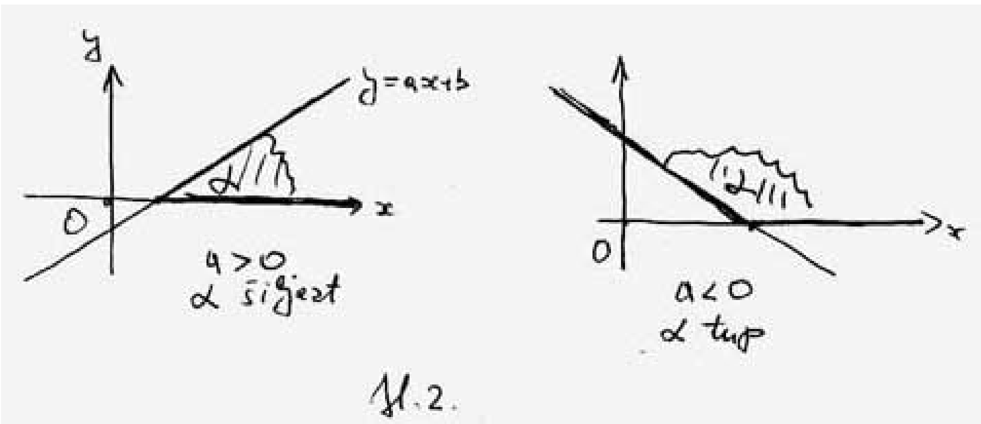
Funkcija: $f(x) := ax + b$
Jednadžba grafa (linearna veza medju veličinama): $y = ax + b$ (sl.1.).



Parametri o kojima ovisi f (odnosno linearna veza): realni brojevi a, b. Obično se traži da bude $a \neq 0$ (inače je funkcija konstanta, a graf pravac usporedan s x-osi).
Analitičko i geometrijsko značenje parametara a i b:
Analitički, $b = f(0)$ tj. b je vrijednost varijable y kad je vrijednost varijable x jednaka 0 (to se piše i kao $y(0) = b$).
Geometrijski, b je odrezak koji graf odsijeca na y-osi.
Analitički, a je stalni omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$$

Geometrijski, a je koeficijent smjera (nagib) pravca - grafa funkcije:
ako je $a > 0$ prikloni je kut pravca šiljast (jer je $a = \tan \alpha$), a funkcija rastuća (to znači da se pri povećavanju veličine x povećava i veličina y);
ako je $a < 0$ prikloni je kut pravca tup, a funkcija padajuća; (to znači da se pri povećavanju veličine x veličina y smanjuje) (sl.2.).



Mnoge su veze medju veličinama linearne, a tipični su primjeri pretvaranje jedinica i jednoliko gibanje po pravcu:

Primjer 1. Pretvaranje jedinica.
(i) Ako je y vrijednost mase u gramima, a x vrijednost iste mase u kilogramima,

onda je:

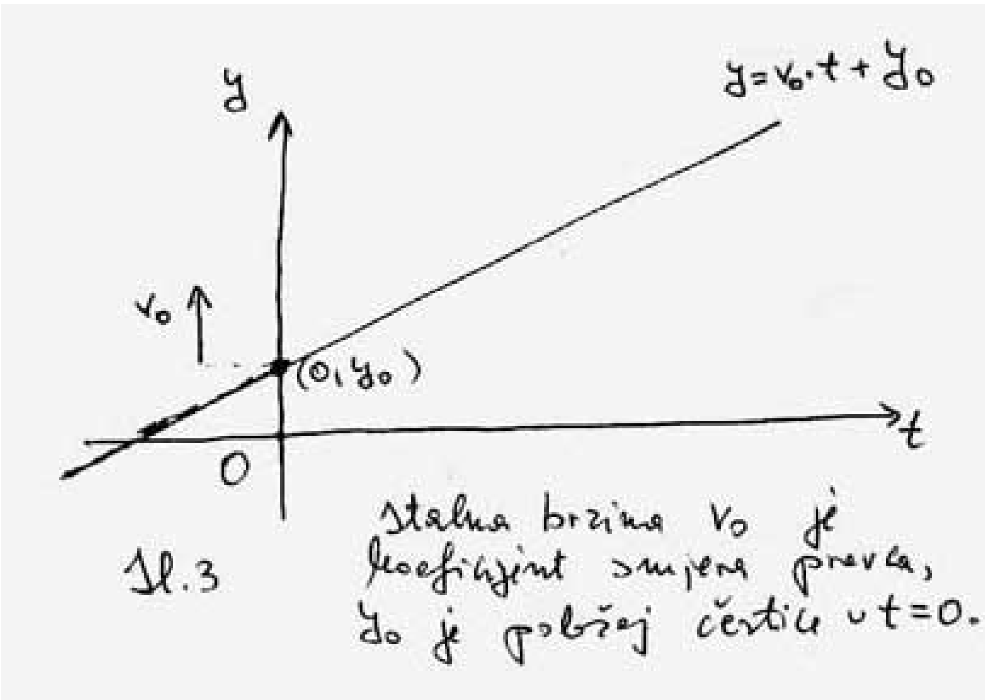
$$y = 1000x$$

Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(x) := 1000x$ "pretvara kilograme u grame".
(ii) ako je x vrijednost temperature u Celziusovim stupnjevima, a y vrijednost iste temperature u Fahrenheitovim stupnjevima, onda je $y = \frac{9}{5}x + 32$.
Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(x) := \frac{9}{5}x + 32$ "pretvara Celziusove stupnjeve u Fahrenheitove".

Primjer 2. Jednoliko gibanje po pravcu.
Ako je y koordinata položaja čestice koja se giba po pravcu jednolikom brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ zauzima položaj (tj. koordinatu) y_0, onda je

$$y = v_0 \cdot t + y_0$$

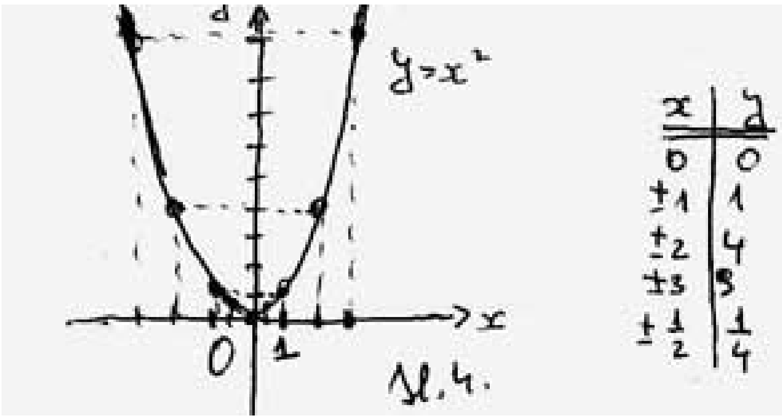
(tu je stalna brzina v_0 koeficijent smjera, a y_0 odrezak na y-osi)(sl.3.).



Jezikom funkcija: Linearna funkcija $f(t) := v_0 \cdot t + y_0$ opisuje položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu brzinom v_0, a koja u trenutku $t = 0$ ima položaj y_0.

Kvadratna funkcija. Potencije. Polinomi.

Funkcija $f(x) := x^2$ je funkcija kvadriranja tj. stavljanje na drugu potenciju (kraće kvadriranje ili druga potencija).
Njen je graf parabola s jednadžbom $y = x^2$ (sl.4.).



To je primjer kvadratne veze, koja, na primjer, povezuje duljinu stranice kvadrata x i njegovu površinu y (tu y kvadratno ovisi o x).
Nešto složenija, a u primjenama, puno češća kvadratna veza jest ona oblika

$$y = ax^2$$

(s pripadnom funkcijom $f(x) := ax^2$), gdje je a realni parametar (u pravilu se traži da bude $a \neq 0$).

Primjer 3. Kvadratne veze oblika $y = ax^2$ su, na primjer:
(i) izmedju duljine stranice jednakostraničnog trokuta i njegove površine.
(ii) izmedju polumjera kruga i njegove površine.
(iii) izmedju proteklog vremena i duljine prijedjenog puta čestice koja se giba po pravcu pod utjecajem konstantne (stalne) sile, ako je u trenutku kad smo počeli mjeriti vrijeme brzina čestice bila nula (zašto je potreban ovaj posljednji uvjet?).

Opća kvadratna funkcija - polinom 2. stupnja. To je funkcija

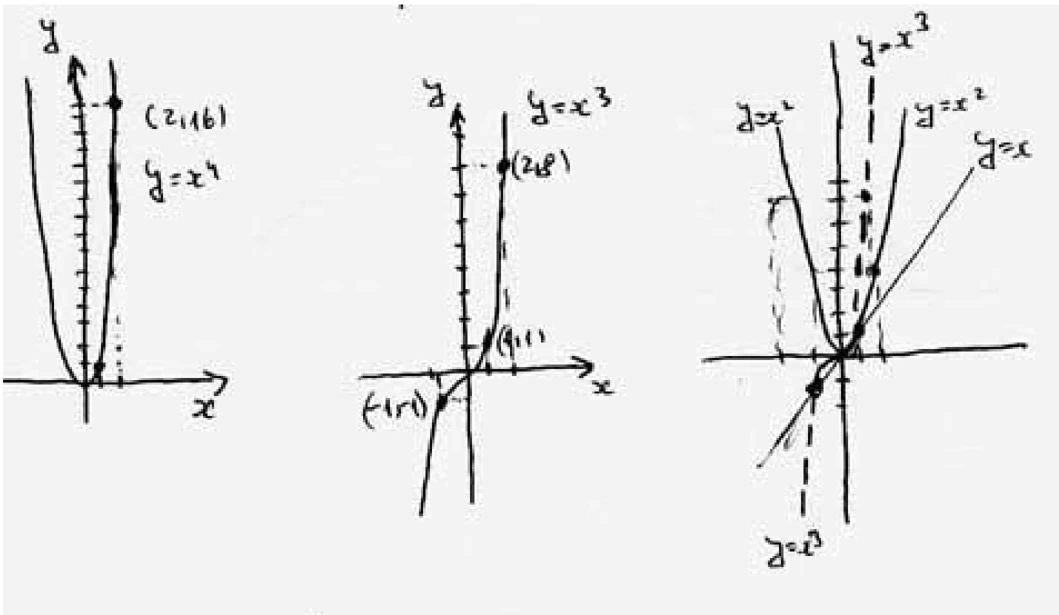
$$f(x) := ax^2 + bx + c$$

gdje su a, b, c realni parametri i $a \neq 0$. Graf joj je parabola s jednadžbom

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ta se funkcija i graf podrobno obradjivala u srednjoj školi. Ima veliku ulogu u primjenama, na primjer gibanje na pravcu pod utjecajem stalne sile, poput vertikalno hitca. Općenito, ona opisuje veze izmeddju dviju veličina pri kojoj se pri promjeni jedne od veličina, brzina promjene druge mijenja linearno, odnosno ako je akceleracija promjene stalna. O tome će više biti riječi poslije.

Potencije oblika $f(x) := x^n$ odnosno $f(x) := ax^n$, gdje je n prirodan broj i a realan broj različit od nule predočene su na (sl.5.).



Sl. 5.

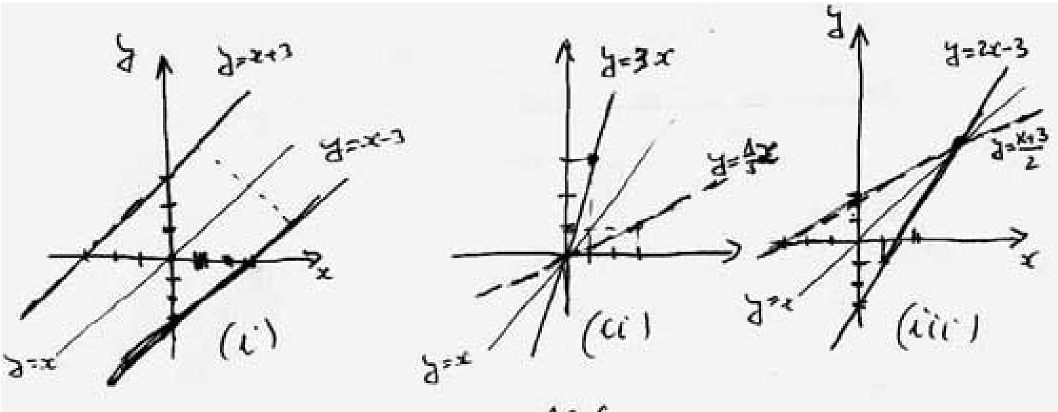
Inverzna funkcija i inverzna veza medju veličinama
1. Inverzna funkcija linearne funkcije opet je linearna funkcija.

Linearna veza $y = ax + b$ medju veličinama x, y eksplicitno pokazuje kako x ovisi o y. Inverzna veza pokazuje kako y ovisi o x. Tu je $x = \frac{y-b}{a}$ tj. $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.
Inverzna funkcija linearne funkcije $f(x) := ax + b$ je funkcija

$$f^{-1}(x) := \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

Uočite da se izraz za inverznu funkciju dobije tako da se u inverznoj vezi stavi x umjesto y. To treba tumačiti ovako:
Funkcija f najprije x množi s a, potom rezultatu dodaje b.
Inverzna funkcija f^{-1} vrši suprotnu (inverznu) radnju, u suprotnom redoslijedu. Dakle:
Funkcija f^{-1} najprije od x oduzima b, potom rezultat dijeli s a.

Primjer 4. Ove su veze medjusobno inverzne (i u koordinatnoj ravnini su predočene istim pravcem). Za razliku od toga grafovi funkcije i njoj inverzne funkcije, predočeni u istom koordinatnom sustavu, simetrični su s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$ (sl.6.).



Sl.6.

(i) $y = x - 3$ i $x = y + 3$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := x - 3: \ f^{-1}(x) = x + 3$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = x - 3$ i $y = x + 3$.
(ii) $y = 3x$ i $x = \frac{y}{3}$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := 3x: \ f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 3x$ i $y = \frac{x}{3}$.
(iii) $y = 2x - 3$ i $x = \frac{y+3}{2}$. Na jeziku funkcija imamo:

$$f(x) := 2x - 3: \ f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

s jednadžbama pripadnih grafova $y = 2x - 3$ i $y = \frac{x+3}{2}$.

Inverzna funkcija kvadratne funkcije - funkcija "drugi korijen" Od prije je poznato da je "korjenovanje inverzno potenciranju" i oznake $\sqrt{\ }$ za drugi korijen, odnosno $\sqrt[n]{\ }$ za n-ti korijen.

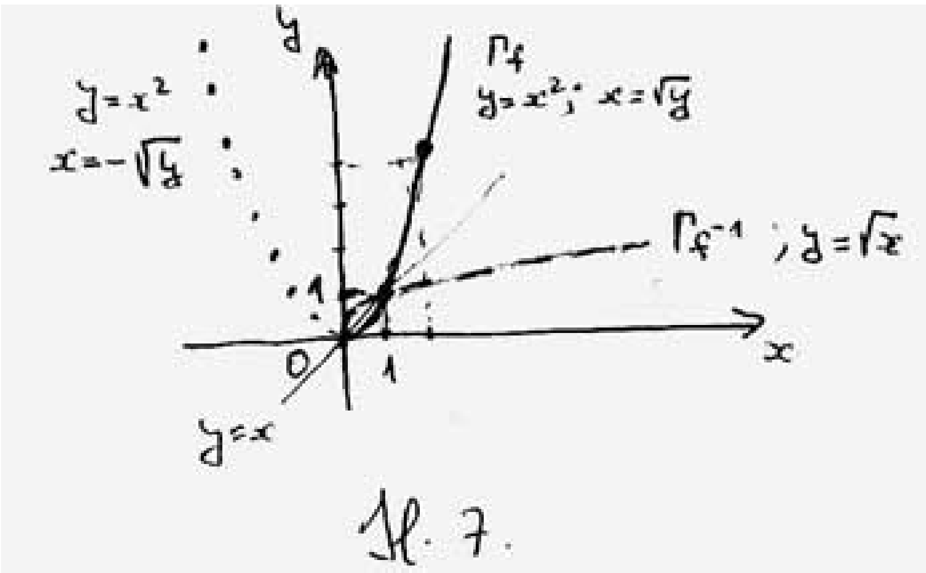
Ako je $y = x^2$ onda je, općenito, $x = \pm\sqrt{y}$. Za te su dvije veze ne govorimo da su medjusobno inverzne (već samo da su ekvivalentne). To je zato što u vezi $y = x^2$ dvije različite (medjusobno suprotne) vrijednosti veličine x odgovaraju istoj vrijednosti veličine y. Izuzetak je kad obje veličine imaju vrijednost 0. Medjutim, ako se ograničimo **samo na pozitivne** vrijednosti x, onda su

$$y = x^2 \ i \ x = \sqrt{y}$$

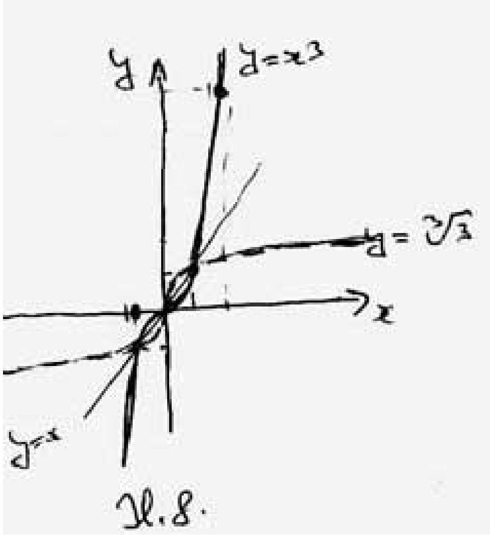
medjusobno inverzne veze. Tu smo $\pm$ izbacili jer je $x \geq 0$, a poznato je da su vrijednosti drugog korijena takodjer pozitivni (li nula). Zato su funkcije:

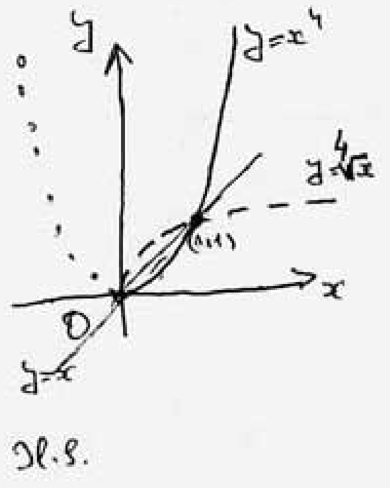
$$f(x) := x^2, \ x \geq 0 \ i \ f^{-1}(x) := \sqrt{x}$$

medjusobno inverzne i njihovi su grafovi simetrični s obzirom na pravac s jednadžbom $y = x$ (sl.7.).



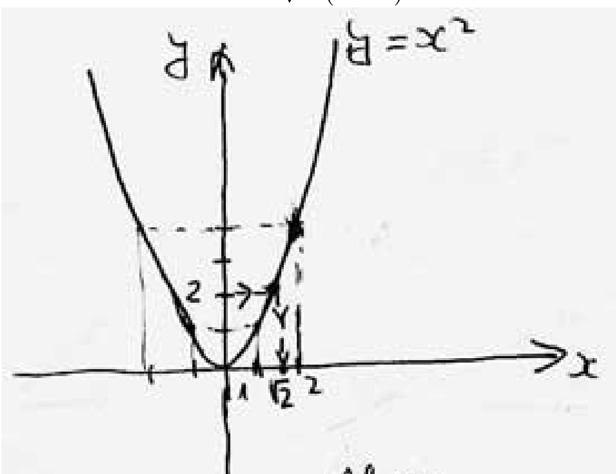
Slično:
$y = x^3$ i $x = \sqrt[3]{y}$ medjusobno su inverzne veze.
$f(x) := x^3$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ medjusobno su inverzne funkcije (tu nema ograničenja na x). Tako je i za petu, sedmu i, općenito, neparnu potenciju (sl.8.).
$y = x^4$ za $x \geq 0$ i $x = \sqrt[4]{y}$ medjusobno su inverzne veze, odnosno $f(x) := x^4$ za $x \geq 4$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ medjusobno su inverzne funkcije. Tako je i za šestu, osmu i svaku parnu potenciju (sl.9.).





Primjer 5. Zadan je koordinatni sustav u koji je ucrtan graf kvadratne funkcije $f(x) := x^2$. Može li nam taj graf pomoći da grafički odredimo $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ i, općenito, $\sqrt{a}$ ako je poznat $a > 0$?

Može. Na primjer, $\sqrt{2}$ dobit ćemo tako da na y-osi iz 2 idemo usporedno s x-osi u pozitivnom usmjerenju do grafa, potom iz te točke okomito na x-os, koji ćemo presjeći u točki s koordinatom $\sqrt{2}$ (sl.10.).



sl.10.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

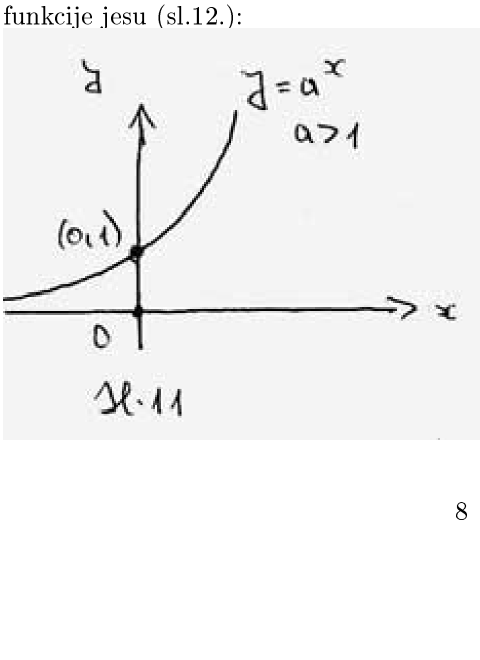
Ponovimo, ako je baza $a > 1$ onda eksponencijalna funkcija

$$f(x) := a^x$$

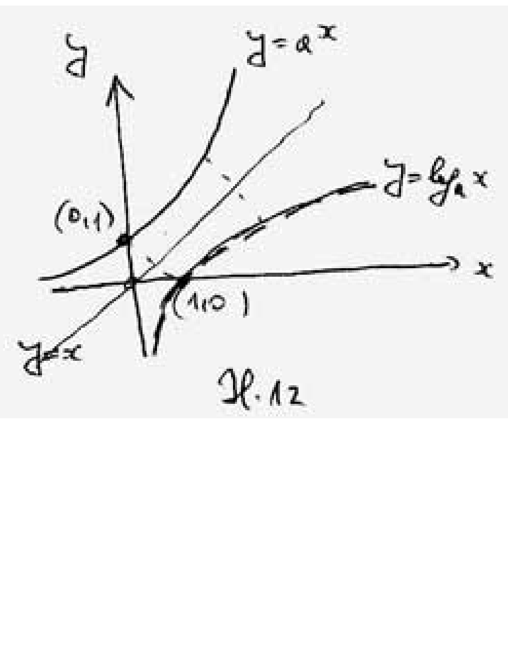
ima ova svojstva (sl.11.):

1. f ubrzano raste
2. f je pozitivna (graf joj je iznad osi x)
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, tj. svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$, jer je $a^0 = 1$; tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa eksponencijalne funkcije.
5. $a^x > 1$ za $x > 0$, a $a^x < 1$ za $x < 0$

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) := a^x$ je logaritamska funkcija s bazom a, tj funkcija $f^{-1}(x) := log_a(x)$, a inverzna veza eksponencijalne veze $y = a^x$ jest veza $x = log_a(y)$.
Svojstva logaritamske funkcije, s bazom $a > 1$, inverzna onima eksponencijalne funkcije jesu (sl.12.):



sl.11



sl.12

1. log_a usporeno raste
2. log_a je definirana samo za $x > 0$ (graf joj je desno od osi y)
3. log_a postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf.
4. $f(1) = 0$, jer je $log_a(1) = 0$; tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa logaritamske funkcije.
5. $log_a(x) > 0$ za $x > 1$ tj. graf je iznad x-os za $x > 1$.
$log_a(x) < 0$ za $0 < x < 1$ tj. graf je ispod x-osi za $0 < x < 1$.

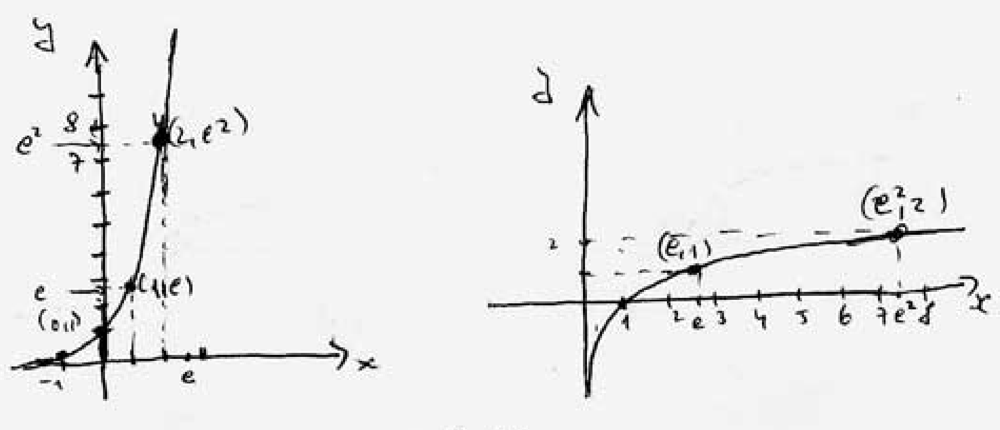
Primjer 6. (prirodni logaritam). U primjenama se prirodno javlja broj $e \approx 2.7$, koji je iracionalan (čak transcendentan). Logaritam s bazom e označava se obično kao ln. Dakle

$$ln := log_e$$

Eksponencijalna funkcija s bazom e obično se označava kao exp. Dakle

$$exp(x) := e^x$$

Na (sl.13.) su grafovi ovih funkcija s nekoliko istaknutih točaka.



sl. 13.

Takodjer, logaritamsku funkciju s bazom 10 obično pišemo bez baze, kao log. Dakle

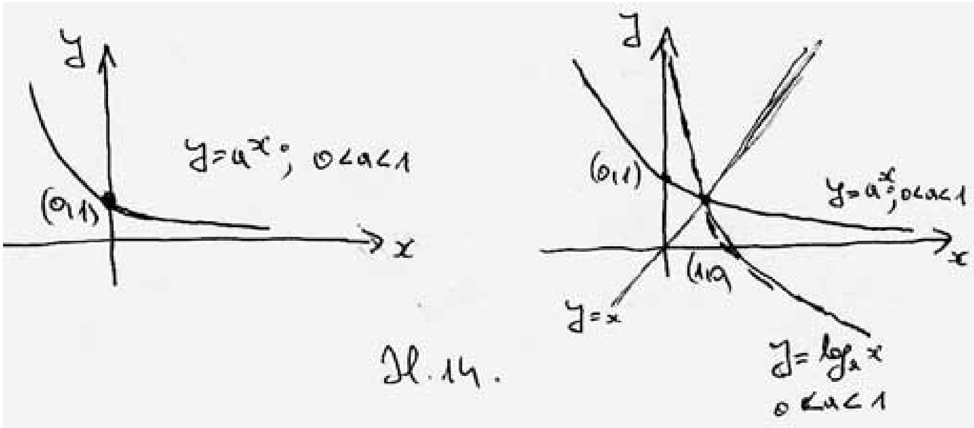
$$log := log_{10}$$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija s bazom manjom od 1.

Eksponencijalne funkcije (odnosno logaritamske) dijele se u dvije skupine:

I. skupina. U njoj je baza $a > 1$. Te smo funkcije već razmatrali i jedno od svojstava tih funkcija da su **rastuće**.

II. skupina. U njoj je $0 < a < 1$. Te funkcije imaju svojstva analogna onima za $a > 1$, a **glavna** razlika je da su te funkcije **padajuće** (sl.14.).



Sl. 14.

Evo popisa svojstava tih funkcija.

Ako je $f(x) := a^x$ i $0 < a < 1$ onda:
1. f usporeno pada
2. f je pozitivna (graf joj je iznad osi x)
3. f je definirana za svaki x, tj. a^x postoji za svaki x, tj. svaki pravac okomit na x-os siječe graf
4. $f(0) = 1$, jer je $a^0 = 1$; tj. točka $(0, 1)$ je točka grafa eksponencijalne funkcije.
5. $a^x < 1$ za $x > 0$, a $a^x > 1$ za $x < 0$

Funkcija log_a za $0 < a < 1$ ima ova svojstva:
1. log_a usporeno pada
2. log_a je definirana samo za $x > 0$ (graf joj je desno od osi y)
3. log_a postiže sve vrijednosti, tj. svaki pravac okomit na y-os siječe graf.
4. $f(1) = 0$, jer je $log_a(1) = 0$; tj. točka $(1, 0)$ je točka grafa logaritamske funkcije.
5. $log_a(x) > 0$ za $0 < x < 1$ tj. graf je iznad x-os za $0 < x < 1$.
$log_a(x) < 0$ za $x > 1$ tj. graf je ispod x-osi za $x > 1$.

Važna svojstva koja imaju sve eksponencijalne funkcije i njima analogna svojstva logaritamskih funkcija.

(I) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (zbroj prelazi u umnožak)
$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$ (umnožak prelazi u zbroj)

$a^{x-y} = a^x : a^y$ (razlika prelazi u količnik)
$log_a(x : y) = log_a(x) - log_a(y)$ (količnik) prelazi u razliku)

(II) $(a^x)^y = a^{xy}$ (potenciranje prelazi u množenje).
$log_a(x^y = ylog_a(x)$ (potenciranje prelazi u množenje).

Važna svojstva koja povezuju eksponencijalnu i logaritamsku funkciju s jednakim bazama - par medjusobno inverznih funkcija.

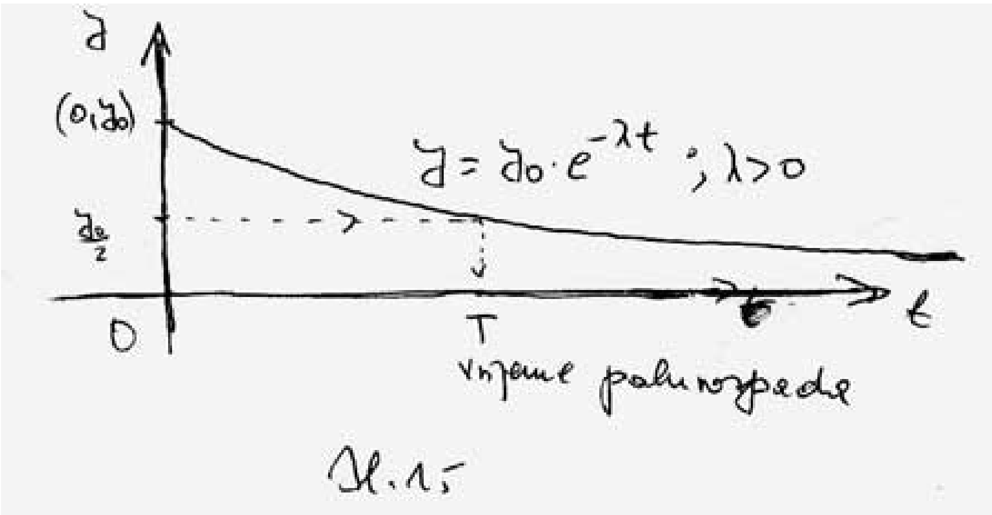
$log_a(a^x) = x$ za svaki realan broj x.
$a^{log_a(x)} = x$ za svaki pozitivan broj x (tj. za $x > 0$).

Primjer 7. (primjer eksponencijalne zavisnosti

Naka je t vrijeme i y količina radioaktivne materije. Tada su te dvije veličine exsponencijalno zavisne (u idealnim uvjetima):

$$y = y_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Tu je y_0 količina materije u $t = 0$, a $\lambda > 0$ konstanta ovisna o vrsti materije (može se i preciznije definirati) (sl.15). Ovaj ćemo važan primjer podrobnije razmatrati kad budemo obradjivali diferencijalne jednadžbe.



Inverzne funkcije i rješavanje jednadžba.

Ako f ima inverznu funkciju onda je rješenje jednadžbe

$$f(x) = b$$

$$x = f^{-1}(b)$$

(uz uvjet da $f^{-1}(b)$ postoji).
Dakle, takve jednadžbe imaju točno jedno rješenje ili nemaju rješenja.

Primjer 8.
1. Jednadžba: $x - 2 = 3$ —– Rješenje: $x = 3 + 2$
2. Jednadžba: $2 \cdot x = 3$ —– Rješenje: $x = 3 : 2$
3. Jednadžba: $x : 2 = 3$ —– Rješenje: $x = 3 \cdot 2$
4. Jednadžba: $x^2 = 3$ —– Rješenje: $x = \pm\sqrt{2}$
(predznak se pojavljuje jer su kvadriranje i korjenovanje inverzne samo za pozitivne brojeve).
5. Jednadžba: $2^x = 3$ —– Rješenje: $x = log_2(3)$

6. Jednadžba: $log_2(x) = 3$ —– Rješenje: $x = 2^3$

7. Jednadžba: $2^x = -3$ —– Rješenje: Nema ga jer $log_2(-3)$ ne postoji

8. Jednadžba: $x^2 = -3$ —– Rješenje: Nema realnih rješenja jer $\sqrt{-3}$ nije realan broj

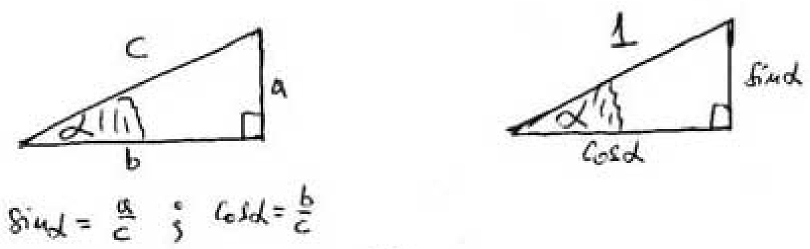
9. Jednadžba: $x^3 = -2$ —– Rješenje: $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$.

10. Jednadžba: $log_2(x) = -3$ —– Rješenje: $x = 2^{-3}$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

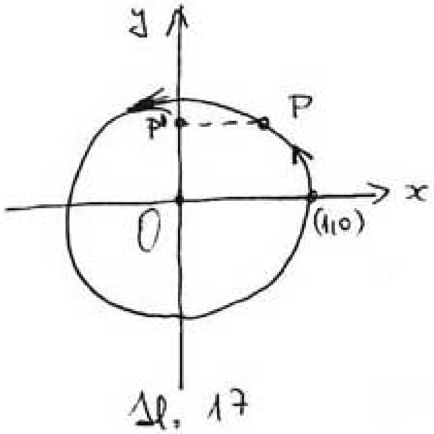
Trigonometrijske funkcije i arkus funkcije

Trigonometrijske funkcije obradjuju se u srednjoj školi; s njihovim inverzima - arkus funkcijama susrećemo se prvi put.
Vidjeli smo da su linearne veze vrlo česte (na primjer vrijeme i položaj čestice koja se giba jednoliko po pravcu), kvadratne takodjer (na primjer, vrijeme i položaj čestice pri slobodnom padu); eksponencijalne veze dobro opisuju radioaktivni raspad itd. Trigonometrijske funkcije opisuju periodna gibanja (titranja, valovi) i to je jedna od njihovih najvažnijih uloga.
Temelj za te funkcije jest poznavanje odnosa izmedju kuta i stranica pravokutnog trokuta, posebice onog s hipotenuzom duljine 1 (sl.16.).



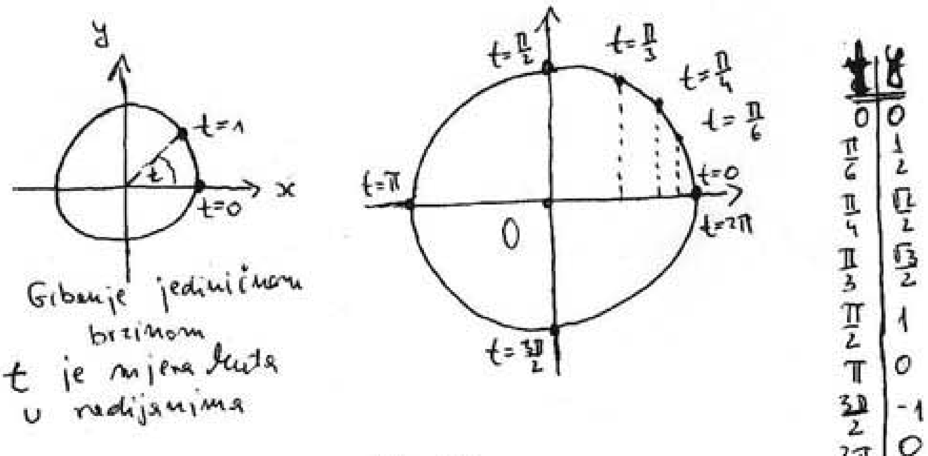
Sl. 16

Primjer 9. Zamislimo da se čestica jednoliko giba po jediničnoj kružnici, suprotno od kazaljke na satu, jediničnom brzinom. Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t (sl.17.).



Sl. 17

Vidimo da projekcija P' točke P titra po y-osi izmedju točaka $(0, -1)$ i $(0, 1)$, dok P kruži.
Položaj u nekom vremenu t ovisi o položaju u $t = 0$, zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(1, 0)$ (dakle na x-osi) (sl.18.).



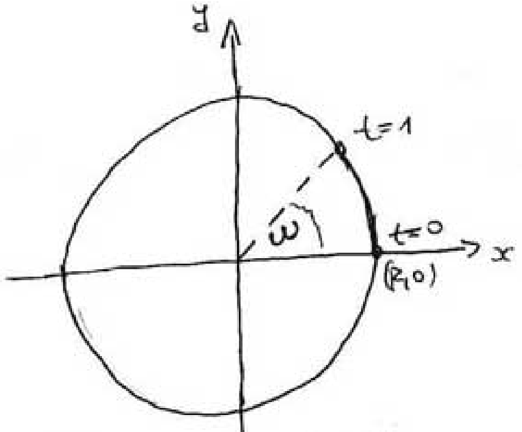
sl. 18.

Kako je brzina jedinična, a opseg kružnice 2π, jedan okret traje 2π vremenskih jedinica (pola okreta π vremenskih jedinica, četvrtina okreta $\frac{\pi}{2}$ vremenskih jedinica itd.), položaj y povezan je s vremenom sinusnom vezom:

$$y = \sin t$$

To vidimo i iz tablice.

Primjer 10. Zamislimo sad da se čestica jednoliko giba po kružnici polumjera R, suprotno od kazaljke na satu, kutnom brzinom ω u **radijanima** (to znači da čestica u jedinici vremena prebriše središnji kut ω) (sl.19).



sl. 19

Postavimo tu kružnicu u koordinatni sustav. Treba opisati:
(i) položaj projekcije te točke na y-osi ovisno o vremenu t.
(ii) položaj projekcije te točke na x-osi ovisno o vremenu t.

(i) položaj te točke u koordinatnom sustavu ovisno o vremenu t.

Položaj ovisi o položaju u $t = 0$, zato, kao najjednostavniju mogućnost, razmotrimo onu ako je početni položaj u točki $(R, 0)$ (dakle na x-osi).
Kako je kutna brzina ω, za t vremenskih brzina prebriše se kut ωt, pa vrijedi (sl.20.):
(i)

$$y = R\sin(\omega t)$$

(ii)

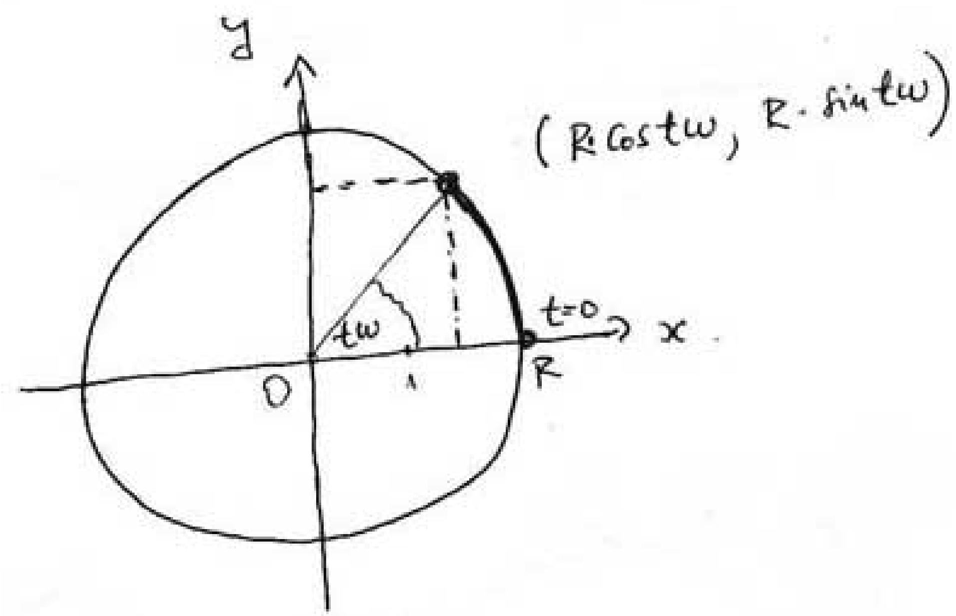
$$x = R\sin(\omega t)$$

(iii)

$$(x, y) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)$$

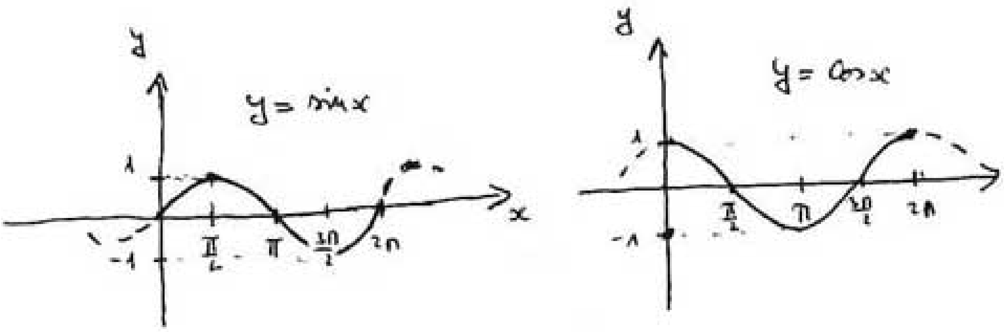
Posebice, ako je $R = 1$ i $\omega = 1$ duljinskih jedinica za jednu vremensku, onda je

$$(x, y) = (\cos t, \sin t)$$



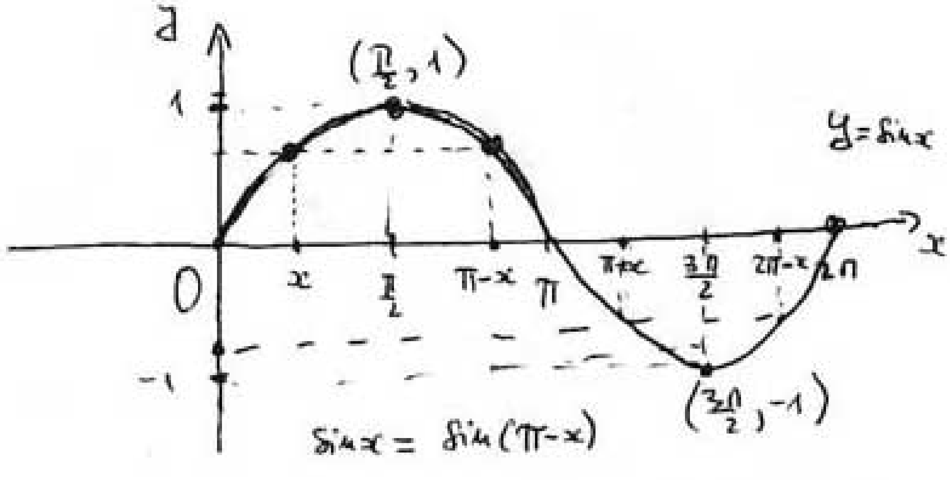
Sl. 20
Položaj čestice nakon t vremenskih jedinica

Kad crtamo grafove pripadnih funkcija sinus i kosinus, onda, obično, ne pišemo t, već x, a drugu koordinatu, prema običaju označavamo kao y. Dakle, imamo funkcije sin i cos i njihove grafove $y = \sin x$ i $y = \cos x$ (sl. 21.).

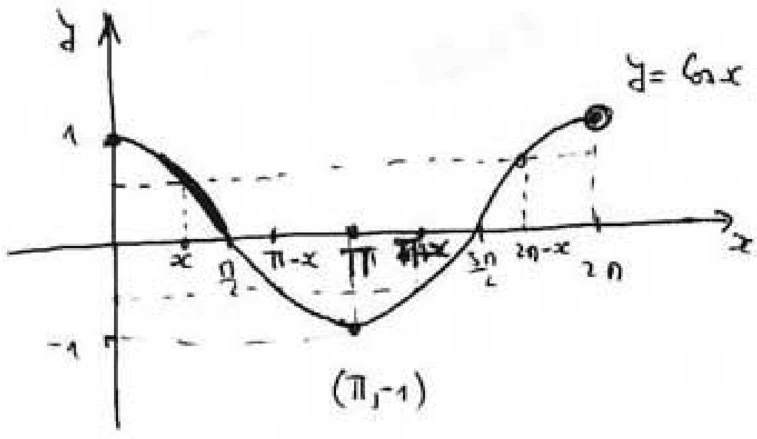


sl. 21

Primjer 11. (S) Uočimo ponašanje funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi>$ (sl.22).
(i) Na tom intervalu sinus svaku **pozitivnu** vrijednost iz intervala $<-1, 1>$ postigne točno dva puta: jednom u nekom x, a drugi put u $\pi - x$. Pripadna negativna vrijednost, postiže se u $\pi + x$ i $2\pi - x$. Broj 1 postiže se jednom - u $x = \frac{\pi}{2}$, broj -1 takodjer, u $x = \frac{3\pi}{2}$
(ii) Sinus, po četvrtinama, najprije usporeno raste, pa ubrzano pada, pa usporeno pada, pa ubrzano raste.
Na intervalu $[\pi, 2\pi>$ sinus se opet ponaša kao i na $[0, 2\pi>$ itd. (**periodnost** s periodom 2π).
(C) Slično je za funkciju kosinus (sl.23).

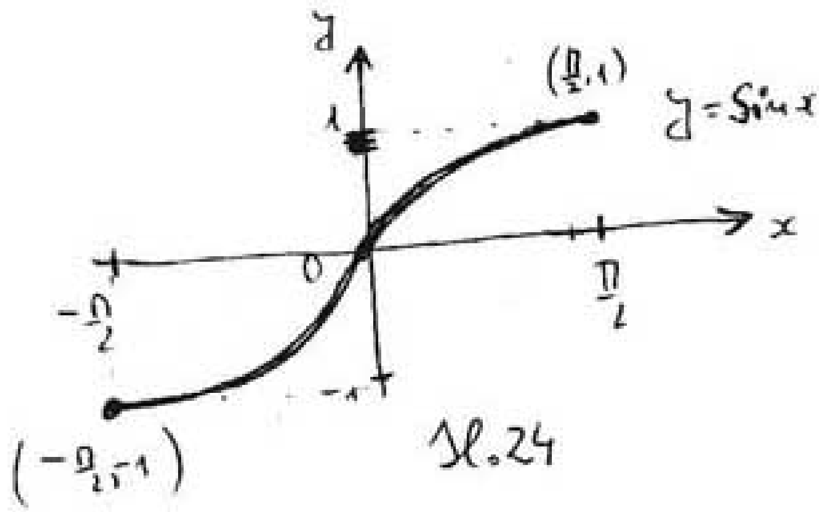


sl.22.



sl.23.

Primjer 12. Uočimo ovo svojstva funkcija sinus:
(S) Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ funkcija sin postiže **svaku** vrijednost iz intervala $[-1, 1]$ **točno** jedan put (sl.24.).



sl.24

To znači da je na tom intervalu sinus injektivna funkcija i da ima inverznu funkciju: oznaka Sin^{-1} ili $Arcsin$ (čitamo *arkus sinus*). Veliko S u Sin upozorava nas da ne gledamo funkciju za sve x, već samo za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Dakle:

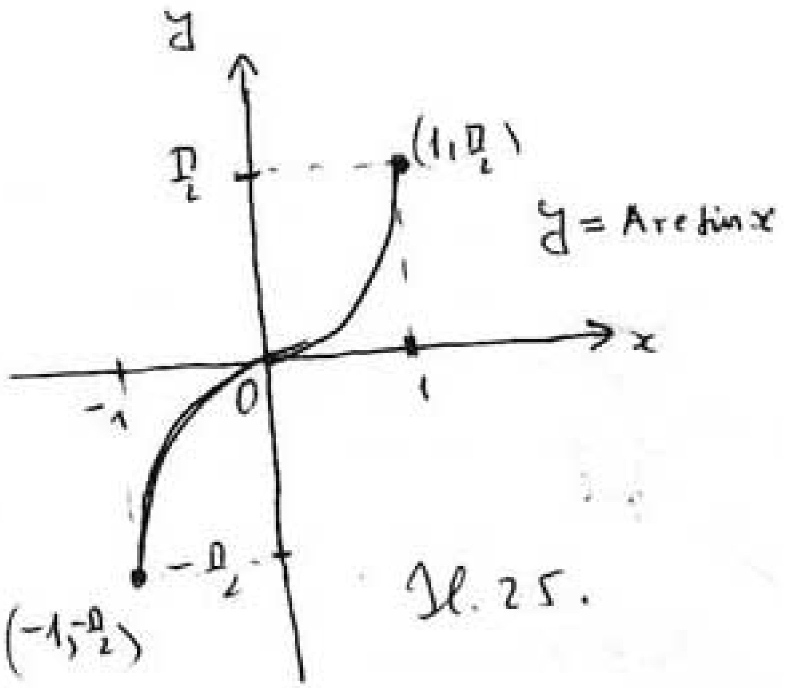
$$Sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

$$Sin^{-1} = Arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Osnovne formule koja povezuju sinus i arkussinus (kao medjusobno inverzne funkcije):

(I) $sin(Arcsin(x)) = x$ za sve $x \in [-1, 1]$
(II) $Arcsin(sin(x)) = x$ za sve $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Graf funkcija $Arcsin$ (sl. 25.) i sinus (za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) simetrični su s obzirom na pravac $y = x$ (ali nije ih zgodno crtati skupa).

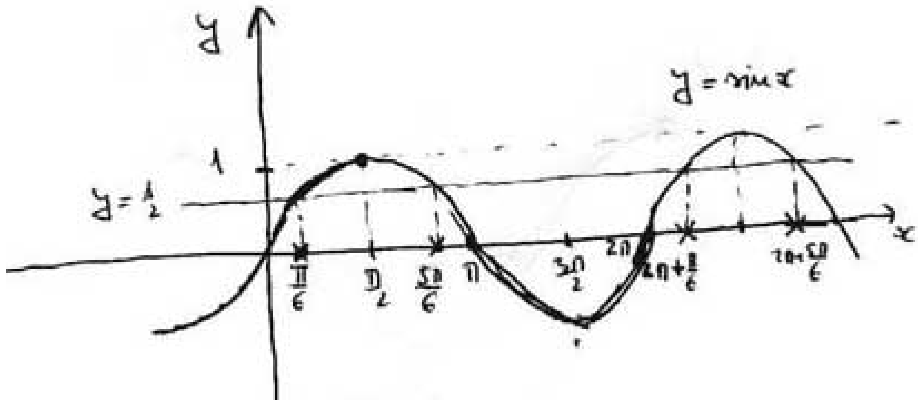


Primjer 13. Odredimo $Arcsin(1)$, $Arcsin(-1)$, $Arcsin\frac{1}{2}$, $Arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, jer je $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$Arcsin(-1) = -1$, jer je $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
$Arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$), jer je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$Arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, jer je $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Primjer 14. Rješavanje trigonometrijskih jednadžba.
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = \frac{1}{2}$
(a) na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tj. za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(b) na intervalu $[0, 2\pi]$
(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

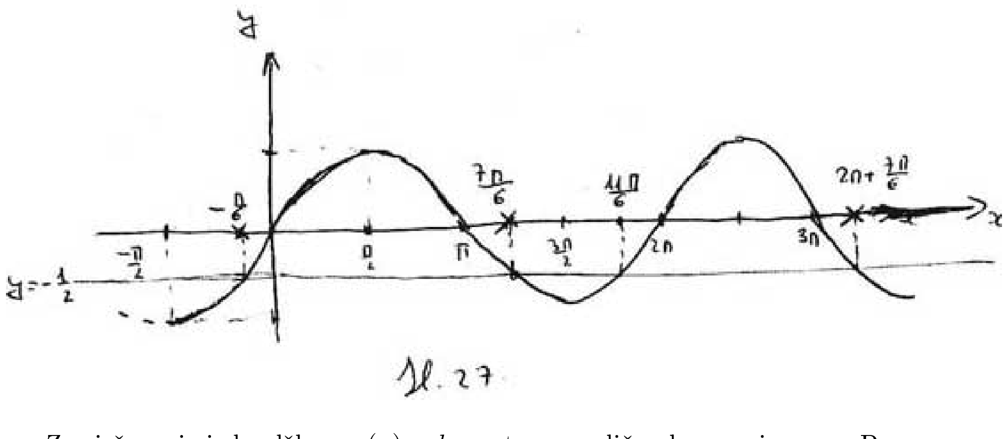
Kad riješimo a), onda ćemo lako riješiti i b) i c).
Rješenje u a) je jedinstveno: $x_0 = Arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
U b) ima dva rješenja: $x_1 = x_0 = \frac{\pi}{6}$ (iz a)) i $x_2 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
U c) su dvije beskonačne serije rješenja, a dobiju se dodavanjem $2k\pi$ svakom od rješenja iz b).
I. serija: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
II.serija: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
To je zbog periodnosti. Tu k prolazi skupom cijelih brojeva: $0, \pm 2, \pm 3, ...$ Geometrijska ilustracija rješenja je na sl.26.



Sl.26.

Primjer 15. Rješavanje trigonometrijskih jednadžba - nastavak.
Riješimo jednadžbu $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
(a) na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tj. za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(b) na intervalu $[0, 2\pi]$
(c) u skupu realnih brojeva (sva rješenja).

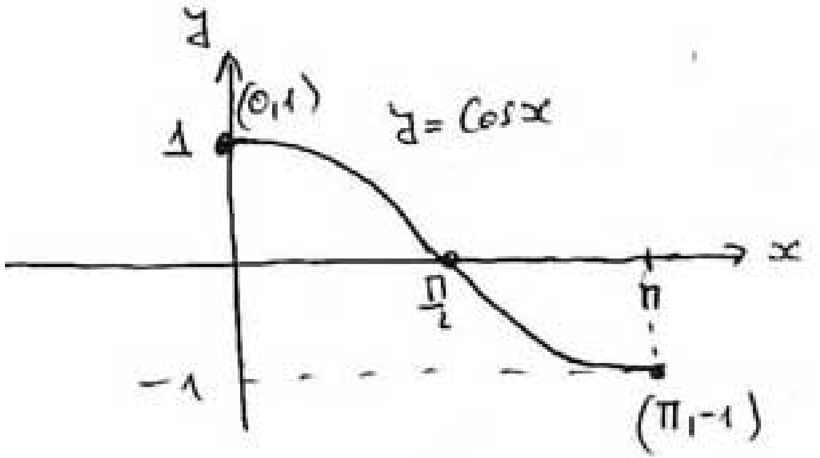
Postupamo kao i u Primjeru 14. Postoji mala razlika u postupku (zbog negativnog predznaka).
Rješenje u a) opet je jedinstveno: $x_0 = Arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$
(napominjemo da je, zbog neparnosti, dovoljno znati računati arkussinus za pozitivne brojeve).
U b) ima dva rješenja: $x_1 = \pi - x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ i $x_2 = 2\pi + x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
U c) je kao i u Primjeru 14.: I. serija: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
II.serija: $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$
Geometrijska ilustracija rješenja je na sl.27.



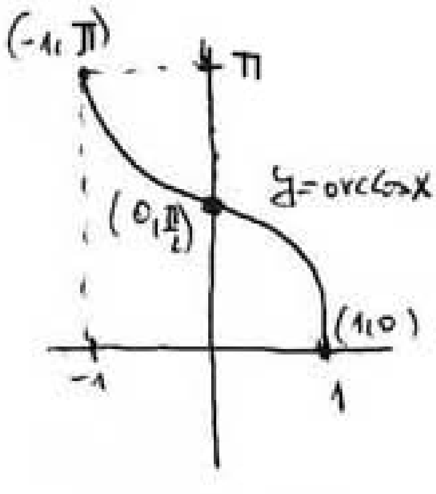
Sl. 27

Za rješavanje jednadžbe $\cos(x) = b$, postupa se slično kao sa sinusom. Prvo, uvodi se inverzna funkcija *Arccos* ovako:

1. Vidimo da cos na intervalu $[0, \pi]$ postiže svaku vrijednost iz $[-1, 1]$ (sl.28.), pa ima inverznu funkciju *arccos* (sl.29).



sl. 28.



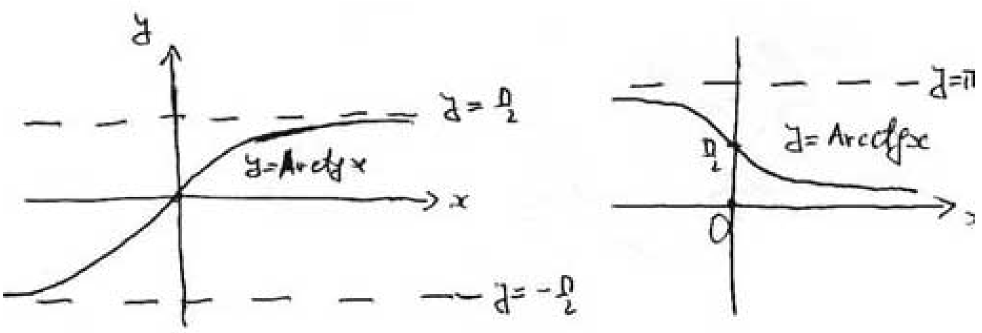
sl. 29.

2. Postupamo kao kod sinusa, dakle:
$Cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$
$Arccos := Cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$
Vrijedi (veza izmedju dviju medjusobno inverznih funkcija):
$Arccos(cos(x)) = x$ za sve $x \in [0, \pi]$
$cos(Arccos(x)) = x$ za sve $x \in [-1, 1]$

Primjer 16. Riješimo jednadžbu $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

1.korak (rješenje na intervalu $[0, \pi]$):
$x_0 = Arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$
2. korak (skup svih rješenja): $x = \pm x_0 + 2k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(tu smo iskoristili parnost funkcije kosinus pa nismo morali tražiti drugo rješenje na intervalu $[0, 2\pi]$; inače, to je rje šenja: $2\pi - x_0 = \frac{5\pi}{3}$).

Funkcije $Arctg$ i $Arcctg$ uvodimo slikom 30.



Sl. 30.

V. Pitanja i zadaci

1. Nadjite što više primjera linearne veze medju veličinama u matematici, fizici, kemiji i sl.

2. Opišite graf funkcije $f(x) = ax^2$. Navedite koja svojstva ovise o parametru a, a koja ne ovise.

3. Opišite graf kvadratne funkcije ovisno o parametrima.

4. (i) Usporedite svojstva eksponencijalnih funkcija s bazom većom od 1 odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?
(i) Usporedite svojstva logaritamskih funkcija s bazom većom od 1 odnosno manjom od 1. Koja su svojstva zajednička, a koja različita i kako?

5. (i) Napišite formulu koja povezuje eksponencijalne funkcije s različitim bazama (tj. a^x pomoću baze b). Posebno, zapišite a^x pomoću baze e.
(i) Napišite formulu koja povezuje logaritamske funkcije s različitim bazama. Posebno, zapišite $log_a(x)$ pomoču ln, odnosno log.

6. U Primjeru 8. za svaku jednadžbu zapišite f, f^{-1} i b.

7. Grafički riješite jednadžbe iz Primjera 8. Obrazložite zašto neke nemaju rješenja.

8. Usporedite grafove funkcija Sin i $Arcsin$.

9. Riješite jednadžbe $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ i $\sin(x) = -1$ prema uzoru na Primjere 14. i 15. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.

10. Riješite jednadžbe $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = 1$ i $\cos(x) = -1$ prema uzoru na Primjer 16. Uočite sličnosti i razlike. Interpretirajte i geometrijski.

Lekcije iz Matematike 1.

11. Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje

I. Naslov i objašnjenje naslova

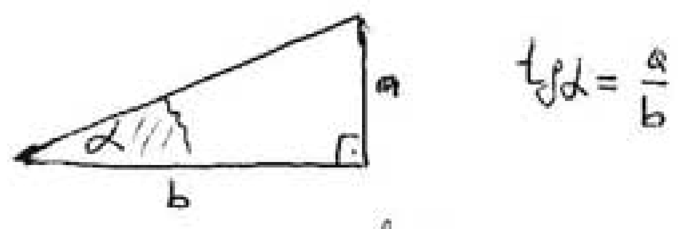
U lekciji se uvodi pojam prirasta funkcije, brzine prirasta, derivacije funkcije i veze s tangentom grafa funkcije te brzinom čestice koja se giba po pravcu. Upućuje se na važnost pojma derivacije u inženjerstvu.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem opisa brzine neke reakcije, ili, općenito, brzine promjene jedne veličine s obzirom na promjenu druge veličine, jedan je od temeljnih inženjerskih problema. Taj problem analogan je problemu opisa brzine čestice koja se giba po pravcu. Geometrijski, taj je problem analogan problemu odredjivanja tangente na graf funkcije. Svi se ti problemi matematički rješavaju pomoću pojma derivacije funkcije.
Nadalje, pomoću derivacije se opisuje promjena brzine reakcije (ubrzanje, usporenje i sl.) te djelomice analogni geometrijski pojmovi (konveksnost, konkavnost i sl.).

III. Potrebno predznanje

Intuitivna predožba brzine, posebice brzine čestice koja se giba po pravcu te tangente na krivulju usvaja se već od 7. razreda osnovne škole (pa i odranije). Na tim predožbama uvest ćemo matematički pojam brzine i derivacije funkcije. Za usvajanje pojma derivacije potrebno je i predznanje o osnovnim elementarnim funkcijama.
Takodjer potrebno je znati definiciju tangensa kuta (sl.1.).



sl. 1.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam prirasta neke veličine, prirasta argumenta funkcije i prirasta funkcije

I. Prirast veličine. Vrijednosti neke veličine u pravilu se mijenjaju (ukoliko veličina nije konstantna). Ako uočimo dvije vrijednosti: x_1, x_2 neke veličine x, onda se razlika $x_2 - x_1$ zove **prirast** veličine x. Vidimo da smo tu x_1 shvatili kao prvu vrijednost (možemo zamisliti da smo je dobili pri prvom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu prva), a x_2 kao drugu (možemo zamisliti da smo je dobili pri drugom mjerenju veličine x, odnosno da je ona, prema nekom načelu druga). To pišemo i kao

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Vidimo da Δx označava koliko se promijenila veličina x. Ta se relacija može zapisati i ovako:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

što se može zamišljati kao da se nova vrijednost veličine dobije tako da se staroj vrijednosti doda prirast.

Primjer 1. Tablicom su predočene neke izmjerene vrijednosti veličine x i pripadni prirasti za uzastopne vrijednosti.

II. Prirast funkcije. Uz svaku funkciju povezane su dvije veličine:
1. veličina - **argument funkcije** ili **nezavisna varijabla**, obično se označava kao x
2. veličina - **zavisna varijabla**, to je veličina vrijednosti funkcije, obično se označava kao y.

Na primjer za funkciju $f(x) := x^2$, argument (nezavisna varijabla) je x i ona može imati bilo koju realnu vrijednost;
zavisna varijabla y povezana je s x vezom $y = x^2$ i ona postiže svaku realnu vrijednost koja je veća ili jednaka nuli.

Prirast argumenta je **bilo koja** vrijednost $\Delta x = x_2 - x_1$, gdje su x_1, x_2 dvije izabrane vrijednosti veličine x. Preciznije:
Δx je prirast veličine x kad se ona promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$.

Prirast funkcije u x_1 uvijek je povezan s pripadnim prirastom argumenta, označava se kao $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ i definira kao:

$$\Delta f(x)|_{x=x_1} := f(x_2) - f(x_1)$$

To je prirast funkcije f kad se argument x promijeni od $x = x_1$ do $x = x_2$.
Oznaka $\Delta f(x)|_{x=x_1}$ obično se pijednstavnije kao $\Delta f(x)$.

Primjer 2. Odredimo prirast funkcije $f(x) := x^2$
(i) kad se x promijeni od $x = 1$ do $x = 2$

(ii) kad se x promijeni od $x = 10$ do $x = 11$
(iii) kad se x promijeni od $x = 100$ do $x = 101$
.

(i) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 3$
(ii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(11) - f(10) = 11^2 - 10^2 = 21$
(iii) $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(101) - f(100) = 101^2 - 100^2 = 201$

Prirast funkcije često se shvaća i zapisuje kao prirast zavisne varijable y. Dakle:
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x)$

Treba usvojiti i ovu terminologiju:
x_0 neka početna vrijednost argumenta.
Δx prirast argumenta u x_0
$x_0 + \Delta x$ nova vrijednost argumenta.
$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ prirast funkcije f u x_0 za prirast argumenta Δx (moze se pisati i Δy umjesto $\Delta f(x)$, ako razmatramo veličinu y koja je s veličinom x popvezana vezom $y = f(x)$).

Takodjer, umjesto konkretne vrijednosti x_0, često se piše x, pa oznake ostaju iste osim što se svugdje x_0 zamijeni s x. Na primjer:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Primjer 3. Zapišimo prirast kvadratne funkcije u x.

Tu je $f(x) := x^2$. Zato je prirast u x

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

Nakon računanja dobije se

$$\Delta f(x) = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

To se može pisati kao:

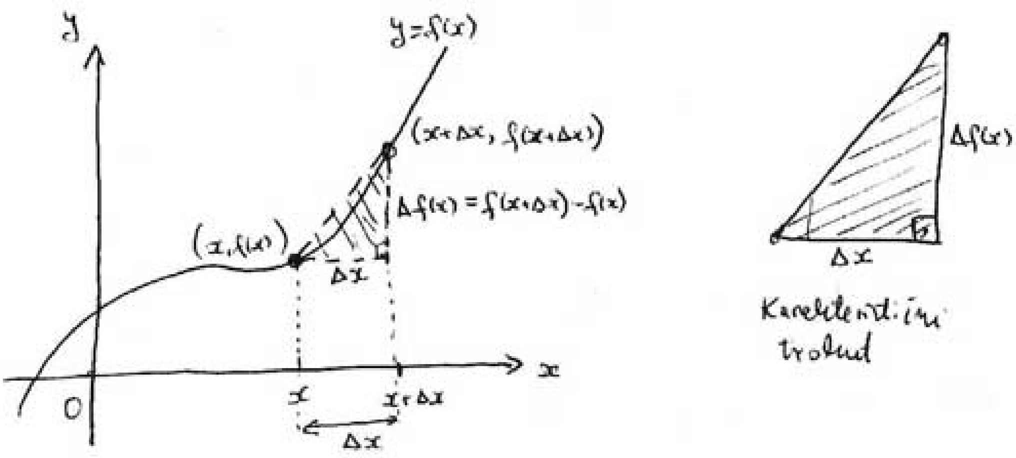
$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

(gdje je y veličina povezana s x vezom $y = x^2$.

Vidimo da je prirast funkcije ovisan o početnoj vrijednosti argumenta (općenito x) i prirastu argumenta (općenito Δx).

Geometrijska predodžba prirasta funkcije i prirasta argumenta.

Na grafu funkcije prirast funkcije i prirast argumenta (ako su oba pozitivna) mogu se predočiti kao **katete karakterističnog pravokutnog trokuta** (sl.2).



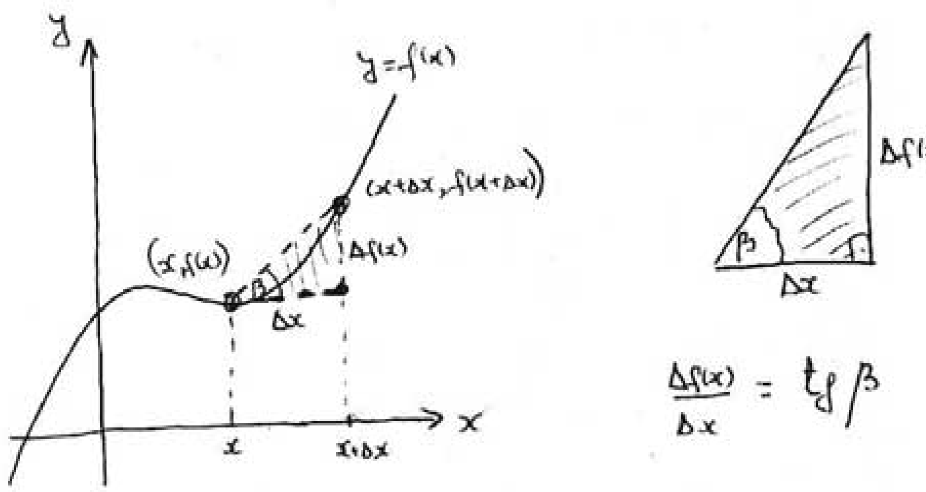
Sl. 2

Relativni prirast, prosječna brzina promjene

U Primjeru 2 stalno je bilo $\Delta x = 1$ dok je početna vrijednost bila, redom, $x = 1$, $x = 10$, $x = 11$. Vidimo da za iste promjene argumenta imamo različite promjene funkcije, ovisno o početnoj vrijednosti.
Općenito, **relativni prirast** funkcije s obzirom na promjenu argumenta je omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta:

Relativni prirast := $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Geometrijska predodžba relativnog prirasta - tangens kuta karakterističnog trokuta (sl.3).



Sl. 3.

Vidimo da se relativni prirast definira poput prosječne (srednje) brzine, zato se naziva i **prosječna brzina promjene funkcije**.
Dakle, relativni prirast $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ je prosječni promjena vrijednosti funkcije na jedinicu promjene argumenta. Naime:

Promjena argumenta Δx ...... Promjena funkcije $\Delta f(x)$
Promjena argumenta jedinična..... Promjena funkcije $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Primjer 4. Odredimo relativni prirast (prosječnu brzinu promjene) kvadratne funkcije.

Iz Primjera 3. dobijemo:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

(u posljednjoj smo jednakosti predpostavili da je $\Delta x \neq 0$, što je prirodno i od sad ćemo uvijek smatrati da je $\Delta x \neq 0$).

Vidimo da za $f(x) := x^2$ vrijedi:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2x, \text{ ako je } \Delta x \approx 0$$

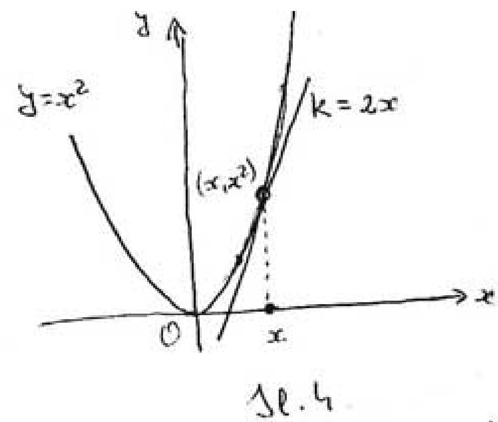
i da je ova približna jednakost to točnija što je prirast manji.

Brzina promjene, derivacija funkcije u točki.

Razmotrimo prosječnu brzinu promjene kvadratne funkcije $f(x) = x^2$, za fiksiranu početnu vrijednost x, a za sve manje priraste Δx, koji se približavaju prema nuli. Vidimo da se ta vrijednost približava prema $2x$, što pišemo kao:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)) = 2x$$

(čitamo: *limes kad delta iks ide u nulu od ...*) Geometrijski, to znači da je koeficijent smjera tangente na graf parabole $y = x^2$ u točki (x, x^2) jednak $2x$ (sl.4).

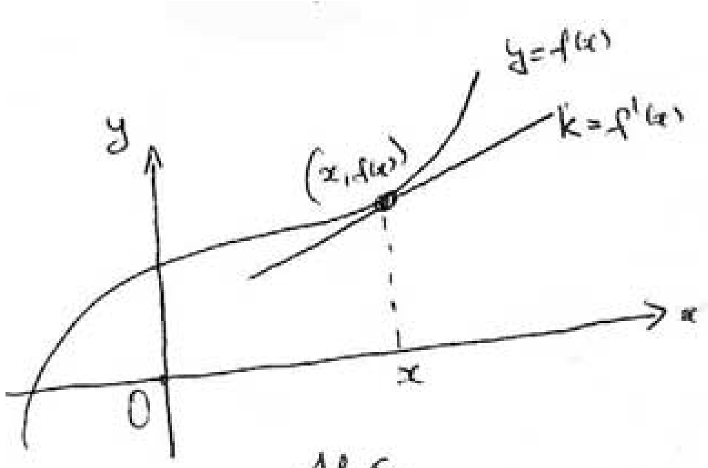


Sl. 4

Vrijednost $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ zove **derivacija** funkcije f u x, označava se kao $f'(x)$, a značenje joj je brzina promjene funkcije f u x. Dakle:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

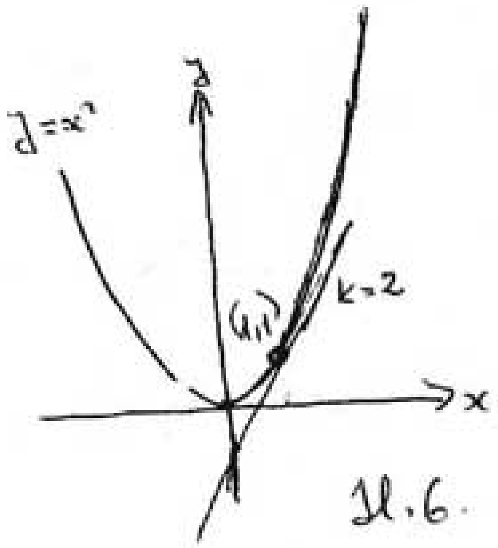
Geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki je koeficijent smjera tangente na graf funkcije (sl.5).



sl.5.

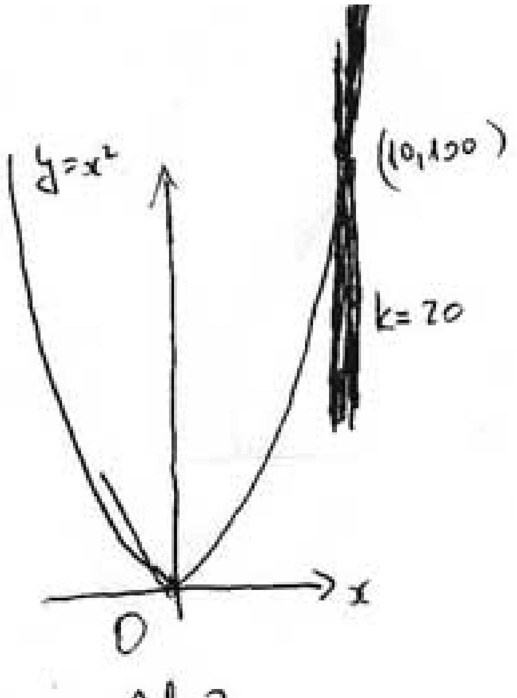
Primjer 5. Odredimo brzinu promjene i interpretirajmo je geometrijski, za funkciju $f(x) := x^2$ redom u $x = 1, 10, 100$.

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Geometrijski, to znači da je $k = 2$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(1, f(1))$, tj. u točki $(1, 1)$ (sl.6.).



sl.6.

$f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$. Geometrijski, to znači da je $k = 20$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(10, f(10))$, tj. u točki $(10, 100)$ (sl.7.).



sl.7.

$f'(100) = 2 \cdot 100 = 200$. Geometrijski, to znači da je $k = 200$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f, tj. na parabolu $y = x^2$ u točki $(100, f(100))$, tj. u točki $(100, 10000)$, što nije lako predočiti.

Definicija derivacije funkcije u točki
Često, u definiciji derivacije umjesto x pišemo x_0 da bismo naglasili da se derivacija računa u konkretnom broju (konkretnoj točki). Takav je pristup, vidjet ćemo, potreban, kad želimo napisati jednadžbu tangente na graf.

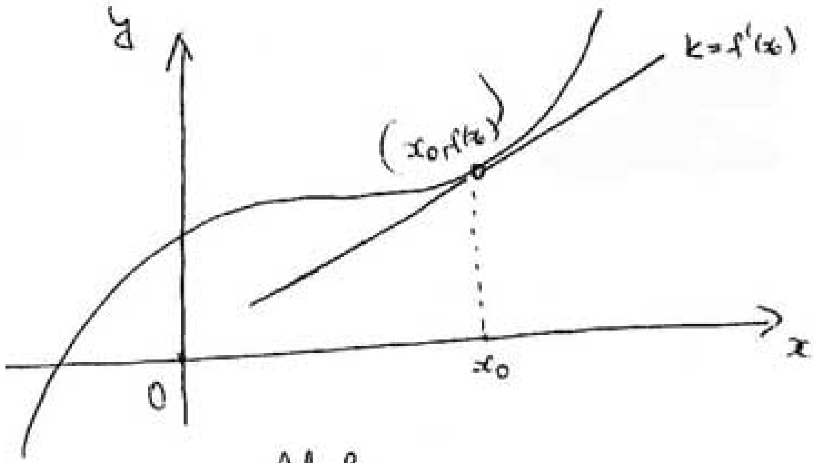
Neka je f funkcija definirana oko točke (broja) x_0). Derivacija funkcije f u x_0 je broj

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Analiza izraza za derivaciju funkcije u točki
U tom se izrazu lijeva strana definira pomoću desne. Na desnoj strani x_0 je stalan (fiksiran), a Δx se mijenja (teži prema nuli). Finalni izraz ne ovisi o Δx već samo o x_0 i funkciji f, upravo kao i lijeva strana.

Precizna formulacija geometrijskog značenja derivacije funkcije u točki

Derivacija funkcije f u x_0 je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ (sl.8.).

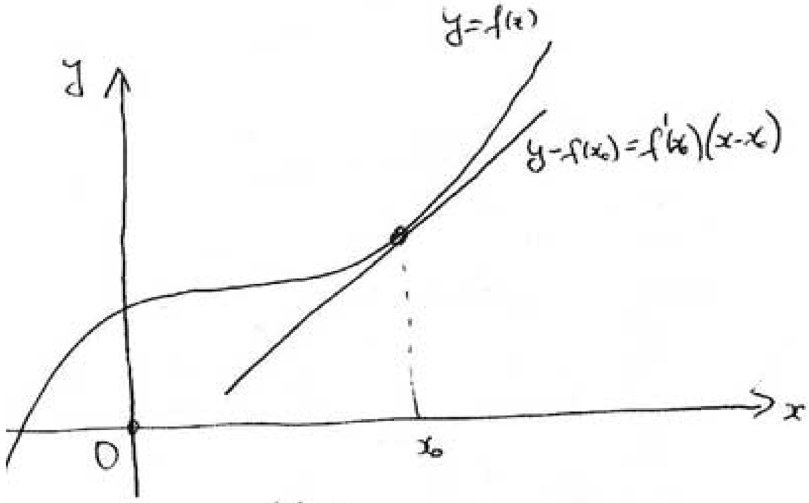


Sl. 8.

Uočite da se tu riječ *točka* spominje dvaput: prvi put to znači broj, a drugi put to je zaista točka u ravnini (uredjeni par).

Precizna formulacija fizikalnog značenja derivacije funkcije u točki
Derivacija funkcije f u x_0 je brzina promjene funkcije f u x_0
Uočite da je brzina tu uvedeni apstraktni pojam kao granična vrijednost (limes) srednjih brzina kad prirast teži nuli (to je definicija brzine u zadanom trenutku i nju ne možemo mjeriti).

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ (sl.9).



Sl. 9.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Vidimo da bi tu nastala zbrka da smo točku grafa označili kao (x, y) jer su x, y potrebne kao oznake u jednadžbi tangente.

Primjer 6. Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) := x^2$ u točki:
(a) $(1, 1)$, b) $(10, 100)$, c) $(100, 10000)$

Koristimo Primjer 5.
(a) Tu je $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$, pa je jednadžba tangente:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

(b)

$$y - 100 = 20(x - 10)$$

(c)

$$y - 10000 = 200(x - 100)$$

Definicija derivacije funkcije
Derivacija funkcije f je funkcija f' kojoj je vrijednost u svakoj točki jednaka derivaciji funkcije f u toj točki.

Uočite da smo tu rekli samo *derivacija funkcije*, a da smo u prijašnjoj rekli *derivacija funkcije u točki*; Dakle,
Derivacija funkcije je nova funkcija, a
Derivacija funkcije u točki je broj.

Primjer 7. Odredimo derivaciju funkcije $f(x) := x^2$

To je funkcija $f'(x) := 2x$.

Izraz za derivaciju funkcije
Dobije se da se u izrazu za derivaciju funkcije u točki, umjesto x_0 uvrsti x; dakle:

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Lekcije iz Matematike 1.

12. Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatraju svojstva derivacija funkcija s obzirom na zbrajanje, oduzimenje, množenje, dijeljenje i kompoziciju (derivacija složene funkcije i inverzne funkcije).
Takodjer izvode se derivacije nekih najvažnijih elementarnih funkcija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Jedan od najopćenitijih znanstvenih pristupa nekom problemu jest da se on razloži na elementarne (sastavne) dijelove, da se ti elementarni dijelovi razriješe, te da se izgradi metoda rješavanja složenog problema ako se znadu riješiti njegovi sastavni dijelovi.
Poput složenih rečenica koje se grade od jednostavnih povezujući ih veznicima i sl., funkcije se tvore od jednostavnih pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kompozicije. Da bismo razriješili problem deriviranja funkcija, izvest ćemo pravila prema kojima se može odrediti derivacija funkcije ako se znadu derivacije njenih sastavnih dijelova. Takodjer ćemo izvesti derivacije najvažnijih elementarnih funkcija.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. analitičku definiciju derivacije funkcije (pomoću limesa):

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Osnovne elementarne funkcije (potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije), te njihova osnovna svojstva.
3. Pojam limesa funkcije i njegova svojstva.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Derivacija potencije

Već smo vidjeli da za $f(x) = x^2$ vrijedi $f'(x) = 2x$ što kraće zapisujemo kao:

$$(x^2)' = 2x$$

Neka je sad, općenito, $f(x) = x^n$, gdje je n prirodan broj. Tada je
$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$
Mogli bismo točno odrediti koeficijent uz svaku potenciju od x, medjutim, nama je važan samo koeficijent uz x^{n-1}. Sad je:

$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...) - x^n}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0}(nx^{n-1} + (\ )x^{n-2}(\Delta x) + ...) =$

nx^{n-1}.
Kraće:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Primjer 1. (i) $(x^3)' = 3x^2$
(ii) $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$
(iii) $(1)' = (x^0) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ (derivacija konstantne funkcije 1 je nula; to smo mogli i izravno dobiti iz formule za derivaciju).

Očita svojstva derivacija funkcija

I. (i) (Derivacija zbroja je zbroj derivacija): $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
(ii) (Derivacija razlike je razlika derivacija): $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
II. $[cf(x)]' = cf'(x)$ za svaki broj (konstantu) c.
Formule se mogu zapisati i bez argumenta x:
I. $(f + g)' = f' + g'$
(ii) $(f - g)' = f' - g'$
II. $(cf)' = cf'$ za svaki broj (konstantu) c.

Te su formule izravne posljedice očitih svojstava limesa:
1. limes zbroja je zbroj limesa;
2. limes razlike je razlika limesa;
3. konstanta se može izlučiti ispred limesa.
Takodjer, vrijedi, a koristit ćemo poslije:
4. limes produkta je produkt limesa

5. limes kvocijenta je kvocijent limesa (ako u nazivniku nije nula).

Primjer 2. $(4x^3 - 5x^2 + 7x + 3)' = 4(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + 3(1)' = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 12x^2 - 10x + 7$

Vidimo da pomoću očitih svojstava i formule za derivaciju potencije možemo derivirati bilo koji polinom (deriviramo član po član).

Neočita svojstva derivacije funkcija:

III. (Derivacija umnoška-produkta funkcija:)

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(dakle **ne vrijedi** da je derivacija umnoška umnožak derivacija).
Izvod formule ostavit ćemo za kasnije.
Zapis bez argumenta x:

$$III.\ (fg)' = f'g + fg'$$

IV. (Derivacija kvocijenta-količnika funkcija:)

$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

(dakle **ne vrijedi** da je derivacija kvocijenta kvocijent derivacija).
Zapis bez argumenta x

$$IV.\ (\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Primjer 3. - Primjena formule za derivaciju kvocijenta: derivacija potencije s negativnim eksponentom.

$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$ To se može zapisati i kao:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

To znači da općenito vrijedi (za svaki cijeli eksponent m):

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

Izvod formule za derivaciju kvocijenta iz formule za derivaciju produkta.

1. korak: $\frac{f}{g} \cdot g = f$
2. korak (deriviramo): $(\frac{f}{g} \cdot g)' = f'$, tj.
$(\frac{f}{g})' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' = f'$
3. korak (sredjivanje): $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Izvod formule za derivaciju produkta

$(f(x)g(x))' =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$ = (dodamo i oduzmemo $f(x)g(x+\Delta x)$)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)]+[f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)]}{\Delta x}$ = (limes zbroja je zbroj limesa)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$ = (limes produkta je produkt limesa)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} =$

$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivacija sinusa i kosinusa. Vrijedi:

$$(\sin x)' = \cos x; \ (\cos x)' = -\sin x$$

(derivacija *sinusa* je *kosinus*, a kosinusa *minus sinus*).

Primjer 4. (i) $(x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$.
(ii) $(x \cos x)' = x' \cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$.

Uočite da, općenito, ne možemo u izrazu za derivaciju funkcije pomoću limesa, uvrstiti $\Delta x = 0$, jer bismo dobili izraz $\frac{0}{0}$. Tu smo poteskoću kod izvodjenja formule za derivaciju potencije uspjeli razriješiti tako što smo u brojniku izlučili Δx, te pokratili Δx u nazivniku. Nakon toga smo u limesu mogli uvrstiti $\Delta x = 0$ i dobiti rezultat. Tako nešto ne vrijedi općenito, tj. nećemo uvijek moći izlučiti Δx u brojniku. Na primjer, to nećemo moći učiniti pri izvodu formula za derivaciju sinusa, kosinusa, eksponencijalne funkcije. Zato ćemo trebati neke posebne, tkzv. **značajne** limese.

Značajni limes koji je potreban za izvod formule za derivaciju sinusa i kosinusa:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \ (\star)$$

(na ma će biti potrebna ta formula u kojoj će umjesto t biti Δx). U istinitost jednakosti uvjeravamo se uvrštavanjem sve manjih vrijednosti t. Naravno, ta se jednakost moqv ze i strogo matematiqv cki dokazati. Uočite da se taj limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t = 0$ (jer se dobije $\frac{0}{0}$).

Primjer 5. - neki limesi koji se izvode iz $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
(i) $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$
(ii) $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

Za (i) uočimo da za $\cos t \neq -1$ vrijedi:
$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot \frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \frac{1-\cos^2 t}{t^2(1+\cos t)} = \frac{\sin^2 t}{t^2} \cdot \frac{1}{1+\cos t} = (\frac{\sin t}{t})^2 \cdot \frac{1}{1+\cos t}$
Zato je
$\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t \to 0} (\frac{\sin t}{t})^2 \cdot \frac{1}{1+\cos t} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Tvrdnja (ii) izravno slijedi iz (i). Naime:
$\frac{1-\cos t}{t} = \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t$, pa je:
$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Za izvod derivacije sinusa i kosinusa potrebno je poznavati i adicijske formule (ili formule za pretvaranje zbroja u produkt). Na primjer:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Izvod formule za derivaciju sinusa

$(\sin x)' =$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$ (adicijska formula za sinus)

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x+\cos x \sin \Delta x-\sin x}{\Delta x} =$ (grupiranje 1. i 3. člana)

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x[\cos \Delta x-1]+\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} =$

$\sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[\cos \Delta x-1]}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$

$\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 =$

$\cos x$.
Tu smo $\sin x$, odnosno $\cos x$ izvukli ispred limesa jer ti izrazi ne ovise o Δx, pa se ponašaju kao konstante; takodjer smo iskoristili limes "sinus iks kroz iks", tj. značajni limes ($\star$) i limes (ii) iz Primjera 5.
Formula za derivaciju kosinusa izvede se slično, samo se treba koristiti adicijska formula za kosinus (ili formula za pretvaranje razlike kosinusa u produkt).

Primjer 6. - Još jedna primjena formule za derivaciju kvocijenta: derivacija tangensa i kotangensa. Vrijedi

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Na primjer,
$(tgx)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Značajni limes koji je potreban za izvod formule za derivaciju eksponencijalne funkcije:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1\ (\star\star)$$

U taj se limes takodjer možemo uvjeriti uvrštavanjem sve manjih brojeva t (dokaz ovdje ne provodimo). Uočite da se limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t = 0$ (dobije se $\frac{0}{0}$).

Derivacija eksponencijalne funkcije:

$$(e^x)' = e^x$$

(eksponencijalna funkcija s prirodnom bazom ne mijenja se pri deriviranju)
Izvod formule
$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x[e^{\Delta x}-1]}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$.

V. Formula za derivaciju složene funkcije - derivacija kompozicije:

$$[f(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Zapis bez argumenta x

$$V.\ (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

(uočite razliku izmedju znaka $\circ$ koji označuje kompoziciju funkcija od znaka $\cdot$ koji označuje množenje(i katkad se ispušta).

Primjer 7. - jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije:
$[\sin(ax)]' = a \cdot \cos(ax)$, za svaki realan broj (konstantu) a.
Naime, prema formuli za derivaciju kompozicije, vrijedi:
$[\sin(ax)]' = \sin'(ax) \cdot (ax)' = \cos(ax) \cdot a = a \cdot \cos(ax)$.
Dakle $[\sin(2x)]' = 2\cos(2x)$, a ne $\cos(2x)$ kako se na prvi pogled može učiniti.

Primjer 8. - još jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije - derivacija opće eksponencijalne funkcije:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Naime, iz $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$, dobijemo
$(a^x)' = (e^{\ln a\cdot x})' = e^{\ln a\cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = a^x \cdot \ln a$

VI. Važna primjena formule za derivaciju složene funkcije - formula za derivaciju inverzne funkcije.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Zapis bez argumenta x

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Izvod formule za derivaciju inverzne funkcije.

Iz $f[f^{-1}(x)] = x$ za sve x iz domene od f^{-1}, deriviranjem dobijemo: $(f[f^{-1}(x)])' = 1$, tj. $f'[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x) = 1$, odakle se dobije tražena formula.

Primjena formule za derivaciju inverzne funkcije - derivacija logaritamske funkcije i arkus funkcija

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
Naime, tu je $f^{-1}(x) := \ln x$ pa je $f(x) := e^x$, dakle $f'(x) = e^x$, takodje. Sad je: $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

2. $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(Arccosx)' = -(Arcsinx)'$
Naime, ako je $f^{-1} = Arcsin$, onda je $f = \sin$ i $f' = \cos$ (ali na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Napomenimo da na tom intervalu vrijedi $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (jer je tu kosinus pozitivan). Zato je sad
$(Arcsinx)' = \frac{1}{\sin'(Arcsinx)} = \frac{1}{\cos(Arcsinx)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(Arcsinx)}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(Arcsinx)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Uočite da je desna strana u formuli za derivaciju *arkussinusa* definirana za $-1 < x < 1$, što znači da funkcija nije derivabilna u rubovima (to se vidi geometrijski tako što je tangenta na graf u rubnim točkama usporedna s y-osi - ima "beskonačan" koeficijent smjera).

Tablica značajnih integrala - treba znati napamet

1. (i) $(x^n)' = nx^{n-1}$
- to vrijedi za sve realne eksponente, a ne samo za prirodne.

(ii) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, specijalno
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $(\sin)' = \cos$
$(\cos)' = -\sin$
$(tg)' = \frac{1}{\cos^2}$
$(ctg)' = -\frac{1}{\sin^2}$

3. $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(Arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(Arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. $(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Lekcije iz Matematike 1.

13. Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatra primjena derivacije za približno računanje vrijednosti funkcija (linearna aproksimacija, kvadratna aproksimacija itd.), te razvoj u beskonačni (Taylorov) red važnih elementarnih funkcija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem računanja star je više tisuća godina. Usporedno s razvojem teoretskih osnova računanja ide tehnološki razvoj pomagala za računanje (danas su to kalkulatori i kompjutori).
Izvodjenje osnovnih računskih operacija relativno je jednostavno (iako i tu ima poteškoća), medjutim korjenovanje, a naročito logaritmiranje, računanje vrijednosti eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija uglavnom su neizvedivi (ukoliko želimo dobiti točne rezultate). Zato se pribjegava približnom računanju.
Teoretski temelj približnog računanja vrijednosti funkcija (aproksimacija) jesu derivacije, uz pomoć kojih se funkcija (na primjer *sinus*) približno može predočiti u obliku polinoma (linearne funkcije, kvadratne funkcije itd.), pa se, umjesto računanja vrijednosti (sinus) funkcije, računa vrijednost tog polinoma (što je u pravilu moguće).

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije, osnovne elementarne funkcije te njihove derivacije.
Za kvadratnu aproksimaciju i za aproksimacije višeg reda potreban je pojam derivacije drugog reda i višeg reda.

Druga derivacija f'' **funkcije** f, je, prema definiciji, derivacija prve derivacije, dakle
$f'' = (f')'$

Treća derivacija je derivacija druge derivacije itd:
$f''' := (f'')'$
$f^{IV} := (f''')'$ itd.

n-ta derivacija piše se kao $f^{(n)}$.

Na primjer, ako je $f(x) := \sin x$, onda je:
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$ itd.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Linearna aproksimacija

1. **Analitički pristup**. Iz formule za derivaciju:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

vidi se da je

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(izbacili smo limes, ali smo umjesto znaka jednakosti stavili znak približne jednakosti; tu pretpostavljamo da je Δx relativno malen - blizu nule; lijeva je strana to bliže desnoj što je Δx manje),
što se može zapisati i ovako:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

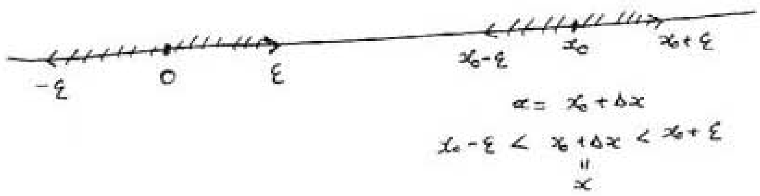
To je formula za **linearnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0.
Dio $f'(x_0) \cdot \Delta x$ je **približni prirast** funkcije f kad se argument mijenja od x_0 do $x_0 + \Delta x$.

Alternativni zapis formule za linearnu aproksimaciju

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(lijevo je neka bilo koja elementarna funkcija, a desno linearna)

Tu formulu dobijemo tako da u originalnu stavimo x umjesto $x_0 + \Delta x$, odnosno, dosljedno tome, $x - x_0$ umjesto Δx. Kraće: $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta x = x - x_0$. Uočite (sl.1.), ako se Δx mijenja oko nule (na primjer ako je $-\epsilon < \Delta x < \epsilon$), onda se x, tj. $x_0 + \Delta x$ mijenja oko x_0, preciznije: $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.



Sl. 1

Važnost formule za linearnu aproksimaciju
Iz formule vidimo sljedeće:
Ako znademo $f(x_0)$ i $f'(x_0)$ onda ćemo, mijenjajući Δx oko nule, moći približno odrediti vrijednosti funkcije f oko x_0. Razlika izmedju stvarne vrijednosti (koju u pravilu ne znamo) i približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (koju znamo), zove se **pogrješka linearne aproksimacije**. Kraće:
Pogrješka=Stvarna vrijednost - Približna vrijednost
To ilustriramo na primjeru.

Primjer 1. Ne koristeći kalkulator (ili neko drugo pomagalo) približno izračunajmo $\sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}, \sqrt{101}, \sqrt{102}$.

Tu je $f(x) := \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa vidimo da je dobro uzeti $x_0 := 100$, jer je
$f(100) = \sqrt{100} = 10$ i
$f'(100) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100}} = 0.05$
Da približno odredimo $\sqrt{101}$ treba u formulu za linearnu aproksimaciju uvrstiti $\Delta x = 1$:

$$\sqrt{101} \approx 10 + 0.05 \cdot 1 = 10.05$$

Mijenjajući Δx (da bude redom $-2, -1, 0, 1, 2$ dobijemo sljedeću tablicu (u 2. redku su odgovarajuće vrijednosti dobivene kalkulatorom, zaokružene na 6 decimala, u 3. su približne vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom, a u 4. je pogrješka aproksimacije tj. razlika podatka 2. i 3. redka - to je, u stvarnosti, približna pogrješka jer smo podatke 2. redka dobili zaokruživanjem).

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
lin. aproks.	9.900000	9.950000	10.	10.050000	10.100000
pogrješka aproks	-0.000505	-0.000126	0.	-0.000124	-0.000495

lin. aproks. $= 10 + 0.05(x - 100)$

Služimo se formulom:

$$\sqrt{100 + \Delta x} \approx 10 + 0.05\Delta x$$

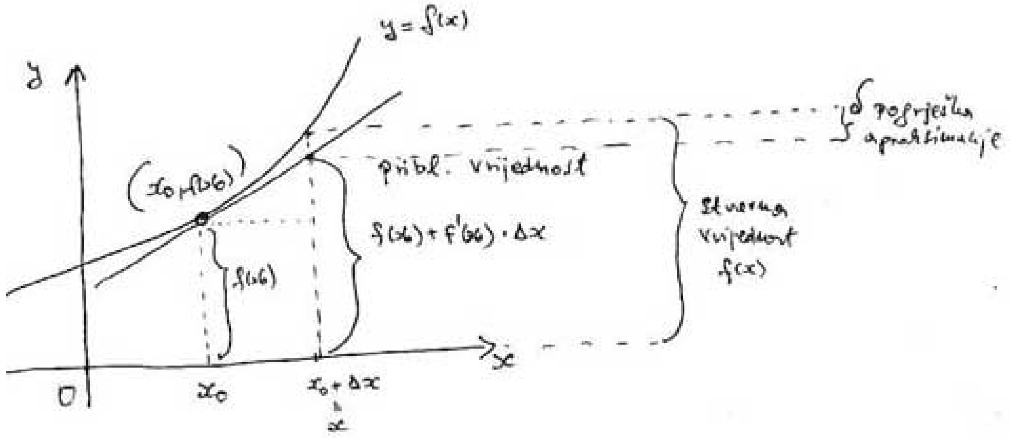
a možemo i formulom

$$\sqrt{x} \approx 10 + 0.05(x - 100)$$

u kojoj redom stavljamo $x = 98, 99, 100, 101, 102$ (jasno je da smo mogli desnu stranu srediti i dobiti $\sqrt{x} \approx 0.05x + 5$)

Uočimo sljedeće:
(i) Za manji Δx (po apsolutnoj vrijednosti), aproksimacija je bolja, a za $\Delta x = 0$ dobijemo točnu vrijednost, što vrijedi općenito.
(ii) Vrijednosti dobivene linearnom aproksimacijom (u ovom primjeru) veće su od stvarnih.
(iii) Za pozitivne Δx aproksimacija je bolja od odgovarajućih negativnih (u ovom primjeru).
Pokušajte objasniti te činjenice.

2. Geometrijski pristup - geometrijska interpretacija formule za linearnu aproksimaciju (sl.2)

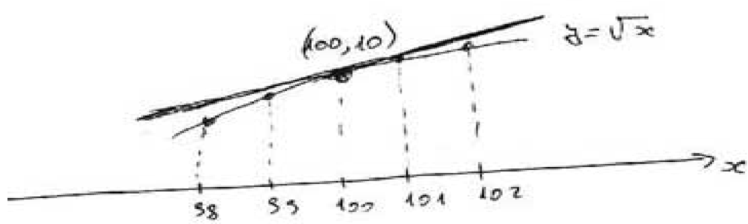


sl.2.

Geometrijski, linearna se aproksimacija temelji na intuitivno jasnu načelu da se od svih pravaca koji prolaze točkom $(x_0, f(x_0))$, grafu funkcije f najbolje "priljubljuje" tangenta u toj točki na graf.

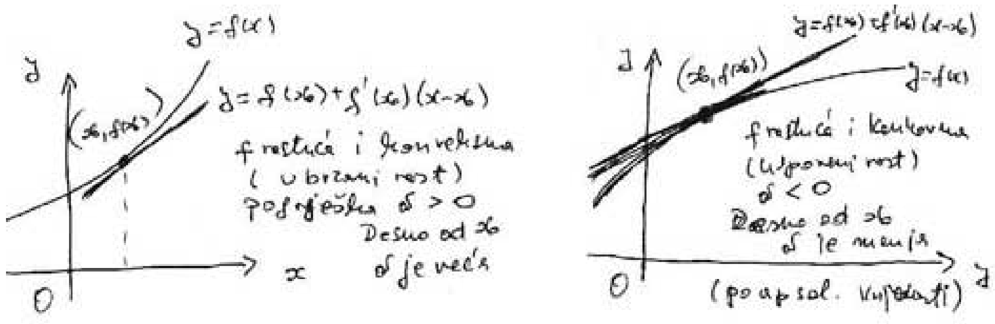
Primjer 2. Geometrijski predočimo i objasnimo Primjer 1.

Na sl.3. vidimo da je tangenta na graf funkcije $f(x) := \sqrt{x}$ u točki grafa $(100, 10)$ iznad grafa. Pri linearnoj aproksimaciji očitavamo vrijednosti ordinata na tangenti (što su približne vrijednosti) , a ne na grafu funkcije (što su stvarne vrijednosti). Sad možemo pojasniti (i), (ii) i (iii) iz Primjera 1.



sl. 3.

(i) Za manje Δx (po apsolutnoj vrijednosti) aproksimacije su bolje jer su pogrješke aproksimacije manje (tangenta je bliže grafu).
(ii) približne su vrijednosti veće od stvarnih jer je tangenta iznad grafa (tj. jer je f konkavna funkcija).
(iii) Pogrješke aproksimacije manje su za pozitivne Δx jer je f oko $x_0 = 10$ ima usporeni rast (tj. rastuća je i konkavna).
Općenita veza izmedju pogrješke linearne aproksimacije s jedne strane i rasta, pada, konveksnosti i konkavnosti, s druge strane, predočena je na sl.4.



Sl. 4.

Kvadratna aproksimacija.

Kod linearne aproksimacije funkcije f oko x_0 imali smo sljedeće:
1. funkciju f i realan broj x_0 oko kojega je f definirana.
2. **linearnu funkciju** $g(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Funkciju f oko x_0 aproksimirali smo linearnom funkcijom g, tj.
$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Uočimo ovo:
(0) $g(x_0) = f(x_0)$ i
(1) $g'(x_0) = f'(x_0)$
tj. f i g imaju jednake vrijednosti u x_0 i jednake vrijednosti derivacija u x_0. Naime,
$g(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) + 0 = f(x_0)$ i
$g'(x) := 0 + f'(x_0) \cdot 1 = f'(x_0)$ za sve x, pa i za $x = x_0$.

Uočavamo da je "razumno" definirati **kvadratnu aproksimaciju** funkcije f oko x_0 kao kvadratnu funkciju h koja u x_0 ima jednake vrijednosti i jednake 1. derivacije i jednake 2. derivacije kao i f, tj. za koju vrijedi:
(0) $h(x_0) = f(x_0)$ i
(1) $h'(x_0) = f'(x_0)$ i
(2) $h''(x_0) = f''(x_0)$

Da bismo odredili h, u ovisnosti o f i x_0, napišimo je po potencijama od $x - x_0$, tj.

$$h(x) := c + b(x - x_0) + a(x - x_0)^2$$

Treba odrediti koeficijente a, b, c.

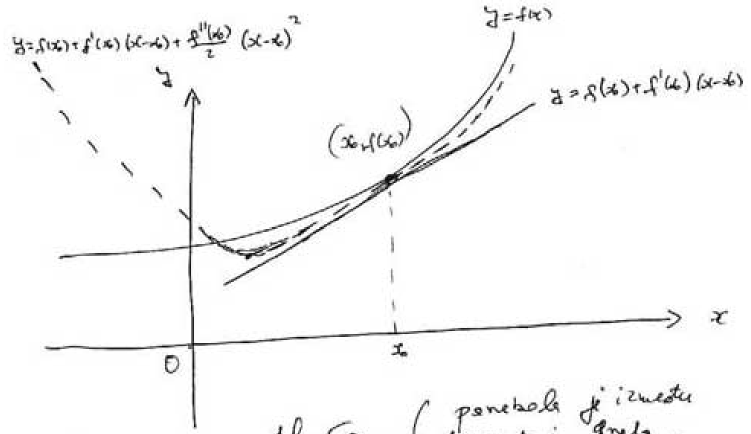
Vidimo da je:
$h'(x) = b + 2a(x - x_0)$ i $h''(x) = 2a$. Zato je
$h(x_0) = c$ i $h'(x_0) = b$ i $h''(x_0) = 2a$
Uvrštavanjem u (0), (1), (2), dobijemo:
$c = f(x_0)$ i $b = f'(x_0)$ i $a = \frac{f''(x_0)}{2}$
Zato je $h(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, tj.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

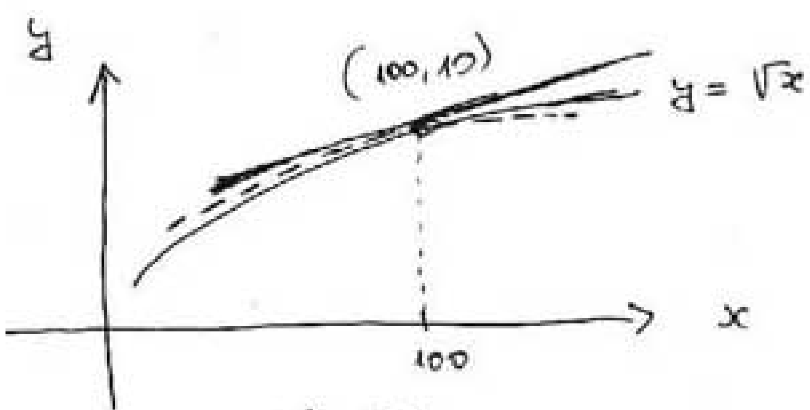
To je **formula za kvadratnu aproksimaciju funkcije f u x_0**.
Vidimo da je linearni dio desne strane jednak onome kod linearne aproksimacije, pa se ta formula može smatrati korekcijom linearne: dodan je **kvadratni član** $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.
Formulu možemo zapisati i pomoću Δx zamjenom $x = x_0 + \Delta x$ i $x - x_0 = \Delta x$.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

Geometrijska interpretacija kvadratne aproksimacije (sl.5).



sl. 5a. (parabola je između tangente i grafa, u okolini x_0)



sl. 5b.

Primjer 3. Pomoću kvadratne aproksimacije približno izračunajmo $\sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}, \sqrt{101}, \sqrt{102}$. Rezultate usporedimo s Primjerom 1. gdje smo koristili linearnu aproksimaciju.

x	98	99	100	101	102
$\sqrt{x}$	9.899495	9.949874	10.	10.049876	10.099505
kvadr. aproks.	9.899500	9.949875	10.	10.049875	10.099950
pogr. aproks.	−0.000005	−0.000001	0.	0.000001	0.000005

kvadr. aproks. $= 10 + 0.05(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2$

Aproksimacije višeg reda.

Analogno linearnoj aproksimaciji (aproksimacijama 1. i 2. reda) definiramo **kubnu aproksimaciju** (aproksimaciju 3. reda) i, općenito, aproksimaciju n-tog reda.
Prisjetimo se faktorijela: $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$,
posebno: $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$ i, prema dogovoru $0! = 0$

Kubna aproksimacija

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

ili, u drugom zapisu

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3$$

Aproksimacija n-tog reda.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ili, u drugom zapisu

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n$$

Primjer 4. - aproksimacija eksponencijalne funkcije oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda eksponencijalne funkcije oko nule.
(b) približno izračunajmo broj e.

Aproksimacija će biti po potencijama od x (jer je $x_0 = 0$).
(a) Tu je $f(x) := e^x$ i $x_0 = 0$, pa je $f(0) = e^0 = 1$ i $f^{(n)}(0) = 1$ za sve n. Zato je:

(0) Nulta aproksimacija: $e^x \approx 1$
(1) Linearna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x$
(2) Kvadratna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$
(3) Kubna aproksimacija: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
(3) Aproksimacija 4. reda: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

(3) Aproksimacija n-tog reda:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

(b) Iskoristit ćemo (a) i činjenicu da je $e = e^1$ pa u formule za aproksimaciju stavljamo $x = 1$. Napomenimo da je (kalkulator):

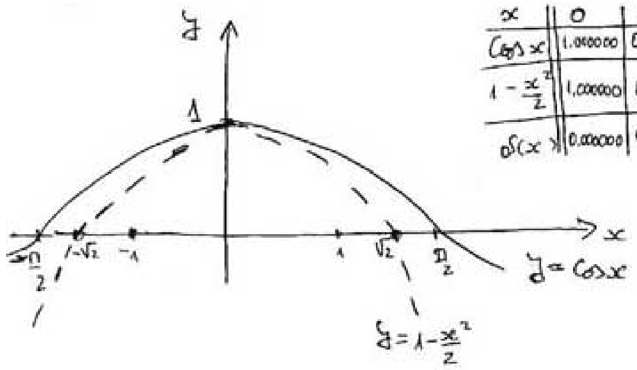
$$e \approx 2.72$$

(zaokruženo na 2 decimale).

(0) Nulta aproksimacija: $e \approx 1$ (loše)
(1) Linearna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 = 2$ (bolje, ali i dalje loše)
(2) Kvadratna aproksimacija: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$ (još bolje, ali i dalje loše)
(3) Kubna aproksimacija: $e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2.666...$ (blizu, ali bi moglo bliže)
(3) Aproksimacija 4. reda: $e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2.71$ (zaokruženo na dvije decimale - točno na jednu decimalu)

Primjer 5. - aproksimacija sinusa i kosinusa oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije kosinus oko nule.
(a) Odredimo aproksimacije do četvrtog reda funkcije sinus oko nule.

(a) Tu je $f(x) := \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{IV}(x) = \cos x$, pa je :
$f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$, $f''(0) = -\cos 0 = -1$, $f'''(0) = \sin 0 = 0$, $f^{IV}(0) = \cos 0 = 1$.
Zato je
(0) Nulta aproksimacija: $\cos x \approx 1$
(1) Linearna aproksimacija: $\cos x \approx 1$ (kao i linearna)
(2) Kvadratna aproksimacija: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (sl.6).



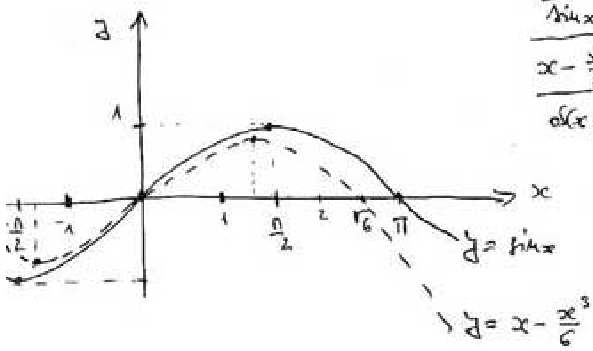
x	0	0.2	0.5	1	2
$\cos x$	1.000000	0.980067	0.877583	+0.540302	-0.416145
$1-\frac{x^2}{2}$	1.000000	0.980000	0.875000	0.500000	-1.000000
$\delta(x)$	0.000000	0.000067	0.002583	0.040302	0.583853

Sl. 6.

(3) Kubna aproksimacija: (kao i kvadratna)
(4) Aproksimacija 4. reda: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

(b) Tu je $f(x) := \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$, pa je
$f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(x) = -\sin 0 = 0$, $f'''(x) = -\cos 0 = -1$, $f^{IV}(0) = \sin 0 = 0$. Zato je

(0) Nulta aproksimacija: $\sin x \approx 0$
(1) Linearna aproksimacija: $\sin x \approx x$
(2) Kvadratna aproksimacija: $\sin \approx x$ (kao i linearna)
(3) Kubna aproksimacija: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ (sl.7).



x	0	0.2	0.5	1	2
$\sin x$	0.000000	0.198669	0.479426	0.841471	0.909297
$x-\frac{x^3}{6}$	0.000000	0.198667	0.479167	0.833333	0.666667
$\delta(x)$	0.000000	0.000002	0.000259	0.008138	0.242630

Sl. 7.

(4) Aproksimacija 4. reda: Isto kao i za kubnu.

Taylorov red - razvoj funkcije.

Sjetimo se aproksimacije n-tog reda (elementarne) funkcije f oko x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tu je na lijevoj strani neka elementarna funkcija f, a na desnoj polinom n-tog stupnja napisan po potencijama od $x - x_0$. Lijeva je strana to bliže desnoj što je x bliže x_0 (za x relativno blizu x_0). Takodjer, za fiksirani x blizu x_0, lijeva je strana to bliža desnoj što je stupanj n veći. Ako n pustimo da ide u beskonačnost, dobit ćemo jednakost

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

(tri točkice označuju da se zbrajanje nastavlja prema istom pravilu i nikad ne prestaje).
To je **Taylorov razvoj funkcije** f **oko** x_0 (točnije, Taylorov razvoj je desna strana).
Tu je umjesto približne vrijednosti stavljena jednakost, ali je zato umjesto konačnog reda (polinoma), sad na desnoj strani beskonačan red ("polinom beskonačna stupnja u potencijama od $x - x_0$) ").

Za koje x vrijedi jednakost u Taylorovu razvoju?
Jednakost u Taylorovu razvoju **može, ali ne mora** vrijediti za sve x iz područja definicije funkcije f. Skup svih x za koje jednakost vrijedi zove se **područje konvergencije reda - razvoja**.
Na primjer, za eksponencijalnu funkciju, sinus i kosinus, područje konvergencije je skup svih realnih brojeva $\mathbf{R}$:
Dakle, **sljedeće jednakosti vrijede za sve** x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Kraće, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Kraće, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

Kraće, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Da područje konvergencije može biti manje od domene pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 6. - geometrijski red - vrlo važan red.
Odredimo Taylorov red funkcije $f(x) := \frac{1}{1-x}$ oko nule.

Postupajući kao i prije, dobijemo:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
Red na desnoj strani zove se **geometrijski red**. Ta se jednakost obično piše tako da lijevo bude geometrijski red, zato što je to kompliciraniji dio formule:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

Ta se formula često zove: **zbroj geometrijskog reda**. Formula vrijedi za $-1 < x < 1$, tj. interval $< -1, 1 >$ je **područje konvergencije**, a kako je on simetričan s obzirom na ishodište, broj 1 se zove **radijus konvergencije**.
Provjerimo formalno jednakost. Množenjem s $1 - x$, vidimo da bi trebalo biti: $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + ...) = 1$. Zaista,

$(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + ...) =$
$(1 + x + x^2 + x^3 + ...) - x(1 + x + x^2 + x^3 + ...) =$
$(1 + x + x^2 + x^3 + ...) - (x + x^2 + x^3 + ...) = 1.$
Zašto jednakost ne vrijedi za sve x iako "izgleda" da smo ga provjerili za sve x?.
Uočite da smo pri "provjeri" koristili distribuciju množenja prema beskonačnom zbroju, medjutim takvo pravilo općenito vrijedi samo za konačan zbroj.

Primjer 7. geometrijski red - nastavak.
Uvrstimo redom umjesto x brojeve $2, 1, 0, \frac{1}{2}, , -\frac{1}{2}, 2, -1$ u formulu za zbroj geometrijskog reda i provjerimo smisao.

Uočimo, na početku:
1. U $\frac{1}{1-x}$ možemo uvrstiti sve x osim $x = 1$ (jer se tada pojavi nula u nazivniku).
2. Pri uvrštavanju u $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ može nastati problem jer treba zbrojiti beskonačno mnogo brojeva.

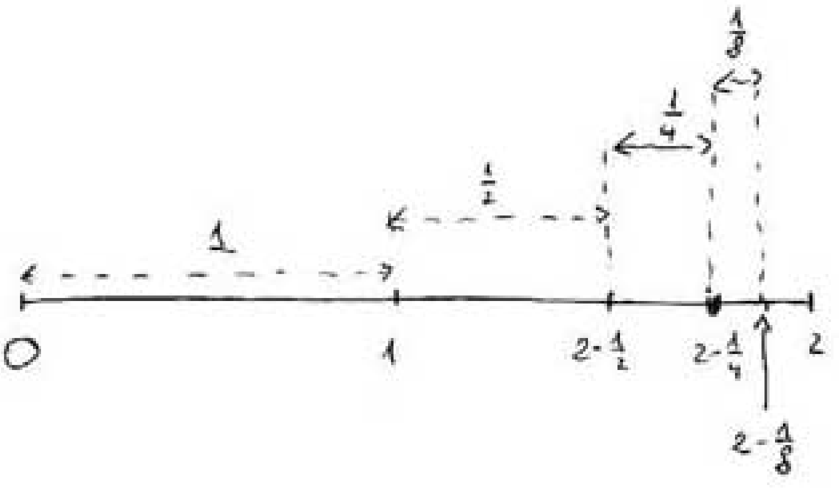
$x = 2$, dobijemo: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... = \frac{1}{1-2}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$, a desna je -1. Zato 2 nije u području konvergencije.

$x = 1$, dobijemo $1 + 1 + 1^2 + 1^3 + ... = \frac{1}{1-1}$, što nema smisla jer lijeva strana ide u $+\infty$ (što nije broj), a desna nije definirana. Zato 1 nije u području konvergencije.
To se ipak malo razlikuje od prehodnog slučaja jer netko može interpretirati $\frac{1}{0}$ kao $+\infty$, pa s obje strane jednakosti imamo $+\infty$ (problem je što to nije broj).

$x = 0$, dobijemo $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + ... = \frac{1}{1-0}$, što je istinito (beskonačna je suma postala konačna). Zato je 0 u području konvergencije.

$x = \frac{1}{2}$, dobijemo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
To je istinita jednakost, jer zbrajajući član po član vidimo (sl.8):
$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8}$



Sl. 8.

Općenito:
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$
pa lijeva strana teži u 2 kad n teži u $+\infty$. To se piše ovako:
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=:$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n})=$
$\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{2^n})=$
$2-0=2.$

$x=-\frac{1}{2}$, dobijemo $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-...=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2}})=\frac{2}{3}$
To je istinita jednakost, u što se možemo uvjeriti zbrajajući član po član:

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=\frac{2}{3}-\frac{1}{24}$
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}=\frac{2}{3}+\frac{1}{48}$
Sad uočavamo pravilo (mogli bismo ga i općenito zapisati) i vidimo da se zbrajajući sve više članova približavamo prema $\frac{2}{3}$, malo s lijeva, malo s desna.

$x=-2$, dobijemo $1+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+...=\frac{1}{1-(-2)}$, tj.
$1-2+4-8+16-...=\frac{1}{3}$
što nije istinito, jer se zbrajanjem sve više članova, redom dobivaju brojevi: $1,-1,3,-5,9,-23,41,-...$ što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -2 nije u području konvergencije.

$x=-1$, dobijemo $1+(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...=\frac{1}{1-(-1)}$, tj.
$1-1+1-1+1-...=\frac{1}{2}$

što nije istinito, jer se zbrajanjem sve više članova, redom dobivaju brojevi: $1, 0, 1, 0, 1, ...$ što se ne približava ni prema jednom broju (nema limesa). Zato -1 nije u području konvergencije.
Napomenimo da i uvoj nekorektnoj jednakosti postoji neki "prikriveni smisao". Naime, pri zbrajanju, član po član, dobijaju se ravnopravno brojevi 1 i 0, što je, u prosjeku $\frac{1}{2}$.

Kako se općenito dokazuje da je područje konvergencije geometrijskog reda interval $< -1, 1 >$ i kako se izvodi formula?

Koristeći **formulu za zbroj konačnog geometrijskog reda**:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},\ x \neq 1$$

lako se vidi da geometrijski red ima smisla samo za $-1 < x < 1$ i da mu je zbroj $\frac{1}{1-x}$ (jer se za $-1 < x < 1$ potencija x^{n+1} smanjuje sve više (po apsolutnoj vrijednosti) i teži k nuli).

Primjer 8. - Taylorov razvoj logaritamske funkcije.

Logaritamska funkcija nije definirana u nuli pa nema razvoja oko nule. Razmotrit ćemo, stoga, razvoj oko $x_0 = 1$. Imamo:
$f(x) := \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ f^{IV}(x) = -\frac{3!}{x^4}$ i, općenito

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

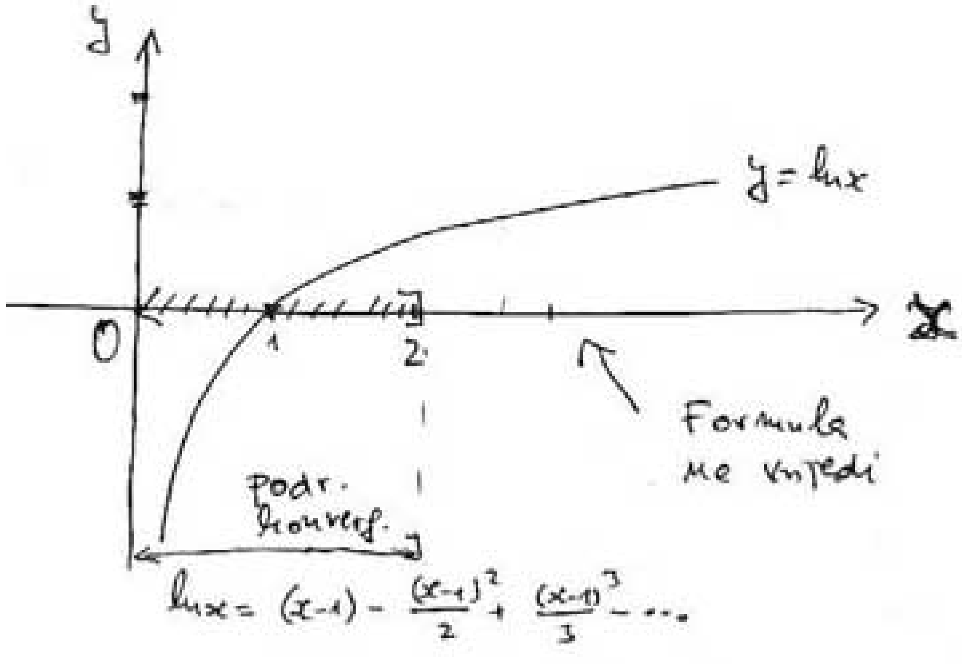
Zato je $f(1) = \ln 1 = 0,\ f'(1) = \frac{1}{1} = 1,\ f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,\ f'''(1) = \frac{1\cdot 2}{1^3} = 2!,\ f^{IV}(1) = -\frac{3!}{1^4} = -3!$ i, općenito

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{1^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Odavde dobijemo
$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + ...$
$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ...$
ili, kraće

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

Može se pokazati da je područje konvergencije reda za $0 < x \leq 2$.
Vidimo da je to za 1 lijevo i desno od sredine intervala, pa broj 1 zovemo **radijus konvergencije** (sl.9.).



Sl. 9.

Primjer 9. Bez korištenja kalkulatora (ili nekog drugog pomagala) približno izračunajmo $\ln 2$.

Uvrstimo $x = 2$ u formulu za razvoj logaritamske funkcije oko 1. Dobijemo

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

Uočavamo da nam je potrebno zbrojiti mnogo članova (to je zato što je red **alternativan - izmjenjuju mu se predznaci**), kažemo da **sporo konvergira**. Koristeći se svojstvima logaritamske funkcije to možemo izbjeći ovako:

$$\ln(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n(\frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n \cdot 2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Sad, koristeći da je $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, dobijemo

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + ... \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} = \frac{661}{960}$$

Dakle, zbrajanjem prvih 5 članova, dobili smo $\ln 2 \approx 0.69$, što je točno na dvije decimale. S prvih 5 članova alternativnog reda dobili bismo puno slabije:
$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \approx 0.78$

Uočite da je ovdje područje konvergencije **poluzatvoreni interval**, za razliku od geometrijskog reda, gdje je to bio **otvoreni interval**. Napomenimo, ipak, da uvrštavanje $x = 0$ u razvoj logaritamske funkcije oko 1 **nije bez ikakva**

smisla. Naime, dobije se:

$$\ln 0 = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...)$$

Red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

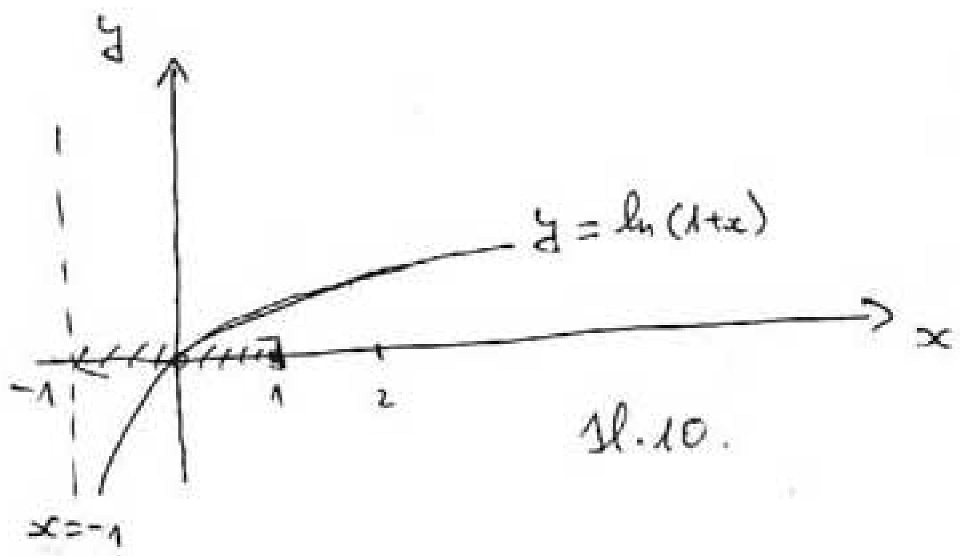
zove **harmonijski red** i nije teško pokazati da je njegova suma $+\infty$, pa gornja jednakost postaje $\ln 0 = -\infty$, što matematički nije potpuno korektno (jer u toj jednakosti ne sudjeluju brojevi), medjutim, ta je "jednakost" odraz istinite činjenice da se vrijednosti ln funkcije približavaju $-\infty$ kad se vrijednosti argumenta približavaju k 0, tj.

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Taylorov red za logaritamsku funkciju često se piše tako da se umjesto x stavi $x + 1$, odnosno umjesto $x - 1$ stavi x. Tako dobijemo Taylorov red oko nule:
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$, ili, kraće

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

koji konvergira za $-1 < x \leq 1$ (sl.10.).



Lekcije iz Matematike 1.

14. Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se daju **kriteriji pomoću derivacija** za rast i pad funkcije, lokalne ekstreme (točke prijelaza iz rasta u pad i obratno), konveksnost i konkavnost, točke infleksije (točke prijelaza iz konveksnosti u konkavnost i obratno). Ti su kriteriji prirodni, jer derivacije imaju jasna fizikalna značenja: prva derivacija značenje brzine, a druga značenje ubrzanja.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Osnovna pitanja koja se mogu postaviti o ponašanju neke funkcije jesu:
1. Raste li ili pada funkcija oko neke vrijednosti argumenta?
2. Postiže li funkcija svoju najveću ili najmanju vrijednost za neku vrijednost argumenta?
3. Je li funkcija konveksna ili konkavna oko neke vrijednosti argumenta?
4. Ima li funkcija infleksiju za neku vrijednost argumenta (tj. mijenja li konveksnost i konkavnost pri prolazu argumenta kroz tu vrijednost)?

U svim ovim pitanjima govorimo o ponašanju funkcije **oko neke vrijednosti argumenta**, recimo x_0, što znači "malo lijevo, malo desno" od x_0. To znači da trebamo odgovoriti na pitanje za beskonačno mnogo vrijednosti argumenta, što je nemoguće ako to bukvalno shvatimo. Matematički se taj problem rješava tako da se gledaju vrijednosti samo u x_0, ali ne samo vrijednosti funkcije već i vrijednosti njenih derivacija u x_0. U **većini slučajeva**, gornja četiri problema riješit ćemo **samo iz poznavanja vrijednosti prve i druge derivacije funkcije u** x_0.
Općenito, četiri gornja problema svode se na rješavanje jednadžba i nejednadžba.

Ova četiri pitanja o funkcijama imaju veliku važnost u inženjerstvu pri proučavanju, praćenju i opisivanju veze medju dvjema veličinama u nekom procesu, reakciji. Na primjer ako razmatramo vrijednost neke veličine y nastale u nekom procesu, u ovisnosti o vremenu t, onda ova pitanja imaju sljedeću interpretaciju:
1. Povećava li se ili smanjuje vrijednost veličine y u nekom vremenskom intervalu oko trenutka t_0?

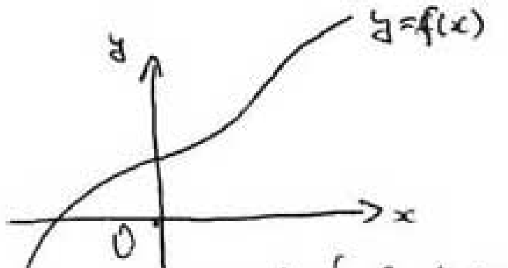
2. Je li vrijednost veličine y maksimalna ili minimalna u nekom trenutku t_0?
3. Raste li ubrzano ili usporeno vrijednost veličine y, u nekom vremenskom intervalu oko t_0 (ako raste, i slično pitanje ako vrijednost od y pada) ?
4. Prelazi li promjena veličine y u nekom trenutku od ubrzanja na usporenje i obratno?

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i interpretaciju derivacije funkcija (naročito prvu i drugu). Takodjer je važna jasna predožba o ponašanju kvadratne funkcije.

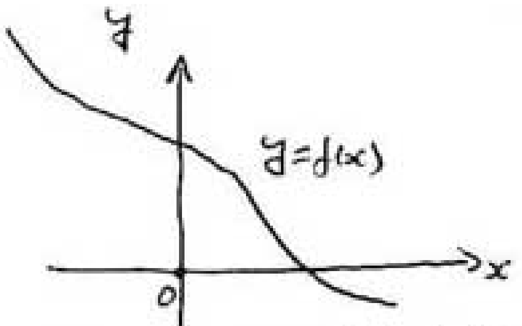
Ponovimo potrebne definicije i činjenice:

1. Rast i pad funkcije.
Kažemo da je funkcija rastuća ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta povećavaju i vrijednosti funkcije.
Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, uspinje (raste) (sl.1.).



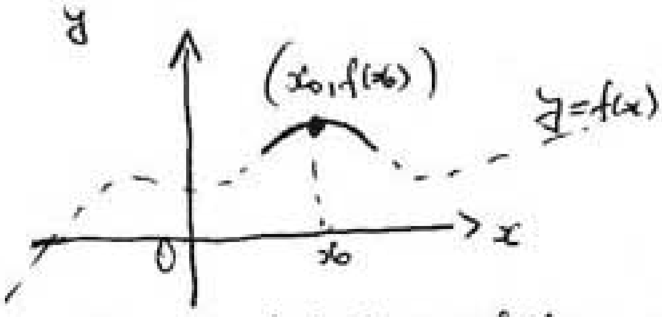
Graf rastuće funkcije
sl. 1.

Kažemo da je funkcija padajuća ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta vrijednosti funkcije smanjuju.
Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, spušta (pada) (sl.2.).



Graf padajuće funkcije
sl. 2.

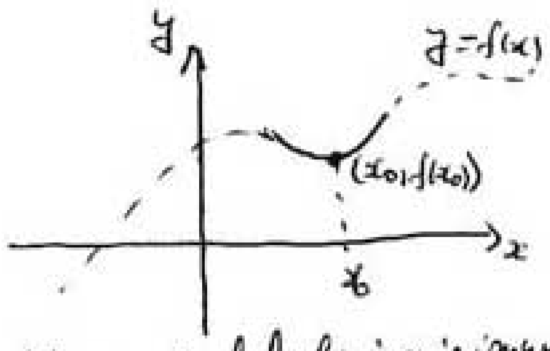
2. Lokalni ekstremi funkcije - lokalni maksimum, lokalni minimum. Kažemo da je x_0 točka lokalnog maksimuma funkcije f (ili da f u x_0 postiže lokalni maksimum) ako je $f(x_0)$ najveća vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0 (tj. malo lijevo, malo desno od x_0). Ako je tako onda se $f(x_0)$ zove lokalni maksimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog maksimuma (sl.3.).



U x_0 je lokalni maksimum

Sl.3.

Kažemo da je x_0 točka lokalnog minimuma funkcije f (ili da f u x_0 postiže lokalni minimum) ako je $f(x_0)$ najmanja vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0 (tj. malo lijevo, malo desno od x_0). Ako je tako onda se $f(x_0)$ zove lokalni minimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog minimuma (sl.4.).

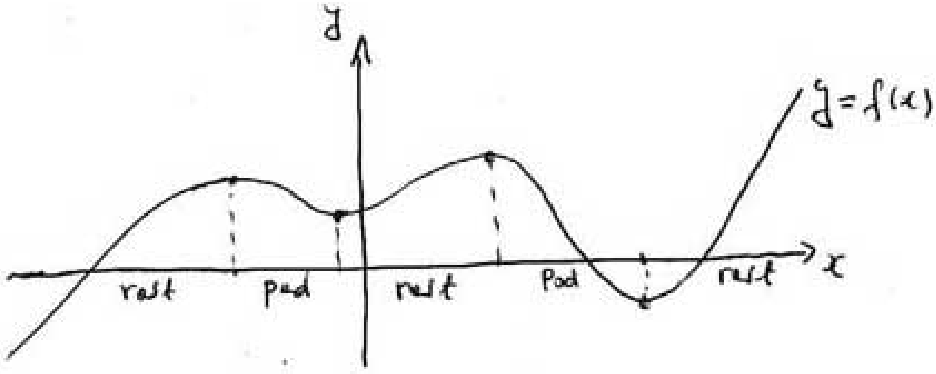


U x_0 je lokalni minimum

Sl.4.

Kažemo da je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f (ili da f u x_0 ima lokalni ekstrem) ako je x_0 točka lokalnog maksimuma ili lokalnog minimuma funkcije f.

3. Interval rasta (pada) funkcije f je svaki interval unutar domene funkcije na kojemu funkcije raste (pada) (sl.5.).

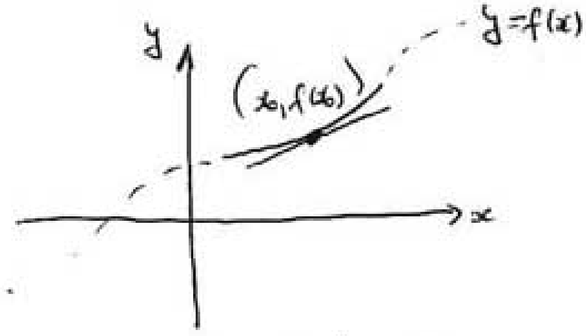


sl.5. (intervali rasta i pada)

4. Važna interpretacija lokalnih ekstrema pomoću intervala (područja) rasta odnosno pada.
Funkcija f postiže lokalni maksimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja rasta prelazi u područje pada (tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija raste, a malo desno, pada).

Funkcija f postiže lokalni minimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja pada prelazi u područje rasta (tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija pada, a malo desno, raste).

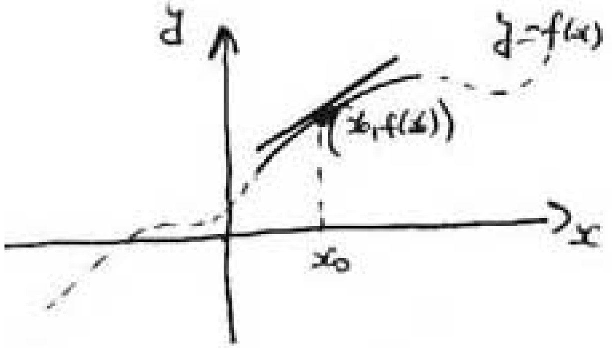
5. Konveksnost i konkavnost funkcije.
Kažemo da je f konveksna u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ ispod grafa (potpuno ili na jednom dijelu oko te točke) (sl.6.).



sl.6 (f je konveksna oko x0)

To je geometrijska definicija, postoji i analitička, ali je tu nećemo spominjati. Kažemo da je funkcija konveksna na nekom intervalu ako je ona konveksna u svakoj točki tog intervala.

Kažemo da je f konkavna u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ iznad grafa (potpuno ili na jednom dijelu oko te točke) (sl.7.).



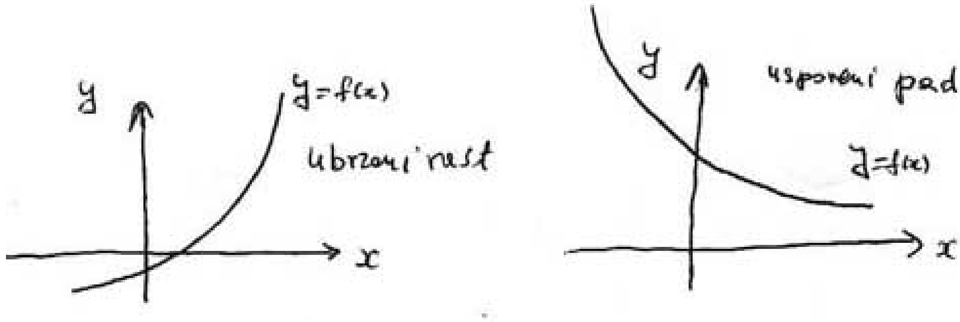
Sl.7. (f je konkavna oko x_0)

To je geometrijska definicija, postoji i analitička, ali je tu nećemo spominjati.
Kažemo da je funkcija konkavna na nekom intervalu ako je ona konkavna u svakoj točki tog intervala.

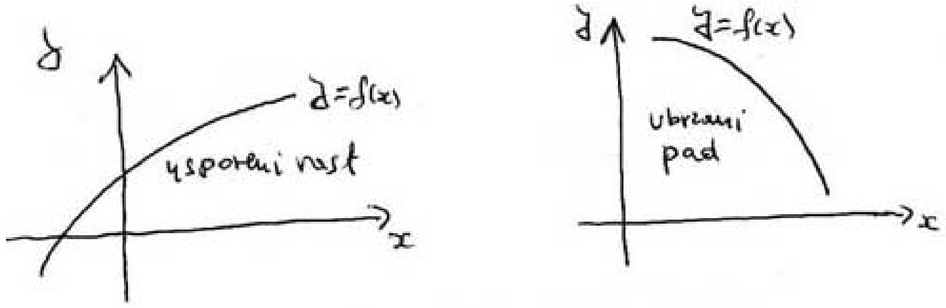
7. Važna interpretacija konveksnosti odnosno konkavnosti pomoću rasta odnosno pada funkcije.
Funkcija f je konveksna ako ubrzano raste ili usporeno pada.
Funkcija f je konkavna ako usporeno raste ili ubrzano pada. (sl.8.).

8. Točke infleksije.
Kažemo da je x_0 točka infleksije funkcije f ako pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti ili obratno. Ako je tako, onda se točka $(x_0, f(x_0))$ zove točka infleksije grafa. (sl.9).

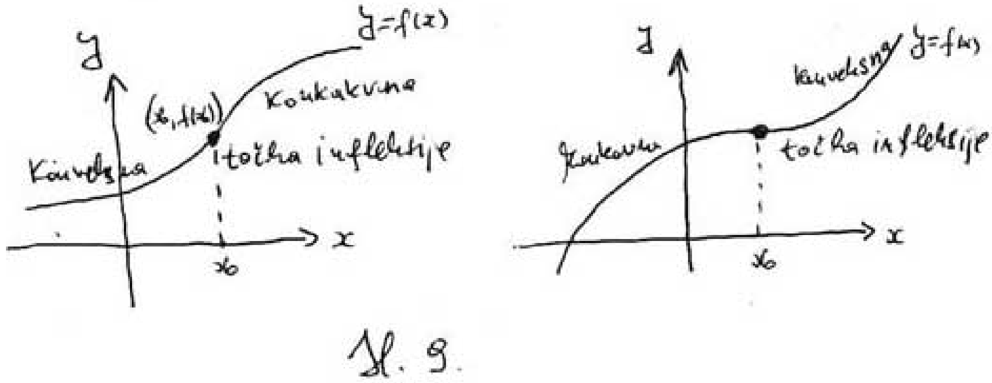
Kritične točke.
Kažemo da je x_0 **kritična točka** ako je ona točka lokalnog ekstrema ili točka infleksije.
Naziv ima jasno fizikalno značenje: u kritičnim točkama dolazi do **bitnih promjena** u nekom procesu (primjerice, ako se neka veličina u procesu povećavala, nakon kritične točke počinje se smanjivati, odnosno ako se ubrzano povećavala, počinje usporavati).



Sl. 8(i) (Konveksna funkcija)



Sl. (8ii) (Konkavna funkcija)

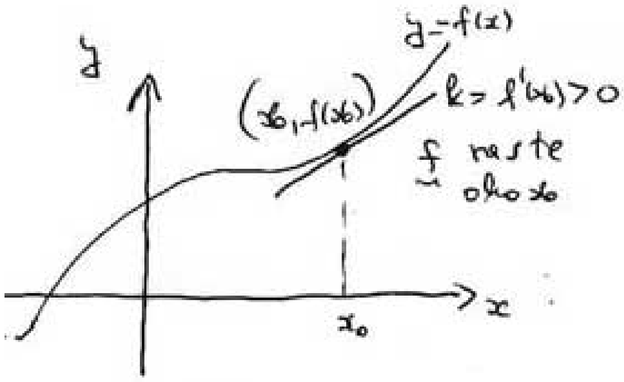


Sl. 9.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Kriteriji rasta i pada.

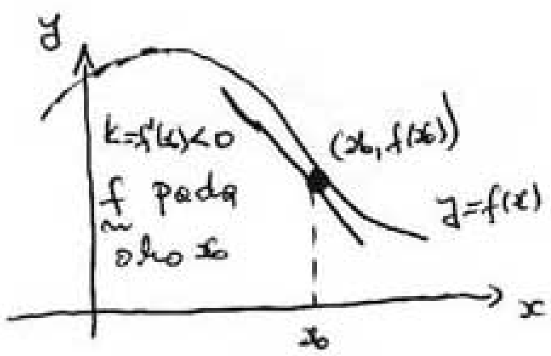
Ako je $f'(x_0) > 0$, onda f raste oko x_0 (sl.10.).



Sl. 10

Objašnjenje. Postoji i strog, analitički dokaz te tvrdnje, a mi ovdje dajemo geometrijsko objašnjenje:
1. $f'(x_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u $(x_0, f(x_0))$. Zato,
2. Ako je $f'(x_0) > 0$ onda je prikloni kut tangente šiljast, tj. tangenta je rastuća.
Zaključak: funkcije f je rastuća oko x_0.

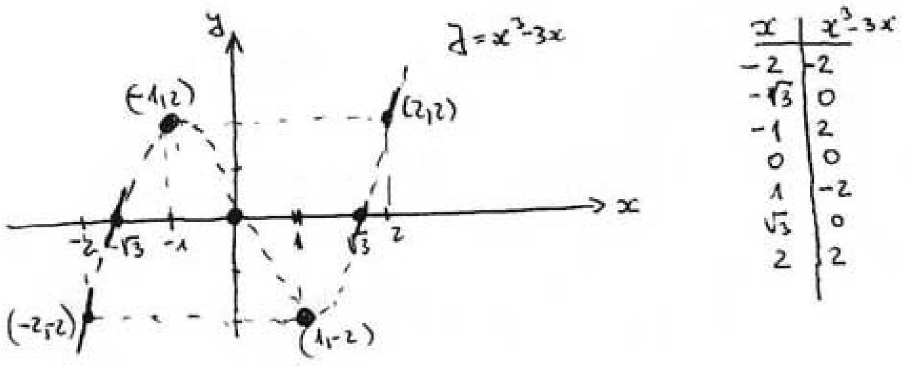
Ako je $f'(x_0) < 0$, onda f pada oko x_0. (sl.11.). Objašnjenje je analogno onome za rast, samo što je tu prikloni kut tangente tup.



Sl. 11.

Primjer 1. - primjena kriterija rasta i pada. Odredimo intervale rasta i pada, i lokalne ekstreme funkcije $f(x) := x^3 - 3x$, te skicirajmo graf.

Iako to nije nužno, najprije odredimo nekoliko točaka grafa, da bismo dobili neku predožbu o funkciji.
Podjimo od točaka u kojima graf siječe x-os,
tj. odredimo **nultočke** funkcije f,
tj. riješimo jednadžbu $x^3 - 3x = 0$.
$x(x^2 - 3) = 0$
pa su rješenja $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.
Ucrtavanjem još nekoliko točaka, dobivamo **grubu predodžbu** o grafu funkcije f (sl.12.).



sl. 12.

Uočavamo da bi f trebala imati točku lokalnog maksimuma x_{max} negdje izmedju $-\sqrt{3}$ i 0, i točku lokalnog minimuma x_{min} negdje izmedju 0 i $-\sqrt{3}$. Treba odrediti točno x_{max} i x_{min}.

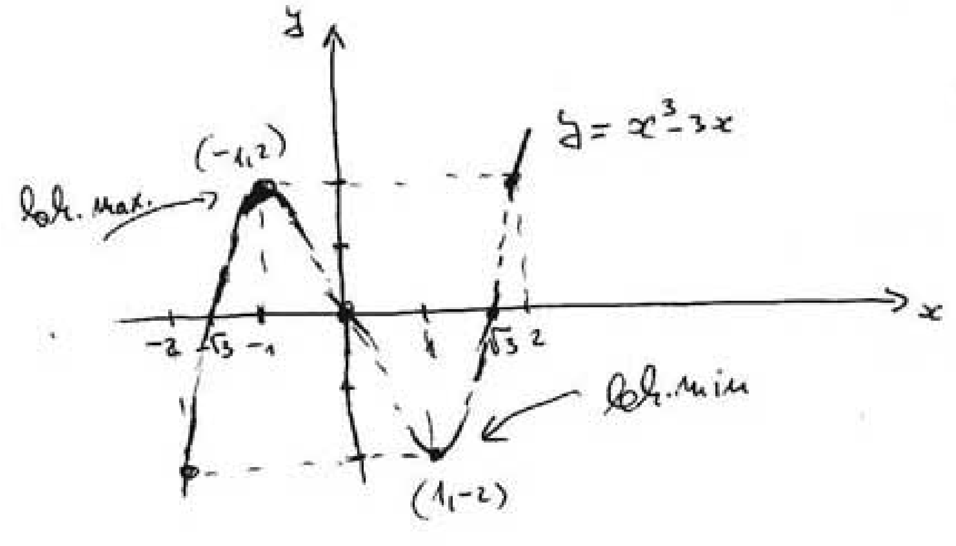
Tu je $f'(x) = 3x^2 - 3$. Odredimo područja pada i rasta; podjimo od područja pada (jer je tu tako jednostavnije, ali mogli smo poći i od područja rasta):
$f'(x) < 0$
$3x^2 - 3 < 0$
$x^2 < 1$
$-1 < x < 1$.
Zaključujemo:
1. Funkcija pada za $-1 < x < 1$, tj, $< -1, 1 >$ je interval pada.
2. Funkcija raste za $x < -1$ i za $x > 1$, tj. $< -\infty, -1 >$ i $< 1, +\infty >$ su intervali rasta (uočimo da smo ta dva intervala dobili izravno, kao komplementarne otvorene intervale, intervalu pada).
3. (i) U $x = -1$ funkcija prelazi iz područja rasta u područje pada, pa je $x_{max} = -1$. Kako je $f(-1) = 2$, točka $(-1, 2)$ je točka lokalnog maksimuma grafa. To se obično zapisuje kao:

$$(x_{max}, y_{max}) = (-1, 2)$$

(ii) U $x = 1$ funkcija prelazi iz područja pada u područje rasta, pa je $x_{min} = 1$. Kako je $f(1) = -2$, točka $(1, -2)$ je točka lokalnog minimuma grafa. To se obično zapisuje kao:

$$(x_{min}, y_{min}) = (1, -2)$$

Sad možemo malo preciznije skicirati graf funkcije (sl.13.).



Sl. 13.

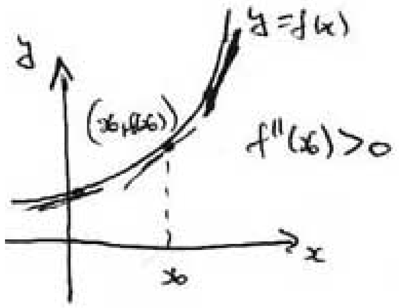
Napomenimo da još ne možemo biti zadovoljni jer još uvijek neznamo točno područja konveksnosti i konkavnosti, odnosno točke infleksije (iako ih naziremo otprilike).
Napomenimo takodjer, da smo područja rasta i pada te lokalne ekstreme mogli odrediti bez ikakva crtanja, dovoljno je bilo riješiti nejednadžbu $f'(x) < 0$ (ili $f'(x) > 0$).

Kriteriji konveksnosti i konkavnosti.

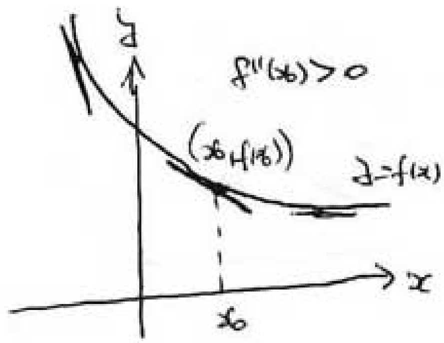
Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je f konveksna oko x_0.
Obrazloženje. Iako postoji i strogi analitički dokaz, dat ćemo geometrijsko obrazloženje (**geometrijska interpretacija druge derivacije**):
1. Ako je $f''(x_0) > 0$ onda derivacija f' raste oko x_0 (zbog kriterija rasta i zbog toga što je $f'' = (f')'$). Mogu nastupiti sljedeće mogućnosti:
(i) f raste oko x_0, pa zato ubrzano raste (jer joj se derivacija povećava), pa je konveksna (sl.14(i)).
(ii) f pada oko x_0, pa zato usporeno pada, pa je konveksna (sl.14(ii)).
(iii) f ima lokalni ekstrem u x_0, pa zato taj ekstrem mora biti minimum, pa je f opet konveksna. (sl.15.).
Dakle, ako je $f''(x_0) > 0$, f je konveksna oko x_0.

Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je f konkavna oko x_0 (sl.16.).

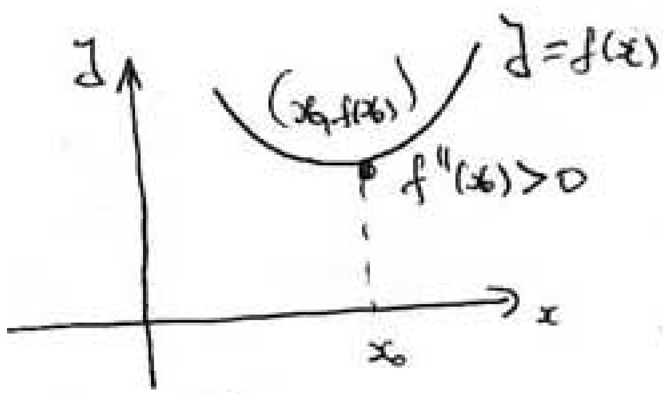
Obrazloženje. Analogno onome za konveksnost.



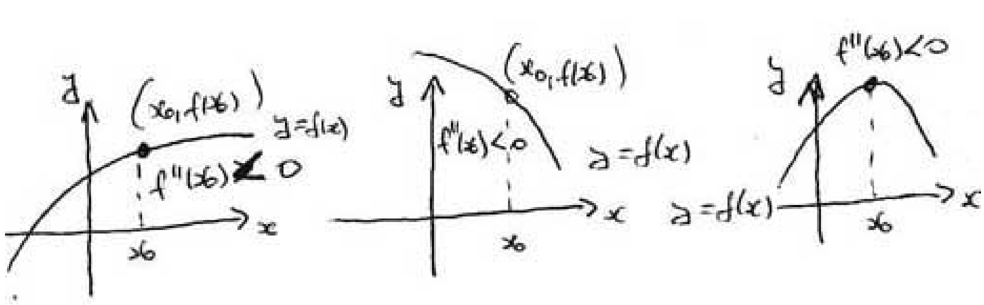
Sl. 14(i)



Sl. 14(ii)



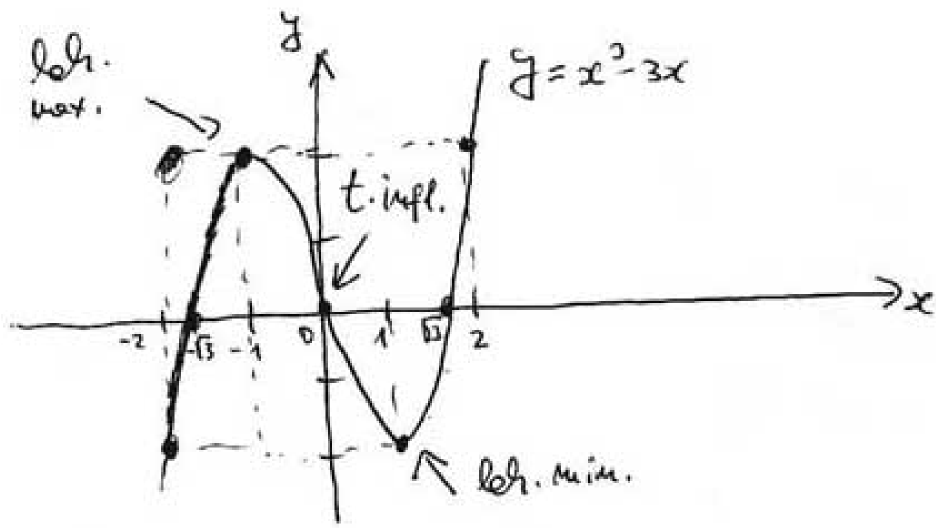
Sl. 15



Sl. 16.

Primjer 2. - Primjena kriterija konveksnosti i konkavnosti.
Skicirajmo graf funkcije $f(x) := x^3 - 3x$.

Već smo u Primjeru 1. odredili nultočke, intervale rasta i pada i lokalne ekstreme. Ostaje odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije. Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Dakle:
$f''(x) > 0$
$6x > 0$
$x > 0$. Zato:
1. f je konveksna za $x > 0$
2. f je konkavna za $x < 0$
3. U $x_0 = 0$ je točka infleksije, jer u toj točki f prelazi iz područja konkavnost u područje konveksnosti.
Sad možemo puno preciznije skicirati graf (sl.17).

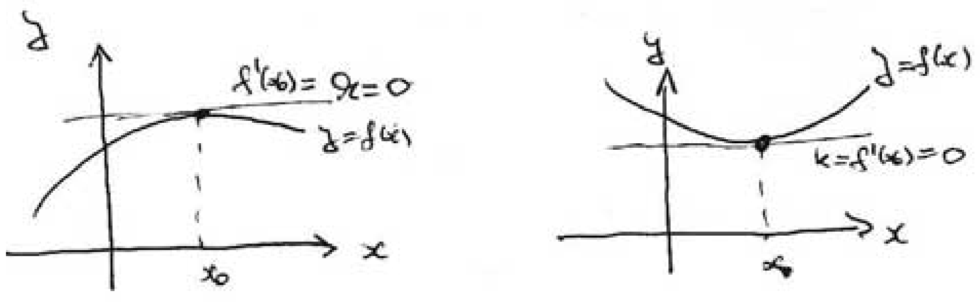


Sl. 17.

Izravni kriteriji lokalnog ekstrema.

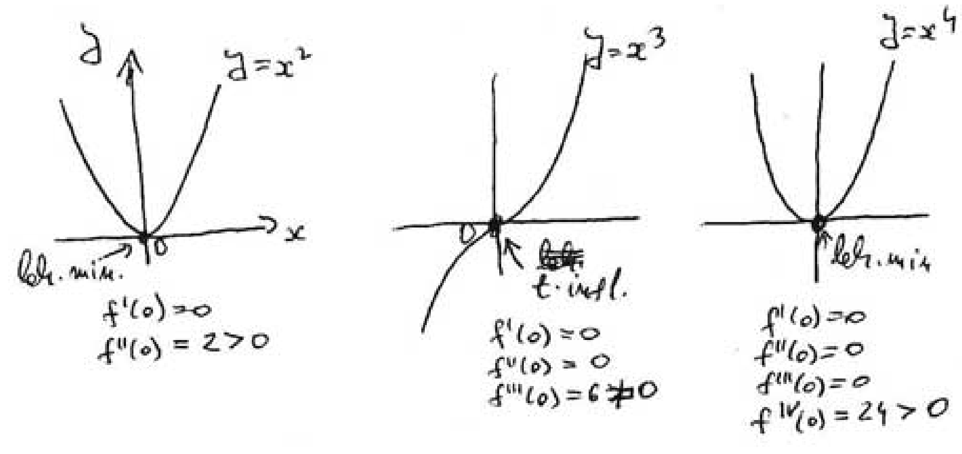
1. Nužni uvjet lokalnog ekstrema.
Ako je u x_0 lokalni ekstrem onda je $f'(x_0) = 0$, tj. tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$ usporedna je s x-osi. (sl. 18.).

Obrazloženje. Postoji i strog analitički dokaz, a geometrijsko je obrazloženje očito.



Sl. 18.

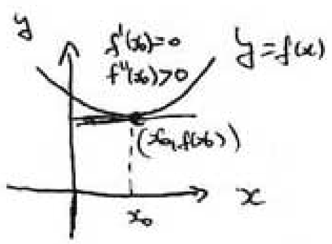
Važna napomena. Uvjet $f'(x_0) = 0$ je nužan, ali općenito, ne i dovoljan da bi x_0 bio lokalni ekstrem. To u praksi znači, da ako želimo odrediti sve lokalne ekstreme neke funkcije, jedan od pristupa jest da riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Tada su lokalni ekstremi medju rješenjima te jednadžbe, ali može se dogoditi da neka rješenja ne budu lokalni ekstremi već točke infleksije.
To jasno vidimo na primjerima potencija $f(x) = x^n$ i činjenice da parne potencije u $x_0 = 0$ imaju minimum, a neparne (osim za eksponent 1) imaju tu točku infleksije (sl.19.). Uočimo da je uvijek (za $n > 1$) $f'(0) = 0$).



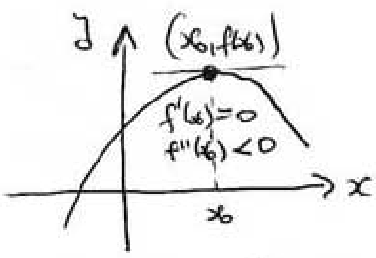
Sl. 19.

Dovoljni uvjeti lokalnog ekstrema.
(i). Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni minimum.
(ii) Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum.

Obrazloženje. Iako postoji i strog analitički dokaz, mi dajemo geometrijsko obrazloženje (sl. 20.).



Sl. 20(i) Lokalni minimum



Sl. 20(ii) lokalni maksimum

Primjer 3. - primjena kriterija nužnog i dovoljnog uvjeta lokalnog ekstrema
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x$.

Napomenimo da smo već u Primjeru 1. pokazali, primjenom kriterija rasta i pada, da je $x_{max} = -1$ i $x_{min} = 1$. Sad ćemo to dobiti izravno iz kriterija lokalnog ekstrema.
Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.
1. Nužan uvjet lokalnog ekstrema: $f'(x) = 0$.
$3x^2 - 3 = 0$
$x_1 = -1, \ x_2 = 1$
2. Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema:
$f''(x_1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ pa je u $x = -1$ lokalni maksimum.
$f''(x_2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

Poopćenje kriterija lokalnog ekstrema
Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$ onda je:
(i) ako je $f'''(x_0) \neq 0$, onda je u x_0 točka infleksije.
(ii) ako je i $f'''(x_0) = 0$ onda je:
(a) ako je $f^{iv}(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum
(b) ako je $f^{iv}(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni miniimum
(c) ako je $f^{iv}(x_0) = 0$, onda analogno treba gledati petu, odnosno šestu derivaciju itd.

Primjer 4. - Primjena popćenog kriterija.
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^5 - 5x^3$.

Tu je $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$, $f''(x) = 20x^3 - 30x$, $f'''(x) = 60x^2 - 30$.
1. $f'(x) = 0$
$5x^4 - 5x^2 = 0$
$x_1 = -1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$
Tu su mogući lokalni ekstremi:

2. (i) $f''(x_1) = 20(-1)^3 - 30(-1) = 10 > 0$ pa je u $x = -1$ lokalni minimum.
(ii) 2. $f''(x_2) = 20 \cdot 0^3 - 30 \cdot 0 = 0$ pa treba nastaviti s višim derivacijama:
$f'''(x_2) = 60 \cdot 0^2 - 30 = -30 \neq 0$ pa je u $x = 0$ točka infleksije.

(iii) $f''(x_3) = 20 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1 = -10 < 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

Fizikalna značenja lokalnih ekstrema, druge derivacije i točaka infleksije.

Funkcijskom vezom $y = f(x)$ opisano je kako se mijenja druga veličina y u ovisnosti o promjeni prve veličine x. Zato:

1. $f'(x)$ je brzina kojom se mijenja y pri vrijednosti x prve veličine.

2. U lokalnim ekstremima brzina je jednaka nuli.

3. $f''(x)$ je akceleracija promjene druge veličine pri vrijednosti x prve veličine (to je zato što je $f'' = (f')'$, tj. f'' je brzina promjene brzine.

4. U točkama infleksije ubrzanje prelazi u usporenje i obratno.