VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 3

Problem površine - određeni integral. Leibniz-Newtonova formula

Problem površine - određeni integral. Leibniz-Newtonova formula

Računat ćemo određeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, u oznaci $\int_a^b f(x)dx$, te kasnije upoznati geometrijsku interpretaciju dobivenog rezultata. Brojeve a i b zovemo redom **donja**, odnosno **gornja granica integracije**, a interval $[a,b]$ **interval integracije**. Potrebno je poznavati osnovna svojstva određenog integrala integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b] \subseteq \mathscr{D}(f)$:

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, gdje je c konstanta

(4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ za svaki $c \in < a,b >$.

(5) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a,b]$.

No, ostaje pitanje kako efektivno **računati** neki određeni integral? Ovdje se ključnom pokazuje tzv. **Newton-Leibnizova formula**:

Ako je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju F (funkciju takvu da je $F' = f$), onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Često umjesto $F(b) - F(a)$ pišemo skraćeno $F(x)|_a^b$, pa Newton-Leibnizovu formulu možete pamtiti u ovom obliku:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Napomena: Znamo da je, prema definiciji, neodređeni integral funkcije f jednak primitivnoj funkciji F, točnije čitavoj klasi primitivnih funkcija $\{F + C | C \in \mathbb{R}\}$. Dakle, dovoljno je naći neodređeni integral funkcije f i potom određeni integral izračunati kao razliku vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici integracije. Pritom je važno uvidjeti da ovaj račun *ne ovisi* o tome kojeg smo predstavnika klase primitivnih funkcija izabrali. Naime, ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu $[a,b]$, onda znamo da postoji realna konstanta C takva da je $F_2 = F_1 + C$, pa je

$F_1|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_2(b) - F_2(a) = F_2|_a^b$.

Stoga se (radi jednostavnosti) kod računa određenog integrala *zanemaruje aditivna konstanta*.

Primjer 1 Izračunajte određeni integral $\int_{-3}^{5}(3x^2-1)dx$.

Rješenje: Koristeći Newton-Leibnizovu formulu računamo:

$$\int_{-3}^{5}(3x^2-1)dx = \int_{-3}^{5}3x^2dx - \int_{-3}^{5}1dx =$$
$$= (x^3-x)|_{-3}^{5} = 5^3-5-((-3)^3-(-3)) = 120+24 = 144.$$

Određeni integrali pozitivnih funkcija

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ **pozitivne** funkcije f točno je jednak površini P ravninskog područja omeđenog grafom funkcije f, $x-$osi i pravcima $x = a$ i $x = b$.

Primjer 2

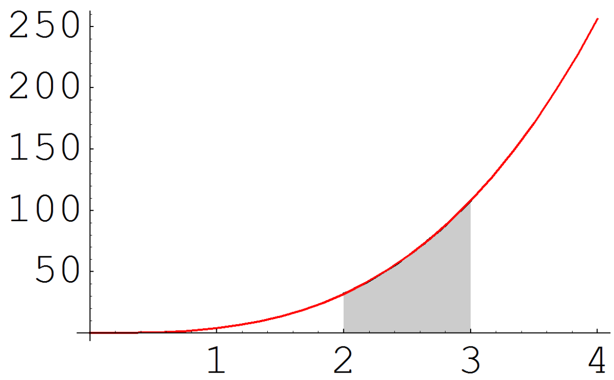
Izračunajte određeni integral $\int_2^3 4x^3dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Znamo da je primitivna funkcija funkcije $g(x) = x^3$ dana s $G(x) = \frac{x^4}{4}$ i tu činjenicu uz svojsvto (3) i Newton-Leibnizovu formulu koristimo u računu:

$$\int_2^3 4x^3dx \quad = \quad 4\int_2^3 x^3dx = 4\cdot(\frac{x^4}{4})|_2^3 = (x^4)|_2^3 = 3^4-2^4 = 65.$$

Geometrijska interpretacija rezultata je sljedeća: rezultat integracije, dakle 65, brojčano odgovara površini područja odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = 4x^3$, odozdo $x-$osi, slijeva pravcem $x = 2$, a zdesna pravcem $x = 3$:



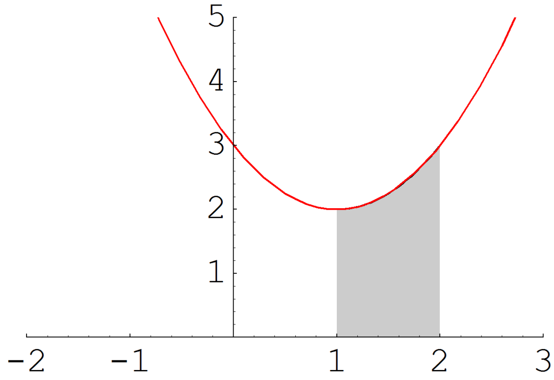
Primjer 3

Izračunajte $\int_1^2(x^2-2x+3)dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2-2x+3)dx &= \int_1^2 x^2dx - 2\int_1^2 xdx + 3\int_1^2 dx = \\ &= (\frac{x^3}{3})|_1^2 - 2(\frac{x^2}{2})|_1^2 + 3x|_1^2 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Broj $\frac{7}{3}$ brojčano odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2-2x+3$, ododzo $x-$osi, slijeva pravcem $x=1$, a zdesna pravcem $x=3$:



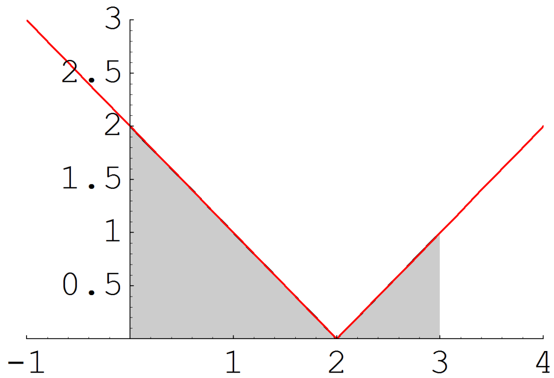
Primjer 4

Izračunajte $\int_0^3 |x-2|dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|dx &= \int_0^2 -(x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \\ &= -(\frac{x^2}{2}-2x)|_0^2 + (\frac{x^2}{2}-2x)|_2^3 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Što se geometrijske intrepretacije rezultata tiče, broj $\frac{5}{2}$ odgovara površini područja odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = |x-2|$, odozdo $x-$osi, slijeva pravcem $x=0$ (dakle $y-$osi), a zdesna pravcem $x=3$:

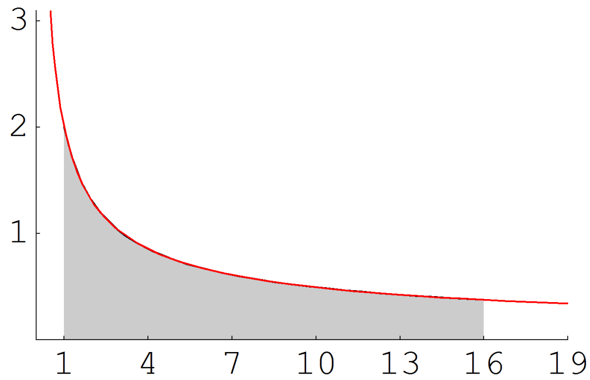


Primjer 5 Izračunajte $\int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x}dx$ i geometrijski interpretirajte dobiveni rezultat.

Rješenje: Najprije računamo zadani integral:

$$\int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x}dx = \int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx + \int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x}dx = \int_1^{16} x^{\frac{-1}{2}}dx + \int_1^{16} x^{\frac{-3}{4}}dx =$$
$$= (\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})|_1^{16} + (\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}})|_1^{16} = (2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x})|_1^{16} = (2\sqrt{16}+4\sqrt[4]{16}) - (2\sqrt{1}+4\sqrt[4]{1}) =$$
$$= 2\cdot 4+4\cdot 2-2-4 = 16-6 = 10.$$

Rezultat brojčano odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x}$, ododzo $x-$osi, slijeva pravcem $x = 1$, a zdesna pravcem $x = 16$:



Zadatak 1 Izračunajte i geometrijski interpretirajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_1^2 2xdx$

(2) $\int_{-2}^3 |x^3|dx$

(3) $\int_1^2 \frac{1}{x^6}dx$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

(5) $\int_0^{2\pi} |\sin(2x)|dx$

Određeni integrali ostalih funkcija

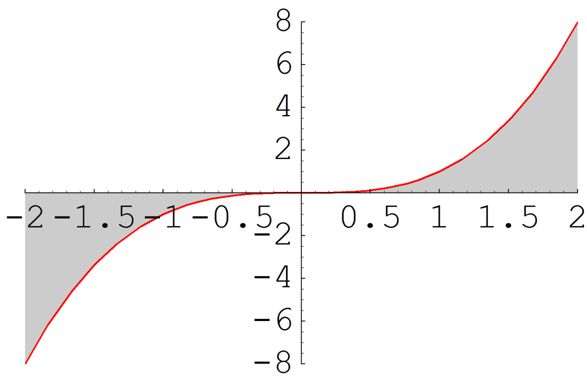
Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ funkcije f koja na intervalu $[a,b]$ ne poprima samo pozitivne vrijednosti jednak je razlici između zbroja površina iznad osi x (a ispod grafa funkcije f) i zbroja površina ispod osi x (a iznad grafa funkcije f). Najbolje da to objasnimo na primjeru.

Primjer 6 Izračunajte određeni integral $\int_{-2}^2 x^3dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje: Vidimo da je rezultat integracije nula:

$$\int_{-2}^2 x^3dx = (\frac{x^4}{4})|_{-2}^2 = (\frac{2^4}{4}) - (\frac{(-2)^4}{4}) = 4-4 = 0.$$

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^3$ na intervalu $[-2,2]$:



Vidimo da nultočka funkcije $f(x) = x^3$, tj. točka $x = 0$ označava prijelaz grafa funkcije f iz donje u gornju poluravninu koordinatnog sustava. Integral $\int_{-2}^{2} x^3 dx$ možemo zapisati ovako:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx.$$

Prvi integral s desne strane gornje jednakosti računa **negativnu vrijednost** površine područja omeđenog odozdo grafom funkcije f, odozgo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = -2$, a zdesna pravcem $x = 0$, dok drugi integral s desne strane gornje jednakosti računa površinu područja omeđenog odozgo grafom funkcije f, odozdo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = 0$, a zdesna pravcem $x = 2$. Ako prvu površinu odznačimo s P_1, a drugu s P_2, onda zapravo vrijedi

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = P_1 - P_2.$$

Kako je $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$, to je $P_1 - P_2 = 0$, tj. $P_1 = P_2$, Što je znog simetričnosti funkcije f (ona je neparna, tj. simetrična obzirom na ishodište koordinatnog sustava) i jasno. Dakle, rezultat integracije ukazuje da su dvije površine sa slike međusobno jednake.

Primjer 7

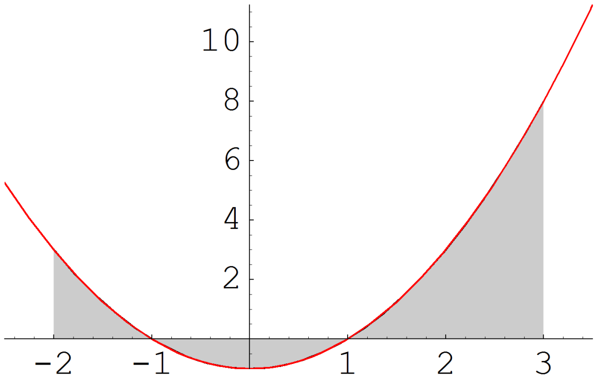
Izračunajte određeni integral $\int_{-2}^{3}(x^2 - 1)dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Računamo:

$$\int_{-2}^{3}(x^2 - 1)dx = (\frac{x^3}{3} - x)|_{-2}^{3} = (\frac{3^3}{3} - 3) - (\frac{(-2)^3}{3} - (-2)) = 6 - (\frac{-2}{3}) = \frac{20}{3}.$$

Geometrijska interpretacija rezultata je sljedeća: rezultat integracije, dakle $\frac{20}{3}$, brojčano odgovara $P_1 - P_2 + P_3$, gdje je P_1 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = -2$ a zdesna pravcem $x = -1$, P_2 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = -1$ a zdesna pravcem $x = 1$, te P_3 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = 1$ a zdesna pravcem $x = 3$. Sva tri područja su odozgo i odozdo omeđena grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$ te $x-$osi. Točke $x = -1$ i $x = 1$ u kojima graf funkcije f prelazi iz gornje u donju poluravninu koordinatnog sustava dobivamo rješavanjem jednadžbe $f(x) = x^2 - 1 = 0$ (to su nultočke funkcije f).



Ovaj rezultat smo dobili stoga što je

$$\int_{-2}^{3}(x^2-1)dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx,$$

gdje prvi integral s desne strane odgovara P_1, drugi $-P_2$, a treći P_3.

Primjer 8 Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$, $x-$osi te pravcima $x = -2$ i $x = 3$.

Rješenje: Rješavanje ovog zadatka slično je prethodnom, uz bitnu razliku da ćemo ukupnu površinu $P = P_1 + P_2 + P_3$ lika s gornje slike dobiti ako integral $\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$ računamo s negativnim predznakom. To znači da je

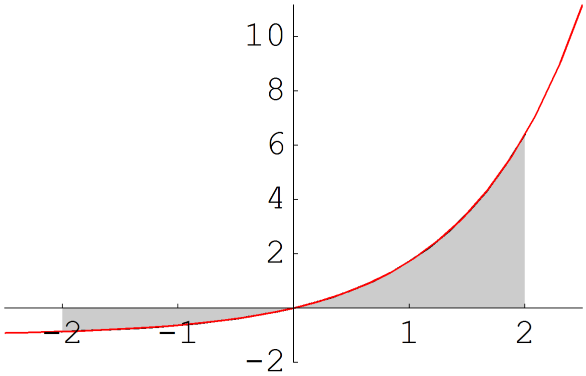
$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx - \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx = \\ &= (\frac{x^3}{3}-x)|_{-2}^{-1} - (\frac{x^3}{3}-x)|_{-1}^{1} + (\frac{x^3}{3}-x)|_{1}^{3} = \\ &= [(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)) - (\frac{(-2)^3}{3}-(-2))] - \\ &\quad -[(\frac{1^3}{3}-1) - (\frac{(-1)^3}{3}-(-1))] + \\ &\quad +[(\frac{3^3}{3}-3) - (\frac{1^3}{3}-1)] = \\ &= \frac{4}{3} - (\frac{-4}{3}) + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Primjer 9 Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = e^x - 1$, $x-$osi te pravcima $x = -2$, $x = 2$.

Rješenje: Najprije provjeravamo koje su nultočke funkcije f, tj. rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$:

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 \Rightarrow x = 0.$$

Kako se $x = 0$ nalazi unutar intervala integracije $[-2, 2]$, jedan dio zadanog područja integracije se nalazi ispod, a drugi iznad $x-$osi:



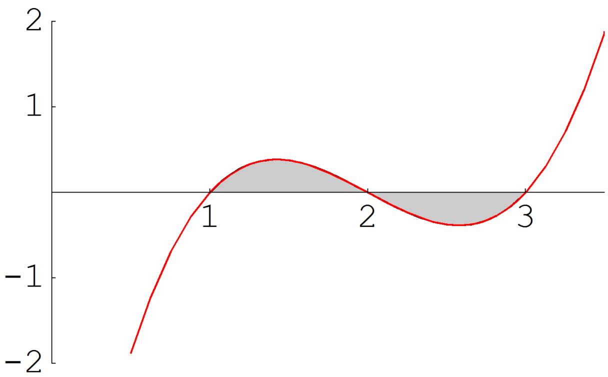
Vidimo sa slike da je (kako bismo izračunali površinu P zadanog područja) potrebno integral na intervalu $[-2,0]$ računati s negativnim, a na intervali $[0,2]$ s pozitivnim predznakom:

$$\begin{aligned} P &= -\int_{-2}^{0}(e^x-1)dx+\int_{0}^{2}(e^x-1)dx= \\ &= -(e^x-x)|_{-2}^{0}+(e^x-x)|_{0}^{2}= \\ &= -[(e^0-0)-(e^{-2}-(-2))]+[(e^2-2)-(e^0-0)]= \\ &= -(1-e^{-2}-2)+(e^2-2-1)=\ldots= \\ &= e^2+e^{-2}-2. \end{aligned}$$

Primjer 10

Izračunjte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ i $x-$osi.

Rješenje: Primijetimo da nisu zadane granice područja slijeva i zdesna, no to nije niti potrebno, jer je područje u potpunosti određeno zahtjevom iz teksta zadatka (ograničenost odozgo i odozdo). Naime, očito su nultočke ove funkcije točke $x_1=1$, $x_2=2$ i $x_3=3$. Analizom toka funkcije dobivamo sljedeći graf:



odakle je jasno da nije potrebno zadati granice slijeva i zdesna – one se "očitaju" sa slike.

Preciznije, vidimo da se područje sastoji od dva dijela: površina prvog će se računati kao $\int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx$, a površina drugog kao $-\int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx$, pa za ukupnu površinu P imamo

$$\begin{aligned}
P &= \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx = \\
&= \int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)dx - \int_2^3 (x^3-6x^2+11x-6)dx = \\
&= (\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x)|_1^2 - (\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x)|_2^3 = \\
&= \ldots = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2 Izračunajte i interpretirajte geometrijski sljedeće određene integrale:

(1) $\int_{-2}^2 (2x-1)dx$

(2) $\int_{-3}^2 (x^2+x)dx$

(3) $\int_{-2\pi}^{\pi} \cos x dx$

Zadatak 3 Izračunajte površinu omeđenu s $x-$osi, grafom funkcije f i pravcima $x=a$, $x=b$ ako je:

(1) $f(x) = 2-4x$, $a=0$, $b=2$

(2) $f(x) = -x^2-x+2$, $a=-4$, $b=2$

(3) $f(x) = 2^x-2$, $a=-3$, $b=2$

Zadatak 4 Izračunajte površinu omeđenu s $x-$osi i grafom funkcije f ako je:

(1) $f(x) = |2x-1|-5$

(2) $f(x) = -x^2-x+6$

(3) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-4)$