Sažetak – vjerojatnost

Skup ishoda

U teoriji vjerojatnosti razmatraju se događaji koji se mogu, ali ne moraju dogoditi. Takvi se događaji zovu **slučajnim događajima**.

Jednostavne događaje u nekom pokusu zvat ćemo **ishodima** (**elementarnim događajima**). Uočite sljedeće: **svaki se događaj sastoji od ishoda**.

Ako ima n ishoda onda ima 2^n događaja.

Algebra događaja

Veznici i, ili.
Povezivanjem rečenica A, B veznikom *i* nastaje rečenica *A i B*.
Povezivanjem rečenica A, B veznikom *ili* nastaje rečenica *A ili B*.
Treba uočiti da rečenica *A ili B* tvrdi da vrijedi jedno ili drugo, ali **dopušta da vrijedi jedno i drugo**.
Treba znati da se veznik *ili* u matematici uvijek shvaća na taj način (**uključivi ili**).
U svakidašnjem govoru to uvijek nije tako. Na primjer, u rečenici:
Marko je položio ispit ocjenom 2 ili 3,
veznik *ili* ne dopušta jedno i drugo (**isključivi ili**). Da bi se to naglasilo ta bi se rečenica mogla napisati i kao:
Marko je položio ispit ili ocjenom 2 ili ocjenom 3.

Zbroj i umnožak događaja.

Pretpostavimo da su rečenice A, B formulacije dvaju događaja u nekom pokusu. Tada su rečenice *A i B*, *A ili B* također formulacije događaja u tom pokusu.
Treba uočiti da, u skupovnoj interpretaciji, događaju *A i B* odgovara **presjek skupova** A, B; također da događaju *A ili B* odgovara **unija skupova** A,B. To očito vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru.
Uobičajeno je da se događaj *A i B* u teoriji vjerojatnosti zove **umnoškom (produktom)** događaja A, B i da se piše kao $A \cdot B$;
također da se događaj *A ili B* zove **zbrojem (sumom)** događaja A,B i da se piše kao $A+B$.
Dakle,
$A \cdot B$ = umnožak događaja A,B (dogodio se i događaj A i događaj B; dogodila su se oba od događaja A,B),
$A+B$ = zbroj događaja A,B (dogodio se događaj A ili događaj B; dogodio se barem jedan od događaja A, B).
Kako smo rekli, u skupovnoj interpretaciji, događaju $A \cdot B$ odgovara presjek skupova A,B, tj. skup $A \cap B$, a događaju $A+B$ skup $A \cup B$. Zato se, katkad, ti događaji tako i označuju.

Suprotni događaj.

Nijekom (negacijom) neke rečenice **protuslovi se** tvrdnji koju ta rečenica izriče. Na primjer,
A: Marko je položio ispit iz matematike,
nije A: Nije Marko položio ispit iz matematike.
Rečenicom *nije A* protuslovi se rečenici *A*, tj. njom se niječe (negira) tvrdnja izrečena rečenicom *A*.

Predpostavimo da je rečenica A formulacija nekog događaja. Tada je rečenica *nije A* također formulacija nekog događaja kojega zovemo **suprotnim događajem** događaja A .
Na primjer, ako je u pokusu bacanja kocke jedan put:
A: ispao je paran broj,
onda je suprotni događaj:
nije A: nije ispao paran broj.
U skupovnoj je interpretaciji:
A = $\{2,4,6\}$
nije A = $\{1,3,5\}$.
Treba uočiti da se događaj *nije A* sastoji upravo od onih ishoda koji ne pripadaju događaju A.
To znači da je *nije A* **komplement** skupa A u skupu svih ishoda S. Uobičajeno je da se suprotni događaj *nije A* događaja A označava kao $\bar{A}$ i čita kao *ne a*. Dakle,
$\bar{A}$: suprotni događaj događaja A (nije se dogodio A).
U skupovnoj interpretaciji $\bar{A}$ je komplement skupa A u skupu S.

Skup događaja u nekom pokusu skupa s operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja zovemo algebra događaja.

Dva međusobno suprotna događaja ne mogu istovremeno dogoditi. To znači: ako se dogodio A, onda se nije dogodio $\overline{A}$ i obratno, ako se dogodio $\overline{A}$, onda se nije dogodio A. Općenito:

ako se dva događaja ne mogu istovremeno dogoditi, onda kažemo da se događaji isključuju (u skupovnoj interpretaciji to znači da su pripadni podskupovi disjunktni).
Može se reći i ovako:
Dva se događaja isključuju ako je njihov umnožak nemogući događaj.
Ako su dva događaja međusobno suprotni, onda se oni isključuju, međutim događaji se mogu isključivati, a da ne budu suprotni.

Vjerojatnosni prostor

Neka u nekom pokusu ima n ishoda i neka su svi ishodi međusobno ravnopravni (imaju međusobno jednake izglede da se dogode). Pretpostavimo da se događaj A sastoji od m ishoda. Tada je **vjerojatnost događanja događaja** A jednaka $\frac{m}{n}$. To kraće pišemo kao:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

(p je početno slovo latinske riječi *probabilis*).

Svojstva vjerojatnosti događaja.

Iz definicije vjerojatnosti kao omjera svih povoljnih mogućnost i svih mogućnosti proizlaze sljedeća svojstva vjerojatnosti p događaja.

1. P(S) = 1 (ukupna vjerojatnost jednaka je 1)
2. p(A+B) = p(A) + p(B), ako se A, B isključuju

Ako u 2. umjesto B stavimo $\overline{A}$, dobijemo
$p(A+\overline{A}) = p(A)+p(\overline{A})$, a kako je $A+\overline{A}=S$ i $p(S)=1$, dobijemo

$p(A)+p(\overline{A})=1$, što pišemo i kao

3. $p(\overline{A})=1-p(A)$

Ta se formula zove **formulom vjerojatnosti suprotnog događaja**

Ako se u tu formulu stavi A=S, onda je, $\overline{A}$ =Ø, pa je

4. P(Ø) = 0.

Ta se formula može izravno dobiti i iz definicije vjerojatnosti jer se nemogući događaj sastoji od 0 ishoda.

5. $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$.

Ta se formula zove **formulom zbroja dvaju događaja**. Ona povezuje vjerojatnosti dvaju događaja, te vjerojatnosti njihova zbroja i umnoška. Ako znamo 3 od tih vjerojatnosti, onda pomoću te formule možemo izračunati i četvrtu.

Vjerojatnosnim prostorom zovemo algebru događaja <u>A</u> skupa s funkcijom vjerojatnosti p: <u>A</u> ….[0,1] koja ima svojstva 1,-5.

Statistička definicija vjerojatnosti

Statistička vjerojatnost događaja *A* jest granična vrijednost reletivnih frekvencija tog događaja kad broj izvođenja pokusa teži k beskionačnosti.

$p(A) = \lim m/n$.

Evo rezultata broja pisama u nekoliko pokusa bacanja novčića po 200 puta. Zapisali smo i međurezultate nakon 20, 50, 100 bacanja.

	20 bacanja	50 bacanja	100 bacanja	200 bacanja
1.pokus	8	22	54	103
2.pokus	12	26	56	109
3.pokus	8	21	45	94
4.pokus	11	24	51	106
5.pokus	8	21	44	89
6.pokus	9	27	47	93
7.pokus	12	29	54	110
8. pokus	10	27	54	103

Izračunajmo omjer broja pojavljivanja pisma i ukupnog broja bacanja u tim pokusima.

1.pokus 103/200 = 0.515

2.pokus 109/200 = 0.545

3.pokus   94/200 = 0.47

4.pokus   106/200 = 0.53

5.pokus   89/200 = 0.445

6.pokus   93/200 = 0.465

7.pokus   110/200 = 0.55

8.pokus   103/200 = 0.515

Treba uočiti da se omjeri grupiraju oko broja 0.5, tj. da je pri svakom od 200 bacanja novčića, omjer približno jednak 0.5.
Ukupno, tj. u 1 600 bacanja, događaj *P* dogodio se 807 puta. Pripadni je omjer:
807/1 600 = 0.504375.
Taj je rezultat na dvije decimale jednak broju 0.5.

Uočimo u nekom pokusu događaj *A*. Da bismo statistički odredili vjerojatnost tog događaja ponavljajmo izvođenje tog pokusa. Ako se pri *n* izvođenja tog pokusa događaj *A* dogodio *m* puta, onda se *m* zove **frekvencija**, a kvocijent *m/n* **relativna frekvencija** događaja *A* (za *n* izvođenja pokusa).

Uvjetna vjerojatnost. Nezavisni događaji

Ako saznamo neku informaciju o pokusu, može se dogoditi da se vjerojatnosti događaja promijene.

$$p(A|B) = \text{card}\,(AB)/\text{card}\,B = (\text{card}(AB)/\text{card}S)/(\text{card}B/\text{card}\,S) = p(AB)/p(B).$$

Dakle,

$$p(A|B) = p(AB)/p(B)$$

To je **formula uvjetne vjerojatnosti**.
Ta se formula može napisati i u obliku:

$$p(AB) = p(A|B)p(B)$$

Ta se formula zove **formulom umnoška (produktnom formulom)**.

Nezavisnost.
Ako je $p(A|B) \neq p(B)$, onda kažemo da je događaj A zavisan o događaju B.
Ako je $p(A|B) = p(B)$, onda kažemo da je događaj A nezavisan o događaju B.
Nezavisnost događaja jest simetrična relacija.
Zato se govori da su *A, B* međusobno nezavisni, odnosno da su međusobno zavisni.
Formula 2. zove se **produktnom formulom** za nezavisne događaje.
Ta se formula može shvatiti kao:
Dva su događaja nezavisna ako i samo ako je vjerojatnost njihova umnoška jednak umnošku njihovih vjerojatnosti.

II. SLUČAJNE VARIJABLE

Pojam slučajne varijable i razdiobe vjerojatnosti

Slučajna varijabla je funkcija koja svakom ishodu pridružuje neki realni broj.
tj.
Slučajna varijabla je funkcija X: S $\rightarrow$ R, gdje je S skup ishoda u nekom pokusu
(slučajne varijable obično označavamo velikim slovima X,Y,Z,U,V,W,…).
Skup vrijednosti slučajne varijable X označavamo oznakom R(X).

Primjer 3. Bacamo novčić 3 puta. Slučajna varijabla X registrira koliko se puta pojavio P. Zapišimo X.
Očito je da je R(X) = {0,1,2,3}. Da bismo zapisali slučajnu varijablu X moramo joj odrediti vrijednosti u svakom ishodu u tom pokusu. Ima ukupno 8 ishoda:
S = {PPP,PPG,PGP,PGG,GPP,GPG,GGP,GGG}. Vrijedi:

X(PPP) = 3	X(GPP) = 2
X(PPG) = 2	X(GPG) = 1
X(PGP) = 2	X(GGP) = 1
X(PGG) = 1	X(GGG) = 0.

Možemo govoriti o vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi neku vrijednost, primjerice:
vjerojatnost da X poprimi rezultat 2 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 1 jednaka je 3/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 3 jednaka je 1/8,
vjerojatnost da X poprimi rezultat 0 jednaka je 1/8
vjerojatnost da X poprimi rezultat 4 jednaka je 0.

To se može obrazložiti ovako:
reći da X poprimi rezultat 2 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPG,PGP,GPP}, a vjerojatnost tog događaja je 3/8,
reći da X poprimi rezultat 3 isto je što i reći da se dogodio događaj {PPP}, a vjerojatnost tog događaja je 1/8, itd.

Oznaka [X=a] označava da slučajna varijabla postiže rezultat *a* (gdje je *a* neki realni broj), tj.
$[X=a] = \{ \ w \in S : X(w) = a \ \}$
Umjesto p([X=a]) pisat ćemo kraće p(X=a), dakle,
$p(X=a) = p(\{ \ w \in S : X(w) = a \ \})$

Za slučajnu varijablu X iz prethodnog primjera vrijedi:
p(X=0) = 1/8
p(X=1) = 3/8
p(X=2) = 3/8
p(X =3) = 1/8

To se kraće zapisuje kao:

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

U gornjem su redu tablice vrijednosti koje slučajna varijabla postiže, a u donjem dijelu vjerojatnosti s kojima se te vrijednosti postižu. Treba uočiti da je zbroj brojeva u drugom redu jednak 1.
Kažemo da je tom tablicom zadana slučajna varijabla X.
Točnije, tom je tablicom zadana **razdioba vjerojatnosti** slučajne varijable X.

Primjer 5. Bacamo kocku dok se ne pojavi broj 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Odredimo razdiobu vjerojatnosti od X.

Slučajna varijabla X primjer je slučajne varijable koja poprima beskonačno mnogo (ali prebrojivo) vrijednosti:
$R(X) = \mathbf{N} = \{1,2,3,4, \ldots\}$.
Izračunajmo nekoliko početnih vjerojatnosti:

p(X=1) = p(prvi put 6) = 1/6
p(X=2) = p(prvi put nije 6, drugi put 6) = 5/61/6
p(X=3) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6) = $(5/6)^2 1/6$
p(X=4) = p(prva tri puta nije 6, četvrti put 6) = $(5/6)^3 1/6$.

Zato je razdioba vjerojatnosti slučajne varijable X:

1	2	3	4 ……………	n……….
1/6	5/61/6	$(5/6)^2 1/6$	$(5/6)^3 1/6$……	$(5/6)^{n-1} 1/6$…..

Koristeći se formulom za sumu beskonačnog reda možemo provjeriti da je zbroj vjerojatnosti zaista jednak 1.

$$1/6 + 5/61/6 + (5/6)^2 1/6 + (5/6)^3 1/6 + \ldots = 1/6(1+5/6+(5/6)^2+(5/6)^3+\ldots)$$
$$= 1/6 \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$$
$$= 1.$$

Diskretna slučajna varijabla

Definicija diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla jest slučajna varijabla kojoj je skup vrijednosti konačan ili beskonačan prebrojiv.
Drugim riječima slučajna varijabla X je diskretna ako je
$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ ili $R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$
Vrijedi
$\sum p(X=x_i) = 1$.
Ako označimo:
$p_i = p(X=x_i)$,

onda se razdioba vjerojatnosti slučajne diskretne varijable X može zapisati kao:

x1	x2	x3	xn
p1	p2	p3	pn

ako je skup vrijednosti konačan, odnosno kao:

x1	x2	x3…..
p1	p2	p3 ….

ako je skup vrijednosti beskonačan prebrojiv.

Očekivanje i varijanca diskretne slučajne varijable

Analogno težištu sustava čestica definira se **očekivanje** E(X) diskretne slučajne varijable X kojoj je razdioba vjerojatnosti zadana tablicom

x_1	x_2	x_3	x_n
p_1	p_2	p_3	p_n

$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$

Ako diskretna slučajna varijabla postiže beskonačno mnogo, ali prebrojivo vrijednosti, očekivanje se definira analogno:
$E(X) := x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ldots$

Primjer 10. Bacamo kocku dok se ne pojavi 6. Slučajna varijabla X registrira broj bacanja. Izračunajmo E(X).

Vidjeli smo da X ima sljedeću razdiobu:

1	2	3	4 ……………n……….
1/6	5/61/6	$(5/6)^2 1/6$	$(5/6)^3 1/6$……$(5/6)^{n-1} 1/6$…

Vrijedi formula:
$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots= 1/(1-x)^2, \quad -1<x<1.$
Ta se formula dobije deriviranjem formule za zbroj geometrijskog reda:
$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = 1/1-x, \quad -1<x<1.$

$E(X) = 1\cdot 1/6+ 2\cdot 5/61/6+3\cdot(5/6)^2 1/6+ 4\cdot (5/6)^3 1/6+\ldots+n\cdot (5/6)^{n-1} 1/6+\ldots$
$=1/6(1+2\cdot 5/6+3\cdot(5/6)^2 +4\cdot(5/6)^3+\ldots+n\cdot(5/6)^{n-1}+\ldots)$
$=1/6\cdot 1/(1-5/6)^2$
$= 6$ (kako smo i predvidjeli).

Varijanca slučajne varijable.

Prema uzoru na moment inercije, definiramo **disperziju** iliti **varijancu** V(X) diskretne slučajne varijable X (odnosno razdiobe vjerojatnosti slučajne vjerojatnosti):

$V(X) := (x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\ldots+(x_n-E(X))^2p_n.$

Treba uočiti da je varijanca V(X) pozitivna i da može biti 0 ako i samo ako postiže samo jednu vrijednost (s vjerojatnošću 1).
Za računanje varijance katkad je jednostavnija formula:

$V(X) = (x_1^2p_1+x_2^2p_2+\dots+x_n^2p_n) - E^2(X)$

(slično je ako je R(X) beskonačan, prebrojiv skup). Tu je $E^2(X)$ kraća oznaka za $((E(X))^2$.
Vrijedi:
$E(aX+b) = aE(X)+b$,
$V(aX+b) = a^2V(X)$.

Jednolika diskretna razdioba

To je najjednostavnija diskretna razdioba. Skup vrijednosti joj je neki konačan skup:

$R(X) = \{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$,
a sve su pripadajuće vjerojatnosti jednake:
$p(X=x_i)=1/n$, za svaki $i=1,2,\dots,n$

(odatle i naziv jednolika razdioba). Uočite da diskretna slučajna varijabla s jednolikom razdiobom nužno ima konačan skup vrijednosti (ne može imati beskonačno mnogo prebrojivo vrijednosti).
Tipični primjer takve razdiobe X koja registrira rezultat kod bacanja kocke. Kod nje je $R(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$,
a sve su odgovarajuće vjerojatnosti 1/6.
Uočite da su rezultati koje postiže ova slučajna varijabla **ekvidistantno raspoređeni** (među njima su jednaki razmaci; ovaj put razmak je 1), međutim to nije općenito, tj. podatci $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ kod jednolike razdiobe nisu nužno ekvidistantni.

Primjer 12. Izračunajmo očekivanje i varijancu diskretne jednolike razdiobe.

Ako zadržimo oznake kao do sada, dobit ćemo:
$E(X)= (x_1+x_2\dots+x_n)/n$,
$V(X)=(x_1^2+x_2^2 +\dots+x_n^2)/n-((x_1+x_2\dots+x_n)/n)^2$

Binomna razdioba.

Definicija 1. Slučajna varijabla X distribuirana je po binomnom zakonu s parametrima *n* i *p*, ako je

$R(X) = \{0,1,\dots,n\}$ i $p(X=i) = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$, $i \in R(X)$.

Ako je tako pišemo $X\sim B(n,p)$.

Uočite da X ovisi o dvama parametrima: diskretnom parametru n i kontinuiranom parametru p. Vrijedi:
Ako je $X\sim B(n,p)$, onda je $E(X) = np$, $V(X) = npq$, gdje je $q =1- p$.

Evo primjera kako nastaje binomana razdioba.
Razmotrimo pokus bacanja kocke 3 puta. Odredimo razdiobu slučajne varijable X koja registrira broj koliko se puta pojavio broj 6.
Jasno je da je
$R(X) = \{0,1,2,3\}$.
Nadalje:
p(X=0) = p(nijednom 6)
= p(prvi put nije 6, drugi put nije 6, treći put nije 6)
(zbog nezavisnosti)
= p(prvi put nije 6)·p(drugi put nije 6) ·p(treći put nije 6)
$= (5/6)^3$
p(X=1) = p(jednom 6, dvaput ne)
= p(prvi put 6, drugi i treći put ne ili prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije ili prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog disjunktnosti)
= p(prvi put 6, drugi i treći put put ne)+p(prvi put nije 6, drugi put jest, treći put nije) + p(prva dva puta nije 6, treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 + 5/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 + 5/6 \cdot 5/6$
$= 3 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^2$
Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor, možemo tumačiti kao broj na koliko načina od 3 mjesta možemo izabrati jedno mjesto za šesticu, dakle $3=\binom{3}{1}$.

p(X=2) = p(dvaput 6, jednom ne)
p(prva dva puta 6, treći put ne ili prvi i treći put 6, drugi put ne ili prvi put nije 6, drugi i treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
= p(prva dva puta 6, treći put ne)+p(prvi i treći put 6, drugi put ne) + p(prvi put nije 6, drugi treći put jest)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 + 1/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 + 5/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6$
$= 3 \cdot (1/6)^2 \cdot 5/6$.
Broj 3 koji se tu pojavljuje kao faktor možemo tumačiti kao broj na koliko načina možemo od 3 mjesta izabrati dva mjesta za šestice, dakle $3 =\binom{3}{2}$.

p(X=3) = p(sva tri puta 6)
=p(prvi put 6, drugi put 6, treći put 6)
(zbog nezavisnosti)
$= 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6$
$= (1/6)^3$
Zapišimo tu razdiobu.

0	1	2	3
$(5/6)^3$	$3 1/6(5/6)^2$	$3(1/6)^2 5/6$	$(1/6)^3$

To je primjer **binomne razdiobe**, točnije **X~ B(3,1/6).**
Treba uočiti da se pokus *bacanje kocke 3 puta* sastoji od **tri uzastopna nezavisna izvođenja** pokusa *bacanje kocke 1 put.*

Također, u pokusu *bacanje kocke 1 put* treba uočiti događaj *pojavio se broj 6* kojemu je vjerojatnost p=1/6 i njemu suprotni događaj *nije se pojavio broj 6*, kojemu je vjerojatnost q=5/6.
Općenito, možemo zamisliti neki pokus i neki događaj *A* u tom pokusu kojemu je vjerojatnost p(A) = p (tada suprotni događaj događaja *A* ima vjerojatnost q=1-p). Zamislimo da taj pokus nezavisno izvodimo *n* puta i da slučajna varijabla X registrira **koliko se puta pojavio događaj** *A*. Tada je:

R(X) = {0,1,2,…,n}

(događaj *A* može se dogoditi ili nikako ili jednom ili dvaput itd. a najviše *n* puta). Također:
p(X=i) = p(*i* puta se dogodio događaj *A*, a *n-i* puta se nije dogodio *A*)

$$= \binom{n}{i} p(\text{prvih } i \text{ puta dogodio se } A, \text{ a ostalih } n-i \text{ puta nije se dogodio } A)$$

$$= \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\,.$$

Broj $\binom{n}{i}$ koji se tu pojavljuje kao faktor može se shvatiti kao broj načina na koliko možemo od *n* mjesta izabrati *i* mjesta za događaj *A*. Treba uočiti da se taj faktor pojavljuje i za i=0, odnosno za i=n (kada je jednak 1).

To je bio **tipični primjer binomne razdiobe**. Treba uočiti da se ta razdioba opisuje pomoću **prirodnog broja** *n* (broj nezavisnih izvođenja pokusa) i **realnog broja** *p* između 0 i1 (vjerojatnost pojavljivanja događaja *A* u jednom izvođenju pokusa). Ti brojevi nazivaju se **parametrima razdiobe** (treba uočiti da je *n* **diskretan**, a *p* **kontinuiran** parametar).

Poissonova razdioba.

Binomna razdioba primjer je diskretne razdiobe s konačno mnogo vrijednosti. Poissonova razdioba također je diskretna, međutim prima beskonačno mnogo (prebrojivo) vrijednosti.

Definicija 2. Kažemo da je diskretna slučajna varijabla X distribuirana prema Poissonovu zakonu s parametrom a>0, ako je:
1. R(X) = {0,1,2,…}
2. $p(X=i) = e^{-a}a^i/i!$, i=0,1,2,3,…

Ako je tako pišemo X~P(a).

Uočite da ta razdioba ovisi samo o jednom parametru (za razliku od binomne razdiobe koja ovisi o dvama parametrima).

Primjer 23. Pokažimo: ako je X~P(a), onda je E(X) = a i V(X) = a.
Uvrštavajući u formulu:
$E(X) = x_0p_0 + x_1p_1+\ldots+x_ip_i+\ldots$
$x_i=i$, $p_i = e^{-a}a^i/i!$, dobit ćemo:
$E(X) = e^{-a}(0\cdot a^0/0! + 1\cdot a^1/1! +2\cdot a^2/2!+\ldots+i\cdot a^i/i!+\ldots)$
$\quad = e^{-a}\cdot a(1+a^1/1!+a^2/2!+\ldots)$

$= e^{-a} \cdot a \cdot e^{a}$
$= a.$
Slično se izračuna V(X).

Dakle:

Ako je X~P(a), onda je E(X) = a, V(X) = a

Poissonova se razdioba pojavljuje na primjer kod slučajnih varijabla koje broje broj poziva u jedinici vremena na nekoj telefonskoj centrali, broj ulaza na neku adresu, broj kvarova na nekom složenom uređaju i sl. Primjenu Poissonove razdiobe pokazujemo na nekoliko primjera.

Primjer 24. Prosječan broj poziva u minuti na nekoj telefonskoj centrali je 8. Odredite vjerojatnost da na toj centrali u nekoj minuti bude:
a) najviše 8 poziva,
b) između 5 i 10 poziva,
c) barem 5 poziva

Prije rješavanja pokušajte procijeniti ove vjerojatnosti odoka.
Da bismo riješili zadatak, **moramo prihvatiti jedan dogovor**, a to je da se **broj poziva ponaša prema Poissonovu zakonu**. Ako je tako, onda je slučajna varijabla X koja registrira broj poziva u minuti na toj centrali, Poissonova s parametrom a=8 (naime, parametar *a* je očekivanje, a očekivanje odgovara prosječnom broju poziva, odnosno prosječnoj vrijednosti što je postiže ta slučajna varijabla). Sad se pitanja mogu formulirati ovako:
a) $p(X\leq 8)=p_0+p_1+\ldots+p_8=e^{-8}(1+8/1! +8^2/2! +\ldots+8^8/8!) =0.5925$ (na 4 decimalna mjesta)
a) $p(5<X<10) = p_6+p_7+p_8+p_9 = e^{-8}(8^6/6! +\ldots+8^9/9!)= 0.4168$
b) $p(X>4)=1-p(X \leq 4)=1-p_0-p_1-p_2-p_3-p_4=0.9004$.

Zadatak 9. Predpostavimo da netko dobije prosječno 3 poruke na sat (na mobitelu).
(a) Koliko je puta vjerojatnije da tijekom sata dođe jedna poruka od toga da ne dođe ni jedna?
(b) Koji je najvjerojatnij broj poruka u jednom satu i koja mu je vjerojatnost.
(c) Kontroliranjem u 1000 sati dobiveni su rezultati o broju poruka. U koliko odprilike od tih 1000 sati neće biti ni jednog poziva, u koloko će biti točno jedan poziv itd.

Primjer 25. Uređaj se sastoji od dva dijela koji se nezavisno kvare jedan od drugoga. Jedan ima prosječno 3 kvara godišnje, a drugi 2. Uređaj radi ako mu oba dijela rade. Kolika je vjerojatnost da će uređaj raditi bez kvara
a) mjesec dana
a) cijelu godinu?

Prije rješavanja pokušajte provjeriti svoju intuiciju i procijeniti vremena odoka.
Neka X označava slučajnu varijablu koja mjeri broj kvarova u mjesecu prvog uređaja, a Y slučajnu varijablu koja označava broj kvarova u mjesecu na drugom uređaju (mjesec smo uzeli da bismo mogli riješiti a) zadatak, a za b) zadatak uzet ćemo da slučajne varijable registriraju broj kvarova godišnje). Da bismo mogli riješiti zadatak moramo pretpostaviti da je prosječni broj kvarova mjesečno 12 puta manji od prosječnog broja kvarova godišnje.
Zato je X~P(1/4), Y~P(1/6).
Budući da uređaj radi ako oba dijela rade i budući da je njihov rad, odnosno kvarenje nezavisno, imamo:
a) $p(X=0 \text{ i } Y=0)=p(X=0)p(Y=0)=e^{-1/4}e^{-1/6}=0.6592$.

b) Sad je X~P(3), Y~P(2) pa je
   p(X=0 i Y=0)=p(X=0)p(Y=0)= $e^{-3}e^{-2}$=0.0067.

Primjer 26. Riješimo prethodni primjer uz pretpostavku da uređaj radi ako mu bar jedan dio radi.

Sada je, uz iste oznake u oba slučaja:

a) p(uređaj bez prekida radi mjesec dana) = p(bar jedan od dijelova se neće kvariti mjesec dana) = p(X=0 ili Y=0)=p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0)   zbog nezavisnosti
= 0.9660
b) p(X=0)+p(Y=0)-p(X=0)p(Y=0)=0.1919.

Kontinuirane slučajne varijable.

Kažemo da je slučajna varijabla X neprekinuta (kontinuirana) ako prima svaku vrijednost na nekom intervalu (i svaku s vjerojatnošću 0).

Ta definicija nije matematički potpuno zadovoljavajuća, ali će za nas biti dovoljna.

Razdioba vjerojatnosti od X zadana je nekom funkcijom *f* (koja je izvan tog intervala jednaka nuli) za koju vrijedi:

(i) $f(x) \geq 0$, za sve realne brojeve x.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Pri tom je vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi vrijednost u intervalu [a,b] :

$$p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Funkciju f s ovim dvama svojstvima zovemo **funkcijom gustoće vjerojatnosti**.

Definicija 1. **Funkcija distribucije vjerojatnosti** slučajne varijable X jest, prema definiciji, funkcija F: $R \to R$, zadana uvjetom:
F(x):=p(X<x)
(vrijednost te funkcije u realnom broju x jest vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi rezultat manji od tog x).

1. očito je F rastuća (jer se povećanjem broja x ne može ukupna vjerojatnost do tog mjesta smanjiti),

2. očito je da F prima vrijednosti između 0 i 1 (jer su njene vrijednosti neke vjerojatnosti)

3. razumno je pretpostaviti da joj je limes kad x ide u *beskonačnost* upravo 1 (jer je ukupna vjerojatnost 1), a da joj je limes kad x ide u –*beskonačnost* jednaka 0.

4. razumno je pretpostaviti i da je ta funkcija neprekinuta (jer malim promjenama vrijednosti x, malo se mijenja i vjerojatnost).

Sva ta svojstva izravno se dokazuju iz sljedeće veze:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$

Tu smo ispod integrala stavili varijablu t, jer je x **gornja granica** integrala (pa da ne dođe do zabune).
Tako smo funkciju F opisali pomoću funkcije f. Obratno, iz definicije primitivne funkcije, sada slijedi da je:
F'(x)=f(x)
za sve x osim onih u kojima funkcija f ima prekid (a takvih je mjesta konačno mnogo; dopušta se i općenitija situacija, ali mi se ograničavamo na ovu).
Dakle F je primitivna funkcija funkcije f (odnosno to je barem po dijelovima).
Sada je.

$$p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

=F(b)-F(a).

Primjer 4. Pokažimo da je funkcija f zadana s f(x)=0, za x<-1
=x+1, za $-1 \le x \le 0$
=1/2, za $0<x \le 1$
= 0, za x>1
funkcija gustoće neke kontinuirane slučajne varijable X. Odredimo funkciju distribucije od X i nacrtajmo slike.

Prije rješavanja komentirajmo kako možemo zamišljati ovu funkciju. Netko je jediničnu masu razmazao po intervalu [-1,1] tako da je prvim potezom kista razmazao polovicu mase po intervalu [-1,0] jednoliko pojačavajući gustoću namaza, potom je zastao i ostatak jednoliko razmazao po ostalom dijelu, tj. po intervalu <0,1].
Da bismo riješili problem, prvo treba pokazati da je $f(x) \ge 0$ za sve x, za što jedino treba provjeriti da izraz x+1 nije negativan niti za jedan x u intervalu [-1,0].
Kako je f(-1)=0, f(0)=1 i kako f raste na tom intervalu (tu je f linearna funkcija), f ne može biti negativna na tom intervalu.

Drugi je uvjet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, što u ovom slučaju postaje

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} dx = 1 ,$$

što se lako pokaže, pa je f funkcija gustoće.
Napomenimo da se ovaj uvjet nije morao raditi pomoću integrala, već se mogla elementarno izračunati površina ispod grafa funkcije f: to je zbroj površina (pravokutnog) trokuta što ga s koordinatnim osima čini pravac s jednadžbom y=x+1 (a to je jednako 1/2) i pravokutnika što ga pravac s jednadžbom y=1/2 čini s x-osi od x=0 do x=1 (i to je 1/2, ukupno 1).

Funkciju distribucije određujemo pomoću formule $f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, a kako je *f* zadana po dijelovima, različitim načinima treba i integrirati po dijelovima (u ovom zadatku se čak ne treba ni integrirati već površine računati elementarno). Dakle:

F(x) = 0, za x<-1 (jer je tu i *f* nula pa nema površine)

$= \int_{-1}^{x} (t+1)dt$, za $-1 \le x \le 0$

=površina do 0 + $\int_{0}^{x} \frac{1}{2} dt$, za $0 < x \le 1$

= 1 , za x>1, (jer je do x=1 ukupna površina već 1)

Nakon računanja dobijemo:

F(x) = 0, za x<-1

$= x^2/2+x+1/2$ za $-1 \le x \le 0$

= 1/2+(1/2)x za $0 < x \le 1$

= 1 za x>1.

Napomene:

1. Na grafu funkcije *F* uočite da je neprekinuta, rastuća (ali ne strogo) i da su joj vrijednosti između 0 i 1.

2. *F* je derivabilna funkcija osim za konačno vrijednosti. To treba provjeriti samo za x=-1, x=0, x=1 tako da se gledaju derivacije s lijeva i s desna (koje uvijek postoje) i provjerava jesu li jednake.

   U x= -1, obje su derivacije 0 pa je *F* derivabilna i u –1.

   U x=0, derivacija s lijeva je 1, a s desna 1/2 pa *F* nije derivabilna u 0.

   U x=1, derivacija s lijeva je 1/2, a s desna 0 pa *F* nije derivabilna ni u 1.

Dakle za sve *x* osim za x=0 i x=1, *F* je derivabilna i vrijedi F'(x)=f(x).

3. Pokušajte sami obrazložiti zašto je kao u 2., pa poslije pogledajte objašnjenje.

Vrijednost funkcije *F* za neki *x*, dobije se tako da se izračuna površina ispod grafa funkcije *f* do toga *x*. Dokle je *f* neprekinuta, površina ispod nje se također neprekinuto mijenja, štoviše mijenja se glatko (tj. *F* ima prvu derivaciju, tj. brzinu promjene, ali ne nužno svuda i drugu derivaciju), međutim tamo gdje *f* ima prekid (skok), površina će se neprekinuto nastaviti povećavati (sa slike je jasno da površina nema skok), ali neće biti derivabilna u toj točki.

Očekivanje i varijanca kontinuirane slučajne varijable.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

(u usporedbi s diskretnim slučajem, suma se zamjenjuje integralom, x_i s x, a p_i s f(x)dx).

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

U ovim formulama, a i inače kad je riječ o slučajnim varijablama, treba lučiti oznaku X (za slučajnu varijablu) od oznake x (za realnu varijablu tj. bilo koji realni broj).

Napomene:

1. Kao i prije, očekivanje ima značenje točke u kojoj je ravnoteža. Taj broj može biti i pozitivan i negativan.

2. Varijanca, kao i prije, mjeri stupanj rasipanja oko očekivanja. Iz formule se vidi da je uvijek pozitivna (jer integriramo funkciju koja je umnožak jedne funkcije koja je kvadrat i druge koja je pozitivna, prema definiciji, tj. računamo površinu ispod grafa funkcije koji je iznad osi x). Zato, kao i prije, možemo definirati **standardnu devijaciju** slučajne varijable X:
   s(X) = $\sqrt{V(X)}$.

3. Za računanje u konkretnim slučajevima pogodnija je druga formula za varijancu (a dobije se lako iz ove, kao i prije):
   $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X).$$

Tu, kao i obično, $E^2(X)$ znači $(E(X))^2$.

Eksponencijalna razdioba.

Vrijeme izmedju dvaju kvarova na nekom uređaju ili stroju, nije egzaktno određeno (odnosno mi, sa sadašnjim znanjem, nismo sposobni to odrediti), već je slučajno. Slično je s vremenom izmedju dvaju posjeta neke adrese, poziva na nekom telefonu, izmedju dvaju radioaktivnih raspada, vremenom rada do kvara neke žarulje i sl. Zato ima smisla govoriti o slučajnoj varijabli koja registrira vrijeme izmedju dvaju kvarova, trajanja neke žarulje i sl.

Definicija 2. Kažemo da slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu** razdiobu s **parametrom** $\lambda>0$, ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za x>0

= 0, inače.

Ako je tako, pišemo $X \sim E(\lambda)$.

Vrijedi:

E(X) = $1/\lambda$.

V(X) = $\frac{1}{\lambda^2}$

Funkciju distribucije F eksponencijalne razdiobe je:

$$F(x) = 0, \qquad \text{za nepozitivne } x$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Dakle, za pozitivne x je
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Primjer 7. Prosječno vrijeme rada žarulje je 800 sati. Odredimo vjerojatnost:
a) da žarulja radi bar 800 sati
b) da žarulja radi manje od 600 sati.
c) da žarulja radi između 500 i 1 000 sati.

Da bismo riješili ovaj problem prihvatit ćemo pretpostavku da je vrijeme trajanja žarulje eksponencijalno distribuirano. Dakle, ako slučajna varijabla X registrira vrijeme trajanja žarulje, onda je:

X~E(1/800).

Tu smo izabrali λ=1/800 jer prosječno vrijeme trajanja 800 (sati), a taj broj odgovara očekivanju slučajne varijable X, a ono je $1/\lambda$.
Sad se problemi mogu shvatiti ovako:
a) $p(X \geq 800) = p(800<X<\infty) = 1-F(800) = 1-(1-e^{-800/800})=0.3679$ (na 4 decimalna mjesta)
b) $p(X<600) = p(-\infty<X<600) = F(600)-0 = 1-e^{-600/800}= 0.5276$
c) $p(500<X<1\,000) = F(1\,000)-F(500) = (1-e^{-1000/800})-(1-e^{-500/800}) = 0.2488$.

Normalna (Gaussova) razdioba.

Definicija 3. Kažemo da kontinuirana slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima μ i σ^2, ako joj je funkcija gustoće:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pri tom je parametar μ očekivanje, a parametar σ^2 varijanca te slučajne varijable.

To je najvažnija razdioba u teoriji, ali i u primjeni vjerojatnosti. Tu razdiobu (približno) imaju mnoge slučajne varijable koje nastaju u praksi, primjerice slučajna varijabla koja
a) registrira grješku pri mjerenju
b) registrira rezultat mjerenja (na pr. mase, visine, postotka, inteligencije, …)
c) registrira rezultate pri dobro odmjerenom pismenom ispitu itd.
S druge strane, do ove razdiobe može se doći statistički (o čemu će više biti riječ poslije). Naime kad se izvodi veći broj nezavisnih mjerenja neke veličine, pa se gleda prosječan rezultat, dolazi se do normalne razdiobe (približno, a u limesu točno; to se može točno matematički opisati).

Heuristički razlozi koji nam daju naslutiti da će se grješke pri mjerenju ponašati prema normalnom zakonu.
Neka slučajna varijabla X registrira grješku pri mjerenju (koju ne možemo egzaktno opisati jer nastaje slučajno, čak i kod najpreciznijih instrumenata) i neka je f funkcija gustoće od X.

Tada je prirodno, uz činjenicu da je površina ispod grafa od f jednaka 1, predpostaviti sljedeće:

1. grješke teoretski mogu biti po volji velike, pa je f definirana i pozitivna za sve realne brojeve x.
2. grješke su simetrično raspoređene oko 0, pa je f **parna funkcija**.
3. najvjerojatnije su grješke oko nule, a kako idemo dalje vjerojatnost da greška bude u nekom malom intervalu stalne duljine, smanjuje se. Zato je f padajuća funkcija za x>0.
4. Trebala bi postojati familija takvih f, ovisnih o nekom parametru, koje bi opisivale grješke (jer jedna je funkcija za instrument koji radi male, a druga za neki koji radi velike grješke; ipak te funkcije trebaju biti slične).

Ako bismo tome dodali neke druge razumne uvjete ili da smo (zbog zdravog razuma, ali i statističkih razloga) pretpostavili da f za x>0 eksponencijalno opada, ostale bi nam, kao najjednostavnije, mogućnosti tipa:

$f(x) = ae^{-bx^2}$, gdje su *a,b* neki pozitivni realni brojevi (x^2 smo stavili radi parnosti, a predznak *minus* da bi funkcija bila padajuća).

Koristeći poznatu činjenicu da je:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1 \quad (*)$$

lako bismo došli do veze između parametara *a i b*, i do toga da se f može zapisati kao:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma>0 \quad (**)$$

Graf te funkcije zove se **gaussova krivulja**; ona je

1. **zvonolika** oblika s tjemenom u x=0.
2. simetrična s obzirom na y-os,
3. ima točke infleksije u x=$\pm\sigma$.
4. odoka vidimo da je površina između tih dviju vrijednosti veća od 1/2, poslije ćemo to izračunati preciznije.
   To ćemo približiti na primjeru.
   Pretpostavimo da je grješka pri očitavanju rezultata na nekom mjernom istrumentu normalno distribuirana uz σ=0.001. Tu činjenicu možemo tumačiti kao: vjerojatnost da grješka bude između –0.001 i 0.001 je veća od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 2/3). To znači da je vjerojatnost da grješka bude veća od 0.001 ili manja od –0.001, manja od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 1/3).
5. Što je σ veći, krivulja je spljoštenija (površina je rasturenija); to govori o tome da su grješke raspršenije, dakle veće. Obratno, što je σ manje, krivulja je uža i viša; znači grješke su manje, koncentrirane su oko 0.
6. Za slučajnu varijablu X koja ima ovakvu funkciju gustoće kažemo da je **normalna** i pišemo: X~N(0, σ^2).
   Specijalno, ako je σ=1, kažemo da je razdioba **jedinična normalna (**ili **standardna)** i tada pišemo X~N(0,1^2).
   Često jediničnu razdiobu označavamo s T, a njenu funkciju gustoće s φ. Dakle:
   $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ako je X~N(0, σ^2), onda je

E(X) = 0, V(X) = σ^2.

Napomena.

1. Ako graf funkcije f pomaknemo za μ onda se tjeme pomakne za taj isti μ (pomak će biti udesno ako je μ>0, u suprotnom bit će ulijevo). Pomicanjem za μ funkcija postaje:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
2. Ovako pomaknuta funkcija također je funkcija gustoće (pomakom se površina ne mijenja). Slučajnu varijablu *X* koja ima takvu funkciju gustoće pišemo kao:
   X~N(μ,σ^2).
   Pritom se očekivanje također pomakne za μ pa je.
   E(X) = μ.
   Varijanca se ne mijenja (krivulja po izgledu ostaje potpuno ista) pa je:
   V(X) = σ^2.
   Sve se to može potvrditi i računom.
3. Pomaknuta krivulja ima slična svojstva kao i ona početna, samo što je os simetrije pravac s jednadžbom x=μ (a ne više x-os).

Primjer 9. Težina neke populacije normalno je distribuirana s prosječnom težinom 66 kg i standardnom devijacijom 5kg. Odredimo vjerojatnost da slučajno odabrani predstavnik te populacije ima:
a) težinu između 65 i 70 kilograma.
b) težinu veću od 72 kg.

Neka slučajna varijabla *X* registrira težinu slučajno odabranog predstavnika te populacije. Iako je ovo situacija iz života na nju ćemo primjeniti normalnu razdiobu (koja odgovara idealnim uvjetima). Zato je
X~N(65,5^2),
jer očekivanje treba biti prosječna vrijednost, a standardna je devijacija propisana u zadatku (poslije ćemo, u statistici, vidjeti kako se u takvim praktičnim slučajevima određuje standardna devijacija).
Zadatke možemo shvatiti ovako:
p(65<X<70) = 0.3674
p(X>72) = 0.1151.

Pravilo "tri sigme".

Najvažnije svojstvo normalne razdiobe u primjenama, jest to da interval unutar kojega se nalazi gotovo 100% svih vrijednosti slučajne varijable, **ovisi samo o očekivanju i standardnoj devijaciji** (to je za po 3 standardne devijacije lijevo i desno od očekivanja).
Preciznije, neka je X~N(μ,σ^2). Tada je
$p(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0.9973$
Također je.
$p(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.9544$
$p(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0.6826$

Znači s 95% sigurnošću možemo tvrditi da se neka veličina normalno distribuirana nalazi za najviše 2 standardne devijacije lijevo ili desno od očekivanja (to znači da je u tom intervalu više od 95% površine ispod pripadne krivulje.
Slično, vidimo da za 1 standardnu devijaciju lijevo i desno od oćekivanja ima oko 2/3 površine ispod te krivulje (to je ono što smo ranije odoka procjenjivali da je više od jedne polovine).

Primjer 10. Odredimo interval unutar kojeg se nalazi težina slučajno odabrane osobe iz Primjera 9:

(i) s vjerojatnošću oko 0.68
(ii) s vjerojatnošću oko 0.95
(iii) gotovo 100%

U Primjeru 9 je riječ o normalnoj razdiobi s $\mu=66$ i $\sigma=5$, pa je, prema pravilima "jedan sigma", "dva sigma" i "tri sigma":

(i) [66-5,66+5]=[61,71], tj.
p(težina slučajno izabrane osobe je između 61 i 71) $\approx$ 0.68

(ii) $[66-2\cdot5,\ 66+2\cdot5]$=[56, 76], tj.
p(težina slučajno izabrane osobe je između 56 i 76) $\approx$ 0.95

(ii) $[66-3\cdot5,\ 66+3\cdot5]$=[51, 81], tj.
gotovo sve osobe imaju težinu izmedju 51 i 81.