

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

NUMERIČKE I STAT. METODE; OSNOVE STAT. OKOL. I NUM. METODE
Ogledni Drugi Kolokvij Ei-Ki

2014/2015.
TEORETSKI DIO

Ime i prezime:

Smjer:

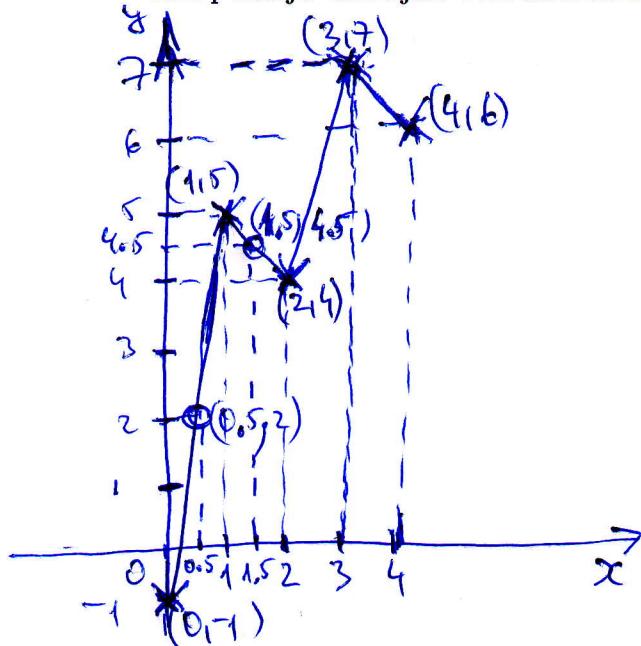
Matični broj:

Napomena: Ispit traje 60 minuta. Zabranjena je uporaba mobilnih uređaja tijekom ispita.

1	2	3	4	5	ukupno

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-1	5	4	7	6

- (i) Ucrtajte točke u koordinatni sustav i predočite grafički linearu interpolaciju funkcijeske veze između x i y . (2 boda)



- (ii) Napišite formule za linearu interpolaciju na intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$. (4 boda)

Interval $[0, 1]$. $y = -1 + \frac{5 - (-1)}{1 - 0} (x - 0) = 6x - 1$
 $f_1(x) = 6x - 1$ je linearne uporeklimeće na $[0, 1]$

Interval $[1, 2]$. $y = 5 + \frac{4 - 5}{2 - 1} (x - 1) = -x + 6$

$f_2(x) = -x + 6$ je linearne uporeklimeće
na $[1, 2]$.

- (iv) Koristeći (ii) procijenite vrijednost veličine y za $x = 0.5$ i $x = 1.5$.
Procjene predočite na grafu. (4 boda)

$$y(0.5) \approx f_1(0.5) = 6 \cdot 0.5 - 1 = 2$$

$$y(1.5) \approx f_2(1.5) = -1.5 + 6 = 4.5$$

Vidi (i) za predodržku projekcije.

2. (i) Provjerite da je $f(x) := -\frac{19}{24}x^4 + \frac{79}{12}x^3 - \frac{425}{24}x^2 + \frac{215}{12}x - 1$ interpo-
lacijski polinom za točke iz 1. zadatka. (2 boda)

$$f(0) = -1 \quad \text{uv}$$

$$f(1) = -\frac{19}{24} \cdot 1^4 + \frac{79}{12} \cdot 1^3 - \frac{425}{24} \cdot 1^2 + \frac{215}{12} \cdot 1 - 1 = 5 \quad \text{uv}$$

$$f(2) = -\frac{19}{24} \cdot 2^4 + \frac{79}{12} \cdot 2^3 - \frac{425}{24} \cdot 2^2 + \frac{215}{12} \cdot 2 - 1 = 4 \quad \text{uv}$$

$$f(3) = -\frac{19}{24} \cdot 3^4 + \frac{79}{12} \cdot 3^3 - \frac{425}{24} \cdot 3^2 + \frac{215}{12} \cdot 3 - 1 = 7 \quad \text{uv}$$

$$f(4) = -\frac{19}{24} \cdot 4^4 + \frac{79}{12} \cdot 4^3 - \frac{425}{24} \cdot 4^2 + \frac{215}{12} \cdot 4 - 1 = 6 \quad \text{uv}$$

- (ii) Procijenite vrijednost veličine y za $x = 0.5$ i $x = 1.5$. (2 boda)

$$y(0.5) \approx f(0.5) = -\frac{19}{24} \cdot 0.5^4 + \frac{79}{12} \cdot 0.5^3 - \frac{425}{24} \cdot 0.5^2 + \frac{215}{12} \cdot 0.5 - 1 \\ = 4.3046875 \approx 4.3$$

$$y(1.5) \approx f(1.5) = -\frac{19}{24} \cdot 1.5^4 + \frac{79}{12} \cdot 1.5^3 - \frac{425}{24} \cdot 1.5^2 + \frac{215}{12} \cdot 1.5 - 1 \\ = 4.2421875 \approx 4.2$$

- (iii) Provjerite da je za točke iz 1. zadatka kubni spline na intervalu

$$[0, 1], s_0(x) := -\frac{125}{56}x^3 + \frac{461}{56}x - 1, \text{ a na intervalu } [1, 2], s_1(x) := \frac{233}{56}(x-1)^3 - \frac{375}{56}(x-1)^2 + \frac{43}{28}(x-1) + 5. \quad (4 \text{ boda})$$

$$\Delta_0(0) = -1 \quad \text{uv}$$

$$\Delta_1(1) = 5 \quad \text{uv}, \quad \Delta_0(1) = \Delta_1(1) = 5 \quad \text{uv}$$

$$\Delta_0(1) = -\frac{125}{56} \cdot 1^3 + \frac{461}{56} \cdot 1 - 1 \\ = 5 \quad \text{uv}$$

$$\Delta_1(2) = \frac{233}{56} \cdot 1^3 - \frac{375}{56} \cdot 1^2 + \frac{43}{28} \cdot 1 + 5 \\ = 4 \quad \text{uv}$$

$$\Delta_0'(x) = -\frac{375}{56}x^2 + \frac{461}{56};$$

$$\Delta_1'(x) = \frac{699}{56}(x-1)^2 - \frac{375}{28}(x-1) + \frac{43}{28}$$

$$\Delta_0''(x) = -\frac{375}{28}x$$

$$\Delta_1''(x) = \frac{699}{28}(x-1) - \frac{375}{28}$$

$$\Delta_0'(1) = -\frac{375}{56} \cdot 1^2 + \frac{461}{56} \\ = \frac{43}{28}$$

$$\Delta_1'(1) = \frac{43}{28}; \quad \Delta_0'(1) = \Delta_1'(1) = \frac{43}{28} \quad \text{uv}$$

$$\Delta_0''(1) = -\frac{375}{28}$$

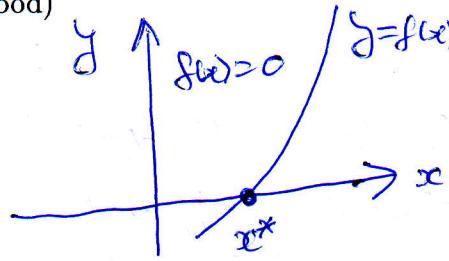
$$\Delta_1''(1) = -\frac{375}{28}; \quad \Delta_0''(1) = \Delta_1''(1) = -\frac{375}{28}$$

- (iv) Procijenite vrijednost veličine y za $x = 0.45$ i $x = 1.5$. (2 boda)

$$y(0.45) \approx \Delta_0(0.45) = -\frac{125}{56} \cdot 0.45^3 + \frac{461}{56} \cdot 0.45 - 1 \\ = 2.80106 \approx 2.8$$

$$y(1.5) \approx \Delta_1(1.5) = \frac{233}{56}(1.5-1)^3 - \frac{375}{56}(1.5-1)^2 + \frac{43}{28}(1.5-1) + 5 \\ = 4.613839 \approx 4.6$$

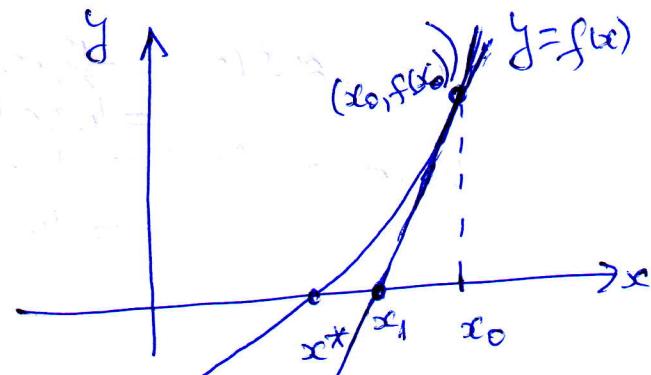
3. (i) Predočite geometrijski jednadžbu $f(x) = 0$ i njeno rješenje x^* . (1 bod)



Rješenje x^* je tačka u kojoj graf od f riječi x .

- (ii) Napišite i predočite formulu za x_1 pomoću x_0 pri metodi tangente. (3 boda)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



- (iv) Jednadžbu $x^4 = 10$ predočite u obliku $f(x) = 0$, izolirajte pozitivno rješenje, odredite x_2 ako je $x_0 = 2$ i usporedite s rezultatom dobivenim kalkulatorom. Predočite slikom i komentirajte. (6 bodova)

$$x^4 = 10 \sim x^4 - 10 = 0$$

$$f(x) = x^4 - 10$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= x_0 - \frac{x_0^4 - 10}{4x_0^3}$$

$$= 2 - \frac{6}{32} = 1.8125$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= x_1 - \frac{x_1^4 - 10}{4x_1^3}$$

$$= 1.8125 - \frac{1.8125^4 - 10}{4 \cdot 1.8125^3}$$

$$= 1.7792$$

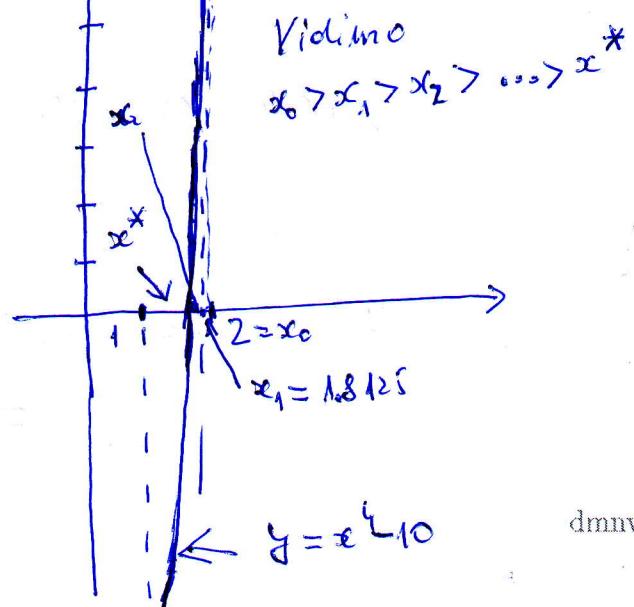
$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & x^4 - 10 \\ \hline 1 & -9 \\ 2 & 6 \\ \hline \end{array} \quad 1 < x^* < 2$$

$[1,2]$ interval (zeljenosti)

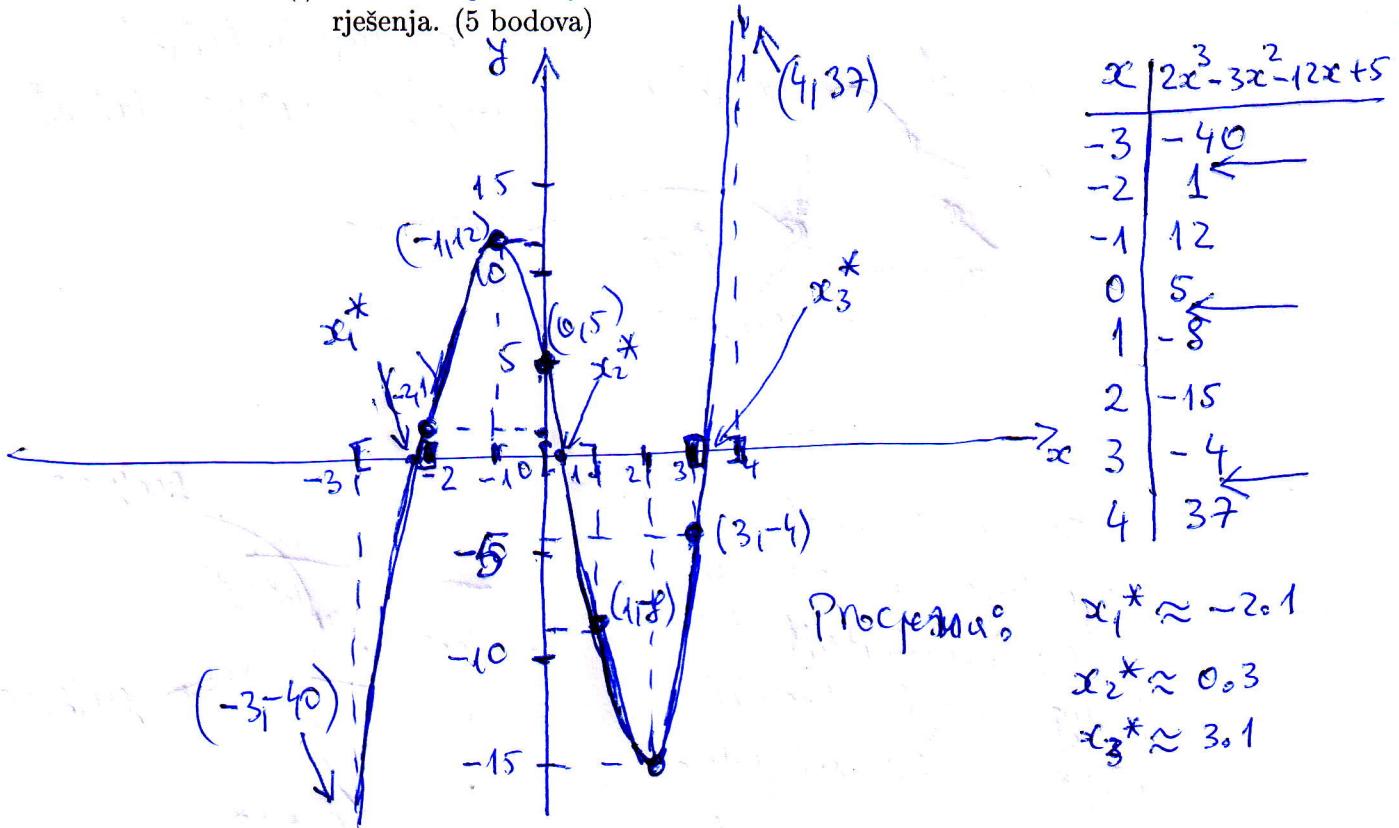
$$x^4 = 10 \sim x = \sqrt[4]{10} \approx 1.7783$$

na 4 decimalne mjesto.

$$y = x^4 - 10 \quad (2,6)$$

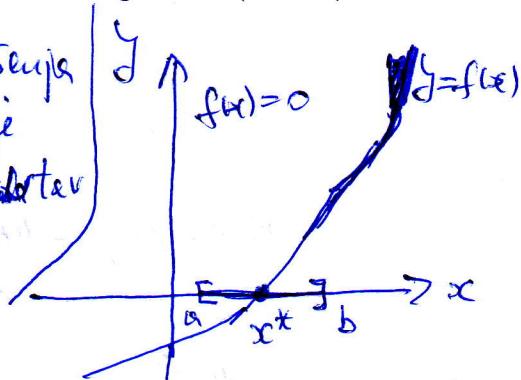


4. (i) Pređočite grafički jednadžbu $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$ i procijenite rješenja. (5 bodova)



- (ii) Što je interval izoliranosti rješenja? Pređočite grafički. (2 boda)

Interval izoliranosti rješenja
 x^* jednake je $f(x)=0$ je
 smjer interval $[a,b]$ u kojem
 koji je uveli x^* , tj.
 $a < x^* < b$, i mijedno
 drugo rješuje.



$[a,b]$ je interval
 izoliranosti od x^* .

- (iii) Napišite i pređočite intervale izoliranosti za jednadžbu iz (i). (3 boda)

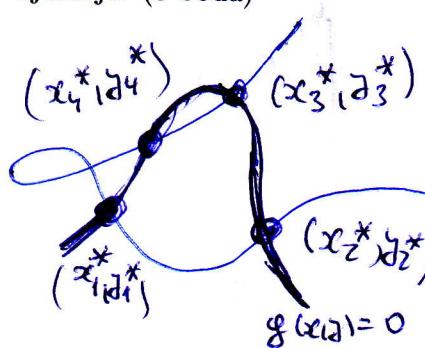
$[-3, -2]$ interval izoliranosti rješaja x_1^*

$[0, 1]$ interval izoliranosti rješaja x_2^*

$[3, 4]$ interval izoliranosti rješaja x_3^*

Vidi zidan u (i).

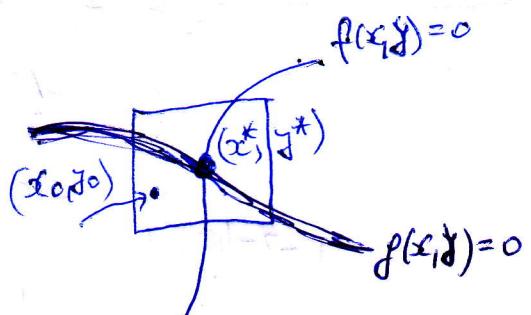
5. (i) Predočite geometrijski sustav $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$ i njegova rješenja. (3 boda)



Pješčenja su (x_1^*, y_1^*) ,
 $(x_2^*, y_2^*), (x_3^*, y_3^*), (x_4^*, y_4^*)$

- (ii) Što je područje izoliranosti rješenja (x^*, y^*) sustava? Predočite ga geometrijski i označite neku početnu aproksimaciju (x_0, y_0) . (3 boda)

Područje izoliranosti
 rješenja (x^*, y^*) je
 suci preseknič ili
 kraj koj se drži
 (x^*, y^*) ali nijedno
 drugo rješenje sustava.

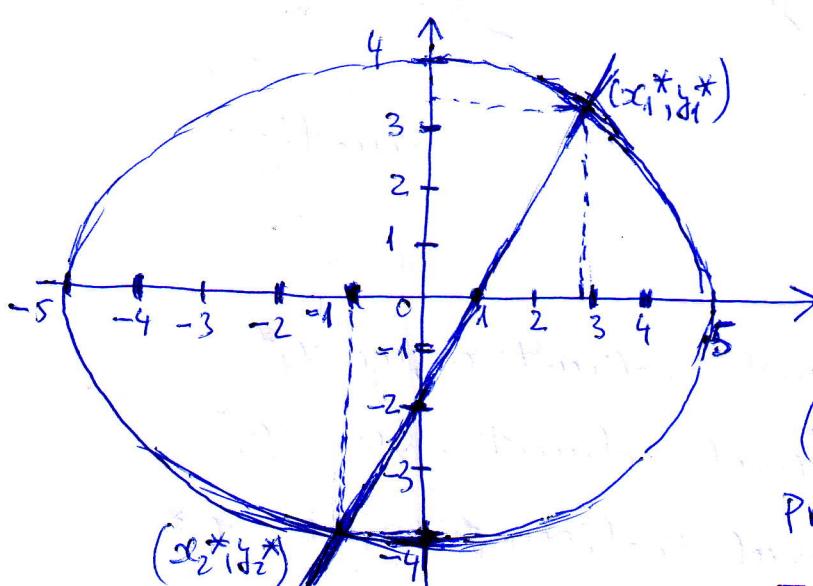


Rješenje (x^*, y^*)
 Početna aproksimacija (x_0, y_0)

- (iii) Predočite geometrijski sustav $16x^2 + 25y^2 = 400$ i $2x - y - 2 = 0$. Procijenite rješenja. (4 boda)

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{elipsa}$$

$$2x - y - 2 = 0 \quad \text{pravac}$$



Procjene:
 $(x_1^*, y_1^*) \approx (2.8, 3.4)$

$$\text{Projekcije: } \frac{2.8^2}{25} + \frac{3.4^2}{16} = 0.95 \approx 1$$

$$2 \cdot 2.8 - 2 = 5.6 - 2 = 3.6 \approx 3.4$$

$(x_2^*, y_2^*) \approx (-1.0, -3.4)$

$$\text{Projekcije: } \frac{-1.0^2}{25} + \frac{(-3.4)^2}{16} = 0.99 \approx 1$$

$$2 \cdot (-1.0) - 2 = -4.0 \approx -3.4$$